Die Macht der potenziellen Energie

Aufgaben zur Energie allgemein:

1) Bekannte Energieträger und ihr Energieinhalt:

- Verbrennen von Steinkohle (30 MJ pro kg Kohle)
- Kernspaltung von Uran (86 TJ pro kg Uran)
- Kernfusion mit Wasserstoff (0,34 PJ pro kg Deuterium-Tritium-Gemisch)

Aus welcher Höhe müsste man 1 kg Materie fallen lassen, um beim Aufschlag die gleiche Energiemenge freizusetzen wie bei der Verbrennung, Kernspaltung oder Kernfusion?
(Ansatz 1 mit $E_{pot} = m \cdot g \cdot h$, Ansatz 2 mit $E_{pot} = -G\frac{m \cdot M_{Erde}}{r}$)
Gegeben: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}, M_{Erde} = 5{,}97 \cdot 10^{24} kg, R_{Erde} = 6{,}37 \cdot 10^6 m$

	Steinkohle	Uran	Wasserstoff
Energie	30 MJ	86 TJ	0,34 PJ
Höhe 1 ($E_{pot} = m \cdot g \cdot h$)	$3{,}1 \cdot 10^3 km$	$8{,}7 \cdot 10^9 km$	$3{,}5 \cdot 10^{10} km$
Höhe 2 ($E_{pot} = -G\frac{m \cdot M_{Erde}}{r}$)	$5{,}8 \cdot 10^3 km$	---	---

Benutze für die weiteren Aufgaben die Formel: $E_{pot} = -G\frac{m \cdot M}{r}$

2) Der Meteor von Tscheljabinsk trat mit einer Masse von $1{,}2 \cdot 10^7 kg$ und einer Geschwindigkeit von $1{,}9 \cdot 10^4 m/s$ in die Erdatmosphäre ein.
Untersuche, ob die Anziehungskraft der Erde ihn auf diese Geschwindigkeit hat beschleunigen können.

$$E_{Kin} = 0{,}5 m v^2 = 2{,}2 \cdot 10^{15} J$$
$$\Delta E_{Pot} = G \cdot m \cdot M_{Erde} \left(\frac{1}{R_{Erde}} - \frac{1}{r}\right)$$

Der Abstand wäre negativ. Selbst wenn der Meteor aus dem Unendlichen gekommen wäre, hätte er diese Geschwindigkeit nicht erreichen können.

3) Wie groß ist die maximale Geschwindigkeit, mit der ein Körper in die Sonne stürzen kann?
Gegeben: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}, M_{Sonne} = 1{,}99 \cdot 10^{30} kg, R_{Sonne} = 6{,}96 \cdot 10^8 m$

$$0{,}5 m v^2 = G \cdot m \cdot M_{Sonne} \left(\frac{1}{R_{Sonne}}\right)$$
$$v = \sqrt{\frac{2G \cdot M_{Sonne}}{R_{Sonne}}} = 618\ km/s$$

Aufgaben zu extrem kompakten Objekten:

4) Vom Objekt PG 1302-102 treffen $2{,}16 \cdot 10^{-14} W$ senkrecht auf jeden Quadratmeter Erde. Im Vergleich dazu kommen von der 150 Mio. km (1 AE) entfernten Sonne 1367 W auf jeden Quadratmeter Erde an.

a) Wie weit müsste man die Sonne wegschieben, damit von ihr eine genauso große Strahlungsleistung pro
Quadratmeter auf der Erde ankommt, wie von PG 1302-102?

$$2{,}16 \cdot 10^{-14} = \frac{1367}{x^2} \rightarrow x = 2{,}51 \cdot 10^8 AE = 3978\ Lj$$

b) Die Entfernung von PG 1302-102 beträgt 3,5 Mrd. Lichtjahre ($2{,}21 \cdot 10^{14} AE$). Wie viel Leistung pro Quadratmeter käme von der Sonne auf der Erde an, wenn sie in dieser Entfernung stünde?

$$x = \frac{1367}{(2{,}21 \cdot 10^{14})^2} = 2{,}80 \cdot 10^{-26} W/m^2$$

c) Wie groß ist die Lichtleistung von PG 1302-102 im Vergleich zur Sonne?

$$x = \frac{2{,}16 \cdot 10^{-14}}{2{,}80 \cdot 10^{-26}} = 7{,}71 \cdot 10^{11}$$

d) Die Zentralregion von PG 1302-102 lässt sich nicht auflösen, d.h. sie ist kleiner als $8 \cdot 10^{16} m$. Angenommen die Lichtleistung von PG 1302-102 resultiert aus einer Anzahl an Sonnen wie die unsre. Berechne ihre gegenseitigen Abstände, wenn sie sich in einem Würfel mit $8 \cdot 10^{16} m$ Kantenlänge befinden.

Volumen: $V = 5{,}1 \cdot 10^{50} m^3$
Jedem Stern stehen $\frac{5{,}1 \cdot 10^{50} m^3}{7{,}71 \cdot 10^{11}} = 6{,}6 \cdot 10^{38} m^3$ zur Verfügung, d.h. er befindet sich im Zentrum eines Würfels mit $8{,}7 \cdot 10^{12}$m Kantenlänge. Der Abstand zum nächsten Stern ist demnach $8{,}7 \cdot 10^{12} m$ =58 AE.

e) Es gibt einen Zusammenhang zwischen maximaler Strahlungsleistung bzw. Leuchtkraft (Eddington Leuchtkraft) durch Akkretion und der Zentralmasse:

$$L_{Eddington} = 1{,}3 \cdot 10^{31} \frac{M}{M_{Sonne}} W$$

Als Leuchtkraft wird in diesem Fall die Strahlungsleistung über dem gesamten Spektralbereich (bolometrische Leuchtkraft) benutzt. Diese beträgt $6{,}5 \cdot 10^{39} W$. Berechne damit die Zentralmasse von PG 1302-102.Berechne damit die Zentralmasse von PG 1302-102.

$$6{,}5 \cdot 10^{39} W = 1{,}3 \cdot 10^{31} \frac{M}{M_{Sonne}} W$$
$$M = 5{,}0 \cdot 10^8 M_{Sonne}$$

f) Berechne die Entfernung zur Zentralmasse, ab der die kinetische Energie eines Teilchens mit Lichtgeschwindigkeit gerade noch ausreicht, das Gravitationsfeld zu verlassen (Schwarzschildradius).

$$\frac{G \cdot m \cdot M}{R} = 0{,}5 \cdot mv^2$$

$$R = \frac{2G \cdot M}{c^2}$$

g) Wie viel Masse müsste jede Sekunde aus dem Unendlichen bis zum 1,7-fachen Schwarzschild-radius fallen, damit die sekündlich freigesetzte potenzielle Energie der Eddington Leuchtkraft entspricht.

Jede Sekunde müssen $6{,}5 \cdot 10^{39} J$ freigesetzt werden:

$$6{,}5 \cdot 10^{39} J = G \cdot m \cdot M \left(\frac{1}{1{,}7 R_{Schwarzsch.}} \right)$$

$$6{,}5 \cdot 10^{39} J = G \cdot m \cdot M \left(\frac{c^2}{3{,}4 G \cdot M} \right)$$

$$6{,}5 \cdot 10^{39} J = 0{,}3 mc^2$$

$$m = \frac{6{,}5 \cdot 10^{39} J}{0{,}3 c^2} = 2{,}4 \cdot 10^{23} kg$$

Es müsste pro Sekunde $2{,}4 \cdot 10^{23} kg$ einfallen, was 0,04 Erdmassen entspricht.