Optik: Das Prinzip der kürzesten Zeit

26–1 Licht

Dies ist das erste einer Reihe von Kapiteln über das Thema *elektromagnetische Strahlung*. Licht, mit dessen Hilfe wir sehen, ist nur ein kleiner Ausschnitt eines weiten Spektrums ein und derselben Erscheinung, wobei sich die verschiedenen Teile dieses Spektrums durch unterschiedliche Werte einer bestimmten Größe unterscheiden, die sich ändert. Diese veränderliche Größe könnte man als „Wellenlänge" bezeichnen. Wenn sie sich im sichtbaren Spektrum ändert, wechselt das Licht augenscheinlich die Farbe von Rot bis Violett. Wenn wir das Spektrum systematisch untersuchen, und zwar von den langen Wellenlängen bis hin zu den kurzen, würden wir mit denen beginnen, die gewöhnlich als *Radiowellen* bezeichnet werden. Radiowellen können technisch in einem weiten Wellenlängenbereich erzeugt werden, wobei einige sogar länger sind als jene, die bei den gewöhnlichen Rundfunkübertragungen benutzt werden; reguläre Rundfunksendungen haben Wellenlängen, die etwa 500 Metern entsprechen. Dann gibt es die sogenannten „Kurzwellen", d. h. Radarwellen, Millimeterwellen usw. Es gibt keine wirklichen Begrenzungen zwischen dem einen und dem anderen Wellenlängenbereich, da uns die Natur keine scharfen Kanten beschert hat. Die mit einem bestimmten Namen für die Wellen verknüpften Zahlen sind nur angenähert und natürlich ebenso die Namen, die wir den verschiedenen Bereichen geben.

Nach einem langen Weg abwärts durch die Millimeterwellen kommen wir dann ins sogenannte *Infrarot* und von da an ins sichtbare Spektrum. Geht man nun in die andere Richtung, gelangt man in einen Bereich, der das *Ultraviolett* genannt wird. Dort, wo das Ultraviolett endet, beginnen die Röntgenstrahlen, aber wir können nicht genau definieren, wo dies ist; es ist ungefähr bei 10^{-8} m oder $10^{-2}\,\mu$. Dieses sind „weiche" Röntgenstrahlen; dann kommen die gewöhnlichen Röntgenstrahlen und die sehr harten Röntgenstrahlen; dann die γ-Strahlen usw., zu immer kleineren Werten dieser Dimension Wellenlänge.

Innerhalb dieses weiten Wellenlängenbereiches gibt es drei oder mehr Näherungsbereiche, die besonders interessant sind. In einem von diesen existiert eine Bedingung, in welcher die beteiligten Wellenlängen sehr klein sind verglichen mit den Dimensionen der zu ihrer Untersuchung verfügbaren Apparaturen; ferner sind die Photonenenergien, unter Anwendung der Quantentheorie, klein verglichen mit der Energieempfindlichkeit der Apparaturen. Unter diesen Bedingungen können wir eine grobe erste Näherung mit der als *geometrischer Optik* bezeichneten Methode machen. Wenn andererseits die Wellenlängen mit den Dimensionen der Apparatur vergleichbar sind, was mit Radiowellen leichter als mit sichtbarem Licht zu verwirklichen ist, und wenn die Photonenenergien immer noch vernachlässigbar klein sind, dann kann eine sehr brauchbare Näherung durch Untersuchung des Verhaltens der Wellen weiterhin bei Vernachlässigung der Quantenmechanik gemacht werden. Diese Methode basiert auf der *klassischen Theorie der elektromagnetischen Strahlung*, die in einem späteren Kapitel diskutiert wird. Wenn wir als nächstes zu den sehr kurzen Wellenlängen gehen, wo wir den Wellencharakter vernachlässigen können, die Photonen aber eine sehr *große* Energie verglichen mit der Empfindlichkeit unserer Apparatur haben, werden die Verhältnisse wieder einfach. Dies ist das einfache *Photonen*bild, welches wir nur sehr knapp beschreiben wollen. Das vollständige Bild, welches den gesamten Zusammenhang in einem Modell vereinigt, wird uns noch lange nicht zugänglich sein.

In diesem Kapitel ist unsere Diskussion auf den Bereich der geometrischen Optik beschränkt, in welchem wir die Wellenlängen und den Photonencharakter des Lichtes vergessen, was alles zur rechten Zeit erklärt werden soll. Wir beschäftigen uns nicht einmal mit der Frage, was das Licht *ist,* sondern finden nur heraus, *wie es sich* im großen und ganzen *benimmt* – verglichen mit Dimensionen von Interesse. All dies muß gesagt werden, um die Tatsache zu betonen, daß das, worüber wir reden werden, nur eine sehr grobe Näherung ist; dies ist eines der Kapitel, die wir wieder „verlernen" müssen. Wir werden es aber sehr schnell verlernen, da wir praktisch sofort zu einer genaueren Methode übergehen werden.

Obwohl die geometrische Optik nur eine Näherung ist, ist sie technisch von sehr großer Bedeutung und historisch von großem Interesse. Wir werden dieses Thema mehr als einige andere historisch behandeln, um eine gewisse Vorstellung von der Entwicklung einer physikalischen Theorie oder einer physikalischen Idee zu geben.

Zunächst ist das Licht natürlich jedem wohlvertraut und ist seit unvordenklichen Zeiten wohlvertraut gewesen. Ein Problem ist nun, durch welchen Vorgang wir Licht *sehen?* Es hat viele Theorien gegeben, aber es lief schließlich darauf hinaus, daß es irgend etwas gibt, was in das Auge eindringt – was von den Objekten aus in das Auge hineinspringt. Wir haben diese Vorstellung so lange gehört, daß wir sie akzeptieren, und es ist fast unmöglich, sich vorzustellen, daß sehr intelligente Leute entgegengesetzte Theorien vorgeschlagen haben – daß zum Beispiel etwas aus dem Auge herauskommt und nach dem Objekt tastet. Einige andere wichtige Beobachtungen sind die, daß Licht, wenn es von einem Ort zu einem anderen geht, dies *geradlinig* macht, wenn sich nichts im Wege befindet, und daß die Strahlen anscheinend einander nicht stören. Das heißt, daß das Licht den Raum in allen Richtungen durchquert, aber das Licht, das unsere Blickrichtung kreuzt, beeinflußt nicht das Licht, welches von irgendeinem Objekt zu uns gelangt. Dies war einst ein sehr starkes Argument gegen die Korpuskulartheorie; es wurde von Huygens gebraucht. Wenn Licht einer großen Zahl dahinschwirrender Pfeile gleicht, wie könnten dann andere Pfeile so leicht durch sie hindurchdringen? Solche philosophischen Argumente haben wenig Gewicht. Man könnte immer sagen, daß Licht aus Pfeilen besteht, die sich gegenseitig durchdringen!

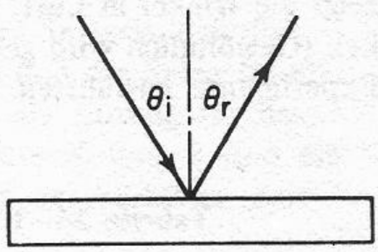


Fig. 26–1. Der Einfallswinkel ist gleich dem Ausfallwinkel.

26–2 Reflexion und Brechung

Die obige Diskussion zeigt genug von der grundlegenden *Idee* der geometrischen Optik – nun müssen wir ein bißchen weiter in die quantitativen Eigenschaften eindringen. Bis jetzt haben wir nur Licht, das sich in geraden Linien zwischen zwei Punkten bewegt; nun wollen wir das Verhalten des Lichts studieren, wenn es auf verschiedene Materialien trifft. Das einfachste Objekt ist ein Spiegel, und das Gesetz für einen Spiegel sagt, daß das Licht sich nicht weiter in einer geraden Linie ausbreitet, wenn es auf den Spiegel trifft, sondern von dem Spiegel in eine neue gerade Linie abspringt, die sich ändert, wenn wir den Winkel des Spiegels ändern. Die Frage für die Vorfahren war: Wie lautet die Beziehung zwischen den beiden beteiligten Winkeln? Dies ist eine sehr einfache Beziehung, die vor langer Zeit entdeckt wurde. Das auf einen Spiegel einfallende Licht bewegt sich in der Weise, daß die beiden Winkel, zwischen jedem der Strahlen und dem Spiegel, gleich sind. Aus irgendeinem Grunde ist es üblich, die Winkel von der Normalen auf der Spiegeloberfläche zu messen. Folglich lautet das sogenannte Reflexionsgesetz

$$\theta_i = \theta_r. \tag{26.1}$$

Dieser Lehrsatz ist einfach genug, aber ein schwierigeres Problem begegnet uns, wenn Licht von einem Medium in ein anderes übertritt, z. B. aus der Luft ins Wasser; hier sehen wir ebenfalls, daß es sich nicht in einer geraden Linie bewegt. Im Wasser hat der Strahl eine Neigung gegenüber dem Weg in der Luft; wenn wir den Winkel θ_i so ändern, daß er näher zur Senkrechten einfällt, ist der Winkel des „Bruchs" nicht so groß. Wenn wir aber den Lichtstrahl stark neigen, wird der Abweichungswinkel sehr groß.

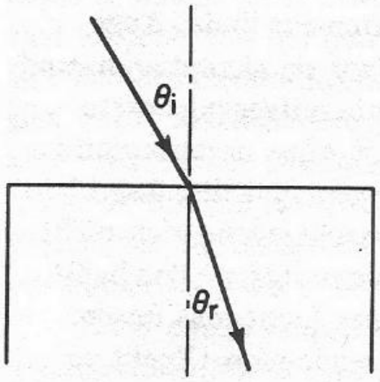


Fig. 26–2. Ein Lichtstrahl wird gebrochen, wenn er von einem Medium in ein anderes übertritt.

Die Frage ist: Wie lautet die Beziehung zwischen beiden Winkeln? Dies gab auch den Vorfahren lange Zeit ein Rätsel auf, und hier fanden sie nie die Antwort! Es ist jedoch eine der wenigen Stellen in der gesamten altgriechischen Physik, wo man irgendwelche experimentellen Ergebnisse verzeichnet finden kann. Claudius Ptolemäus machte eine Liste der Winkel in Wasser für eine Anzahl verschiedener Winkel in Luft. Tabelle 26–1 zeigt die Winkel in Luft, in Grad, und die entsprechenden im Wasser gemessenen Winkel. (Gewöhnlich wird gesagt, daß die griechischen Wissenschaftler niemals irgendwelche Experimente ausführten. Aber es wäre unmöglich, diese Wertetabelle zu erhalten,

Tabelle 26–1

Winkel in Luft	Winkel in Wasser
10°	8°
20°	15-1/2°
30°	22-1/2°
40°	28°
50°	35°
60°	40-1/2°
70°	45°
80°	50°

Tabelle 26–2

Winkel in Luft	Winkel in Wasser
10°	7-1/2°
20°	15°
30°	22°
40°	29°
50°	35°
60°	40°
70°	48°
80°	49-1/2°

ohne das richtige Gesetz zu kennen, es sei denn durch Experimente. Es sollte jedoch erwähnt werden, daß diese Werte nicht unabhängige sorgfältige Messungen für jeden Winkel sind, sondern nur einige von wenigen Messungen interpolierte Zahlen darstellen, denn sie passen alle exakt auf eine Parabel.)

Dies ist also einer der wesentlichen Schritte bei der Entdeckung eines physikalischen Gesetzes: Zuerst beobachten wir einen Effekt, dann messen wir ihn und schreiben ihn in eine Tabelle; dann versuchen wir das *Gesetz* zu finden, durch das eine Größe mit der anderen verknüpft werden kann. Die obige numerische Tabelle wurde 140 n. Chr. aufgestellt, aber es dauerte bis 1621, bis schließlich jemand das Gesetz fand, das die beiden Winkel verknüpft! Das Gesetz, das von Willebrord Snellius, einem holländischen Mathematiker, gefunden wurde, lautet wie folgt: Wenn θ_i der Winkel in Luft und θ_r der Winkel im Wasser ist, dann kommt heraus, daß der Sinus von θ_i gleich irgendeiner Konstanten multipliziert mit dem Sinus von θ_r ist:

$$\sin\theta_i = n\sin\theta_r. \tag{26.2}$$

Für Wasser beträgt die Zahl n ungefähr 1,33. Gleichung (26.2) wird das *Gesetz von Snellius* genannt; es ermöglicht uns, *vorherzusagen*, wie das Licht gebrochen wird, wenn es aus der Luft ins Wasser dringt. Tabelle 26–2 zeigt die Winkel in Luft und in Wasser gemäß dem Gesetz von Snellius. Man beachte die bemerkenswerte Übereinstimmung mit der Liste von Ptolemäus.

26–3 Das Fermatsche Prinzip der kürzesten Zeit

Nun wollen wir in der weiteren Entwicklung der Wissenschaft mehr als eben nur eine Formel. Zuerst haben wir eine Beobachtung, dann haben wir Zahlen, die wir messen, dann haben wir ein Gesetz, welches alle Zahlen zusammenfaßt. Aber der wirkliche *Triumph* der Wissenschaft besteht darin, daß wir *einen solchen Gedankenweg finden können*, daß das Gesetz *einleuchtend* erscheint.

Der erste Gedankenweg, der das Gesetz über das Verhalten des Lichts einleuchtend darstellte, wurde von Fermat etwa um 1650 gefunden, und er wird als *Prinzip der kürzesten Zeit* oder als *Fermatsches Prinzip* bezeichnet. Seine Idee ist diese: Von allen möglichen Wegen, die das Licht nehmen könnte, um von einem Punkt zu einem anderen zu gelangen, nimmt es den Weg, der die *kürzeste Zeit* erfordert.

Wir wollen zuerst zeigen, daß dies richtig ist für den Fall des Spiegels, daß dies einfache Prinzip beides, das Gesetz der geradlinigen Ausbreitung und das Spiegelgesetz, enthält. So wächst unser Verständnis! Wir wollen versuchen, die Lösung für das folgende Problem zu finden. In Fig. 26–3 werden zwei Punkte A und B und ein ebener Spiegel MM' gezeigt. Welches ist der Weg, um von A in der kürzesten Zeit

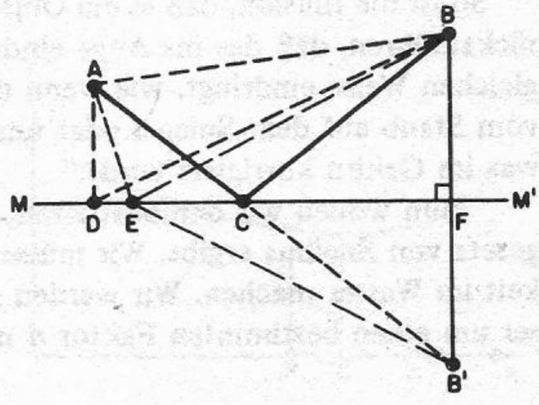


Fig. 26–3. Darstellung des Prinzips der kürzesten Zeit.

nach B zu gelangen? Die Antwort ist, direkt von A nach B zu gehen! Wenn wir aber die zusätzliche Forderung einführen, daß das Licht den *Spiegel treffen* und in der kürzesten Zeit zurückkommen muß, ist die Antwort nicht so leicht. Eine Möglichkeit wäre, auf dem Weg ADB so schnell wie möglich zum Spiegel und dann nach B zu gehen. Natürlich haben wir dann einen langen Weg DB. Wenn wir etwas nach rechts, nach E, gehen, vergrößern wir etwas die erste Entfernung, *verkleinern* aber stark die zweite und so die gesamte Weglänge, und deshalb ist die Laufzeit geringer. Wie können wir den Punkt C finden, für den die Zeit am kürzesten ist? Wir können ihn sehr elegant durch einen geometrischen Trick finden.

Wir konstruieren auf der anderen Seite von MM' einen künstlichen Punkt B', der in der gleichen Entfernung unterhalb der Ebene MM' wie der Punkt B oberhalb der Ebene liegt. Dann ziehen wir die Linie EB'. Weil BFM ein rechter Winkel und $BF = FB'$ ist, ist nun EB gleich EB'. Deshalb ist die Summe der beiden Entfernungen $AE + EB$, die proportional zur benötigten Zeit ist, wenn sich das Licht mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, auch die Summe der beiden Strecken $AE + EB'$. Daher heißt jetzt das Problem: Wann ist die Summe dieser beiden Strecken am kleinsten? Die Antwort ist leicht: Wenn die Linie durch den Punkt C als *gerade Linie* von A nach B' geht! Mit anderen Worten, wir müssen den Punkt finden, wo wir in Richtung auf den künstlichen Punkt gehen, und das wird der richtige sein. Wenn nun ACB' eine gerade Linie ist, ist der Winkel BCF gleich dem Winkel $B'CF$ und deshalb gleich dem Winkel ACM. So ist die Aussage, daß der Einfallswinkel gleich dem Reflexionswinkel ist, gleichbedeutend mit der Aussage, daß das Licht sich in der Weise zum Spiegel bewegt, daß es in der *kürzesten Zeit* zum Punkt B zurückkommt. Ursprünglich wurde die Darstellung, das Licht bewege sich in der Weise, daß es zum Spiegel und zu dem anderen Punkt auf dem kürzesten *Weg* gelangt, von Heron von Alexandrien gegeben; es ist also keine moderne Theorie. Dies war es, was Fermat inspirierte, sich zu sagen, daß die Brechung vielleicht auf einer ähnlichen Grundlage arbeitet. Aber bei der Brechung benutzt das Licht augenscheinlich nicht den Weg der kürzesten *Entfernung*, so versuchte es Fermat mit der Idee, daß es den der kürzesten *Zeit* nimmt.

Bevor wir dazu übergehen, die Brechung zu untersuchen, sollten wir eine weitere Bemerkung über den Spiegel machen. Wenn wir eine Lichtquelle im Punkt B haben und sie Licht zum Spiegel aussendet, dann sehen wir, daß das Licht, das nach A vom Punkt B geht, nach A in genau der gleichen Weise gelangt, wie es bei Vorhandensein eines Objektes in B' *ohne* Spiegel nach A gelangt wäre. Natürlich empfängt das Auge nur das Licht, welches physikalisch eindringt; wenn wir also ein Objekt in B und einen Spiegel haben, der das Licht in genau der gleichen Weise in das Auge eindringen läßt, als wenn es bei Vorhandensein des Objektes in B' in das Auge gekommen wäre, dann deutet das Auge-Gehirn-System dies, angenommen, es weiß nicht zuviel, als Vorhandensein eines Objekts in B'.

So ist die Illusion, daß es ein Objekt hinter dem Spiegel gibt, nur auf die Tatsache zurückzuführen, daß das ins Auge eindringende Licht physikalisch gesehen in genau der gleichen Weise eindringt, wie wenn dort hinten ein Objekt *gewesen* wäre (abgesehen vom Staub auf dem Spiegel oder unserer Kenntnis von der Existenz des Spiegels usw., was im Gehirn korrigiert wird).

Nun wollen wir demonstrieren, daß das Prinzip der kürzesten Zeit das Brechungsgesetz von Snellius ergibt. Wir müssen jedoch eine Annahme über die Lichtgeschwindigkeit im Wasser machen. Wir werden annehmen, daß die Lichtgeschwindigkeit im Wasser um einen bestimmten Faktor n niedriger als die Lichtgeschwindigkeit in Luft ist.

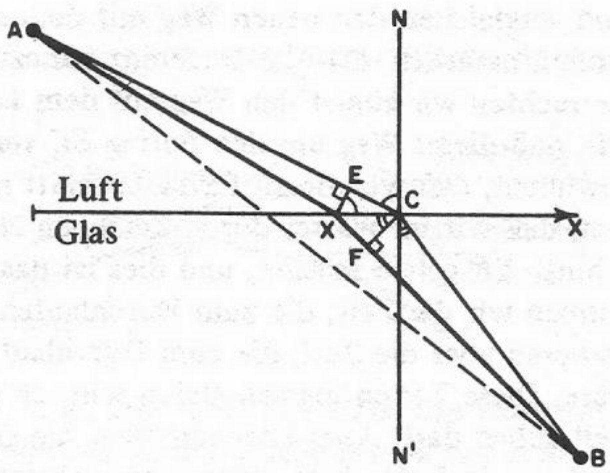


Fig. 26–4. Darstellung des Fermatschen Prinzips bei der Brechung.

In Fig. 26–4 ist es wieder unser Problem, in *der kürzesten Zeit* von *A* nach *B* zu kommen. Um zu illustrieren, daß es nicht das beste ist, einfach in einer geraden Linie zu gehen, wollen wir uns vorstellen, daß ein hübsches Mädchen aus einem Boot gefallen ist und im Wasser bei Punkt *B* um Hilfe schreit. Die durch *X* markierte Linie ist die Uferlinie. Wir sind bei Punkt *A* auf dem Land, und wir sehen das Unglück, und wir können laufen und können auch schwimmen. Aber wir können schneller laufen als schwimmen. Was sollen wir tun? Bewegen wir uns in einer geraden Linie? (Ja, ohne Zweifel!) Wenn wir jedoch etwas mehr Verstand gebrauchen würden, würden wir bemerken, daß es günstig wäre, eine etwas größere Entfernung auf dem Land zurückzulegen, um die Entfernung im Wasser zu verkleinern, da wir uns im Wasser so viel langsamer bewegen. (Bei Verfolgung dieser Schlußweise würden wir sagen, das richtige Handeln wäre ein sorgfältiges *Berechnen* dessen, was getan werden sollte!) Wenigstens wollen wir versuchen, zu zeigen, daß die abschließende Lösung dieses Problems der Weg *ACB* ist und daß dieser Weg von allen möglichen Wegen die kürzeste Zeit benötigt. Wenn es der kürzeste Weg ist, heißt das, daß es länger dauern wird, wenn wir irgendeinen anderen nehmen.

Falls wir also die benötigte Zeit über der Lage des Punktes *X* auftragen sollten, würden wir eine Kurve etwa wie die in Fig. 26–5 erhalten, wo der Punkt *C* der kürzesten aller möglichen Zeiten entspricht. Dies bedeutet, daß in erster Näherung *keine* wesentliche *Änderung* der Zeit auftritt, wenn wir den Punkt *X* in die Nähe von *C* verschieben, da die Steigung im Minimum der Kurve Null ist. So wird unser Weg zum Auffinden des Gesetzes aus der Überlegung bestehen, daß wir den Punkt um einen sehr kleinen Betrag verschieben, und aus der Forderung, daß dabei im wesentlichen keine Änderung der Zeit auftritt. (Natürlich gibt es eine infinitesimale Änderung von einer *zweiten* Ordnung; wir sollten ein positives Ansteigen für Verschiebungen in beiden Richtungen von *C* erhalten.) So betrachten wir einen nahegelegenen Punkt *X* und berechnen, wie lange es dauern würde, von *A* nach *B* über die zwei Wege zu gelangen,

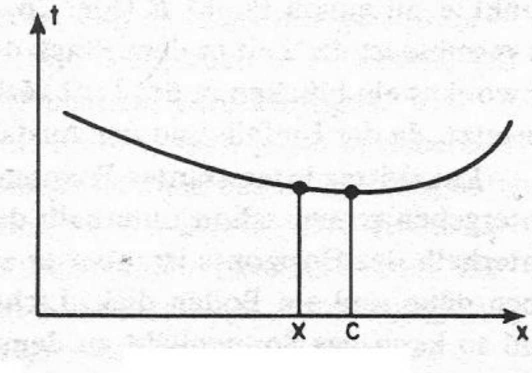


Fig. 26–5. Die minimale Zeit entspricht dem Punkt *C*, aber nahe gelegene Punkte entsprechen fast derselben Zeit.

und vergleichen den neuen Weg mit dem alten. Das ist sehr leicht auszuführen. Wir wollen natürlich, daß die Differenz nahezu Null ist, wenn die Entfernung XC klein ist. Betrachten wir zuerst den Weg auf dem Land. Wenn wir ein Lot XE zeichnen, sehen wir, daß dieser Weg um den Betrag EC verkürzt ist. Wir wollen sagen, daß wir dadurch gewinnen, daß wir diesen Extraabschnitt nicht gehen müssen. Andererseits stellen wir fest, daß wir im Wasser durch Zeichnen eines entsprechenden Lots CF den Extraabschnitt XF gehen müssen, und dies ist das, was wir verlieren. Oder *zeitlich* gesehen gewinnen wir die Zeit, die zum Durchlaufen der Entfernung EC verbraucht worden wäre, verlieren aber die Zeit, die zum Durchlaufen der Entfernung XF verbraucht worden wäre. Diese Zeiten müssen gleich sein, da es in erster Näherung keine Änderung der Zeit geben darf. Aber angenommen, die Geschwindigkeit im Wasser ist $1/n$ mal so groß wie in Luft, dann müssen wir erhalten

$$EC = n \cdot XF. \tag{26.3}$$

Deshalb sehen wir, wenn wir den richtigen Punkt haben, daß $XC \sin EXC = n \cdot XC \sin XCF$ gilt oder daß wir bei Streichung der gemeinsamen Hypothenusenlänge XC und unter Beachtung von

$$EXC = ECN = \theta_i \quad \text{und} \quad XCF = BCN' = \theta_r,$$

jetzt

$$\sin\theta_i = n \sin\theta_r. \tag{26.4}$$

erhalten.

So sehen wir, daß das Licht, um in der kürzesten Zeit von einem Punkt zu einem anderen zu gelangen, wenn das Verhältnis der Geschwindigkeit n ist, unter solch einem Winkel eindringen sollte, daß das Verhältnis der Sinusse der Winkel θ_i und θ_r das Verhältnis der Geschwindigkeiten in den beiden Medien ist.

26–4 Anwendungen des Fermatschen Prinzips

Nun wollen wir einige der interessantesten Folgerungen aus dem Prinzip der kürzesten Zeit betrachten. Die erste ist das Prinzip der Umkehrbarkeit. Wenn wir, um von A nach B zu gehen, den Weg der minimalen Zeit gefunden haben, wird in umgekehrter Richtung (angenommen, das Licht breitet sich in jede Richtung mit derselben Geschwindigkeit aus) die kürzeste Zeit zum selben Weg gehören, und deshalb kann Licht, wenn es in eine Richtung geschickt werden kann, auch in die andere Richtung geschickt werden.

Ein interessantes Beispiel ist ein Glasblock mit planparallelen Flächen, der unter einem Winkel in einen Lichtstrahl gestellt wird. Beim Durchqueren des Blocks von einem Punkt A zu einem Punkt B (Fig. 26–6) geht Licht nicht geradlinig hindurch, sondern es vermindert die Zeit in dem Block dadurch, daß der Winkel im Block weniger spitz ist, obwohl es ein bißchen in der Luft verliert. Der Strahl wird einfach parallel zu sich selbst versetzt, da der Einfall- und der Ausfallwinkel gleich sind.

Ein drittes interessantes Phänomen ist die Tatsache, daß die Sonne, wenn wir sie untergehen sehen, schon unterhalb des Horizonts ist! Es sieht nicht so aus, als ob sie unterhalb des Horizonts ist, aber es stimmt (Fig. 26–7). Die Atmosphäre der Erde ist oben dünn und am Boden dick. Licht bewegt sich langsamer in Luft als im Vakuum, und so kann das Sonnenlicht zu dem Punkt S unterhalb des Horizonts schneller gelan-

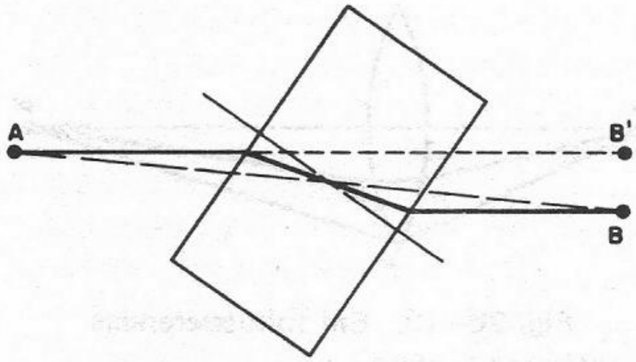


Fig. 26–6. Ein Lichtstrahl wird beim Durchqueren eines transparenten Blocks versetzt.

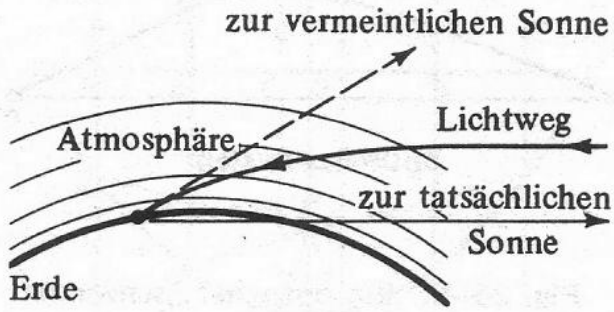
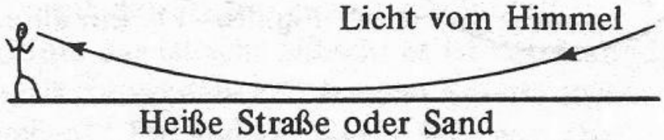


Fig. 26–7. In der Nähe des Horizonts steht die vermeintliche Sonne um etwa 1/2 Grad höher als die tatsächliche Sonne.

gen, wenn es, statt genau in einer geraden Linie zu gehen, die dichten Regionen, wo es langsam vorankommt, dadurch meidet, daß es sie unter einem spitzeren Winkel durchquert. Wenn sie unterzugehen scheint, ist sie tatsächlich schon lange unter dem Horizont. Ein anderes Beispiel für dieses Phänomen ist die Luftspiegelung, die man oft beim Fahren auf heißen Straßen sieht. Man sieht „Wasser" auf der Straße, aber wenn man dort ankommt, ist es so trocken wie in der Wüste! Das Phänomen ist das folgende. Was wir wirklich sehen, ist das „reflektierte" Himmelslicht auf der Straße: Licht vom Himmel, das sich in Richtung auf die Straße bewegt, wie in Fig. 26–8 gezeigt, kann in das Auge gelangen. Warum? Die Luft ist genau über der Straße sehr heiß, weiter oben aber kälter. Heißere Luft ist stärker ausgedehnt und dünner als kältere Luft, und dies vermindert die Lichtgeschwindigkeit weniger. Man kann auch sagen, daß Licht sich schneller in der heißen Region ausbreitet als in der kalten. Deshalb hat das Licht, statt sich für den geradlinigen Weg zu entscheiden, auch einen Weg der kürzesten Zeit, auf dem es in die Region geht, wo es für eine Weile schneller vorankommt, um Zeit zu sparen. So kann es sich entlang einer Kurve bewegen.

Fig. 26–8. Eine Luftspiegelung.



Als ein weiteres wichtiges Beispiel für das Prinzip der kürzesten Zeit sei angenommen, daß wir eine Situation konstruieren wollen, in der alles Licht, das von einem Punkt P kommt, wieder in einem anderen Punkt P' gesammelt wird (Fig. 26–9). Das bedeutet natürlich, daß das Licht in einer geraden Linie von P nach P' gehen kann. Das ist in Ordnung. Aber wie können wir es arrangieren, daß es nicht nur geradlinig läuft, sondern auch so, daß das von P nach Q loslaufende Licht auch in P' landet? Wir wollen alles Licht in etwas, was wir einen ***Brennpunkt*** nennen, zurückbringen. Wie? Wenn das Licht immer den Weg der schnellsten Ankunft nimmt, dann sollte es sicherlich nicht über all diese anderen Wege gehen wollen. Die einzige Lösung, das Licht völlig zufriedenzustellen, wenn es mehrere angrenzende Wege nimmt, ist, die Zeiten *exakt gleich* zu machen! Sonst würde es den einen der schnellsten Ankunft wählen. Deshalb besteht die Aufgabe, ein fokussierendes System zu machen, nur im Aufbauen einer Anordnung, so daß das Licht beim Durchlaufen *aller* verschiedenen Wege dieselbe Zeit benötigt.

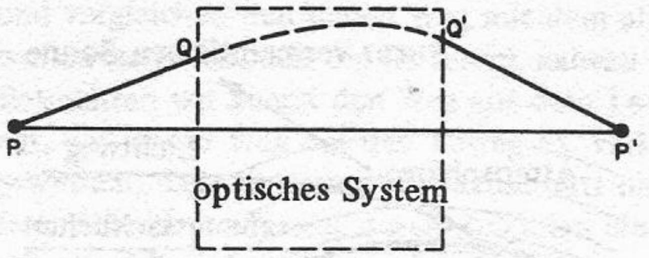


Fig. 26–9. Ein optischer „schwarzer Kasten".

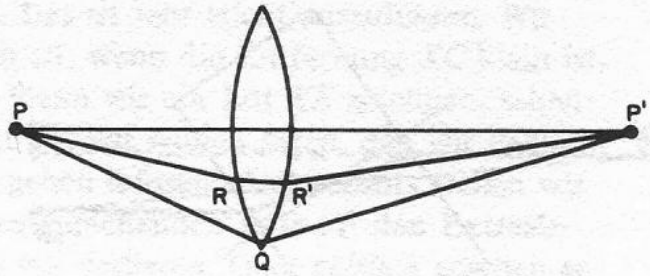


Fig. 26–10. Ein fokussierendes optisches System.

Das läßt sich leicht ausführen. Angenommen, wir hätten ein Stück Glas, in welchem das Licht sich langsamer ausbreitet als in Luft (Fig. 26–10). Man betrachte nun einen Strahl, der in Luft entlang des Weges *PQP'* läuft. Dies ist ein längerer Weg als direkt von *P* nach *P'* und benötigt ohne Zweifel längere Zeit. Aber wenn wir ein Glasstück von gerade der richtigen Dicke (wir werden später herausfinden wie dick) hineinstellen würden, könnte es genau den Zeitüberschuß kompensieren, den das Licht bei Ausbreitung unter einem Winkel benötigen würde! Unter diesen Umständen können wir es einrichten, daß die Zeit, die das Licht beim geradlinigen Durchqueren benötigt, dieselbe ist wie die Zeit, die auf der Strecke *PQP'* gebraucht wird. Desgleichen, wenn wir einen Strahl *PRR'P'* nehmen, der teilweise geneigt ist; er ist nicht so lang wie *PQP'* und wir brauchen nicht so viel wie bei der geraden Linie zu kompensieren, aber etwas müssen wir kompensieren. Wir gelangen so zu einem Stück Glas, das wie in Fig. 26–10 aussieht. Bei dieser Form wird alles Licht, das von *P* kommt, nach *P'* gelangen. Dies ist uns natürlich wohlbekannt, und wir nennen solch eine Anordnung eine Sammel*linse*. Im nächsten Kapitel werden wir dann wirklich berechnen, welche Form die Linse haben muß, um einen vollkommenen Brennpunkt zu erzeugen.

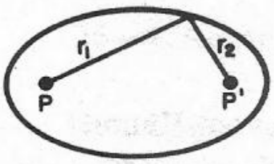


Fig. 26–11. Ein elliptischer Spiegel.

Nehmen wir ein anderes Beispiel: Angenommen, wir wollen einige Spiegel so anordnen, daß das Licht von *P* immer nach *P'* geht (Fig. 26–11). Auf jedem Weg geht es zu irgendeinem Spiegel und kommt zurück, und alle Zeiten müssen gleich sein. Hier bewegt sich das Licht immer in Luft, so sind die Zeit und der Abstand zueinander proportional. Deshalb ist die Aussage, daß alle Zeiten gleich sind, dasselbe wie die Aussage, daß die gesamte Entfernung gleich ist. So muß die Summe der beiden Abstände r_1 und r_2 eine Konstante sein. Eine *Ellipse* ist die Kurve, die die Eigenschaft hat, daß die Summe der Entfernungen von zwei Punkten für jeden Punkt auf der Ellipse eine Konstante ist; so können wir sicher sein, daß das Licht von einem Brennpunkt zum anderen kommen wird.

Dasselbe Prinzip dient zum Sammeln des Lichts eines Sterns. Das große 200-Zoll-Palomar-Teleskop ist nach dem folgenden Prinzip gebaut. Man stelle sich einen Stern vor, Milliarden von Meilen entfernt; wir würden gerne alles hereinkommende Licht dazu bringen, sich in einem Brennpunkt zu sammeln. Natürlich können wir die Strahlen, die ganz bis zum Stern hinaufgehen, nicht zeichnen, aber wir wollen doch prüfen, ob die Zeiten gleich

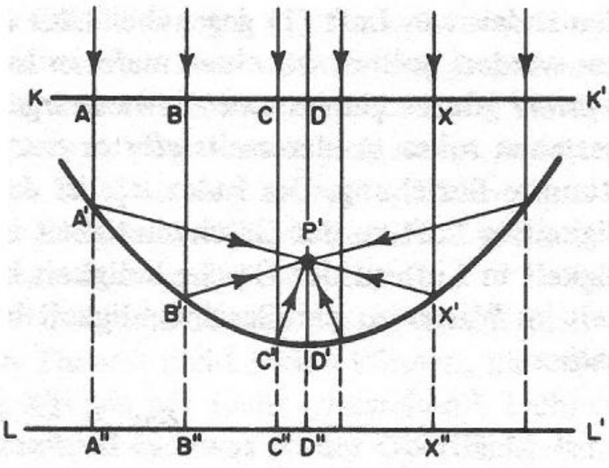


Fig. 26–12. Ein Parabolspiegel.

sind. Wir wissen natürlich, wenn die verschiedenen Strahlen in irgendeiner Ebene KK', die senkrecht zu den Strahlen liegt, angekommen sind, so sind alle Zeiten in dieser Ebene gleich (Fig. 26–12). Die Strahlen müssen dann in gleichen Zeiten zum Spiegel herunter laufen und zu P' gelangen. Das heißt, wir müssen eine Kurve finden, die die Eigenschaft hat, daß die Summe der Entfernungen $XX' + X'P'$ eine Konstante ist, ganz gleich, wo X gewählt wird. Ein leichter Weg, dieses zu finden, ist das Verlängern der Linie XX' bis hinunter zu einer Ebene LL'. Wenn wir jetzt unsere Kurve so legen, daß $A'A'' = A'P'$, $B'B'' = B'P'$, $C'C'' = C'P'$ usw., haben wir unsere Kurve, da dann natürlich $AA' + A'P' = AA' + A'A''$ konstant sein wird. So ist unsere Kurve der Ort aller Punkte mit gleichem Abstand zu einer Linie und zu einem Punkt. Solch eine Kurve wird als *Parabel* bezeichnet; der Spiegel wird in Form einer Parabel gefertigt.

Die obigen Beispiele veranschaulichen das Prinzip, nach dem solche optischen Geräte ausgelegt werden können. Die genauen Kurven können berechnet werden, indem das Prinzip angewendet wird, daß zur vollkommenen Fokussierung die Laufzeiten für alle Lichtstrahlen exakt gleich wie auch kleiner sein müssen als für irgendeinen anderen benachbarten Weg.

Wir werden diese fokussierenden optischen Geräte im nächsten Kapitel weiter besprechen; nun wollen wir über die weitere Entwicklung der Theorie diskutieren. Wenn ein neues theoretisches Prinzip entdeckt wird, wie das Prinzip der kürzesten Zeit, könnte unsere erste Regung sein zu sagen: „Nun, das ist sehr hübsch; es ist entzückend; aber die Frage ist, hilft es überhaupt, die Physik zu verstehen?“ Jemand könnte sagen: „Ja, sehen Sie, wieviele Dinge wir jetzt verstehen!“ Ein anderer sagt: „Sehr gut, aber ich kann Spiegel auch verstehen. Ich brauche eine Kurve, so daß jede Tangentialebene gleiche Winkel für die zwei Strahlen ergibt. Ich kann auch eine Linse konstruieren, da jeder ankommende Strahl unter einem Winkel gebrochen wird, der durch das Gesetz von Snellius gegeben ist.“ Offensichtlich ist die Aussage der kürzesten Zeit und die Aussage, daß Winkel bei der Reflexion gleich sind und daß die Sinusse der Winkel bei der Brechung proportional sind, dasselbe. Ist es also bloß eine philosophische Frage oder eine Frage der Schönheit? Man kann Argumente für beide Seiten finden.

Die Bedeutung eines weitreichenden Prinzips besteht jedoch darin, daß *es neue Dinge vorhersagt.*

Man kann leicht zeigen, daß es eine Reihe von neuen Dingen gibt, die vom Fermatschen Prinzip vorhergesagt wurden.

Zuerst nehme man an, daß *drei* Medien vorliegen, Glas, Wasser und Luft, und wir ein Brechungsexperiment ausführen und den Index n eines Mediums gegenüber dem anderen messen. Wir wollen den Index von Luft (1) gegenüber Wasser (2) n_{12} nennen;

den Index von Luft (1) gegenüber Glas (3) n_{13}. Wenn wir Wasser gegenüber Glas messen würden, sollten wir einen anderen Index finden, den wir n_{23} nennen werden. Aber *a priori* gibt es keinen Grund, wieso irgendeine Verbindung zwischen n_{12}, n_{13} und n_{23} bestehen sollte. Andererseits *gibt* es entsprechend der Idee der kürzesten Zeit eine bestimmte Beziehung. Der Index n_{12} ist das Verhältnis von zwei Größen, der Geschwindigkeit in Luft zu der Geschwindigkeit im Wasser; n_{13} ist das Verhältnis der Geschwindigkeit in Luft zu der Geschwindigkeit im Glas; n_{23} ist das Verhältnis der Geschwindigkeit im Wasser zu der Geschwindigkeit im Glas. Daher streichen wir die Luft und erhalten

$$n_{23} = \frac{v_2}{v_3} = \frac{v_1/v_3}{v_1/v_2} = \frac{n_{13}}{n_{12}}. \tag{26.5}$$

Mit anderen Worten, wir *sagen voraus,* daß der Index für ein neues Paar von Materialien aus den Indizes der einzelnen Materialien, beide gegenüber Luft oder gegenüber Vakuum, erhalten werden kann. Wenn wir also die Lichtgeschwindigkeit in allen Materialien messen und dadurch eine einzelne Zahl für jedes Material erhalten, nämlich seinen Index gegenüber Vakuum, der n_i genannt wird (n_1 ist die Geschwindigkeit in Luft bezogen auf die Geschwindigkeit im Vakuum usw.), dann ist unsere Formel einfach. Der Index für beliebige zwei Materialien i und j ist

$$n_{ij} = \frac{v_i}{v_j} = \frac{n_j}{n_i}. \tag{26.6}$$

Wenn wir nur das Gesetz von Snellius benutzen, gibt es keine Grundlage für eine Voraussage dieser Art.* Aber natürlich funktioniert diese Voraussage. Die Beziehung (26.5) war sehr früh bekannt und war ein starkes Argument für das Prinzip der kürzesten Zeit.

Ein anderes Argument für das Prinzip der kürzesten Zeit, eine andere Voraussage, ist, daß die Lichtgeschwindigkeit, wenn wir sie im Wasser *messen,* geringer sein wird als in Luft. Dies ist eine Voraussage völlig anderer Art. Es ist eine brillante Voraussage, weil alles, was wir bis jetzt gemessen haben, *Winkel* sind; hier haben wir eine theoretische Voraussage, die sehr verschieden von den Beobachtungen ist, aus denen Fermat die Idee von der kürzesten Zeit ableitete. Es stellt sich tatsächlich heraus, daß die Geschwindigkeit im Wasser geringer *ist* als die Geschwindigkeit in Luft, und zwar gerade in dem Verhältnis, welches nötig ist, um den richtigen Index zu erhalten!

26–5 Eine genauere Formulierung des Fermatschen Prinzips

In Wirklichkeit müssen wir die Aussage des Prinzips der kürzesten Zeit ein bißchen genauer formulieren. Es wurde oben nicht korrekt angegeben. Es wird *ungenau* das Prinzip der kürzesten Zeit genannt, und wir sind mit der ungenauen Beschreibung aus Bequemlichkeit fortgefahren, aber jetzt müssen wir sehen, wie die korrekte Darstellung ist. Angenommen, wir hätten einen Spiegel wie in Fig. 26–3. Was veranlaßt das Licht zu denken, daß es zum Spiegel gehen muß? Der Weg der *kürzesten* Zeit ist eindeutig *AB*. So könnten manche Leute sagen: „Manchmal ist es eine maximale Zeit". Es ist *nicht* eine maximale Zeit, weil ein gekrümmter Weg sicherlich eine noch längere Zeit erfordern

* Obwohl sie abgeleitet werden kann, wenn die zusätzliche Annahme gemacht wird, daß das Hinzufügen einer Schicht von einer Substanz auf die Oberfläche einer anderen den möglichen Brechungswinkel im Material nicht ändert.

würde! Die korrekte Aussage ist die folgende: Ein Strahl, der sich auf einem bestimmten speziellen Weg bewegt, hat die Eigenschaft, daß es bei einer kleinen Änderung (sagen wir einer einprozentigen Verschiebung) des Strahles in einer x-beliebigen Weise, sagen wir des Ortes, wo er auf den Spiegel trifft, oder der Kurvenform oder sonst irgend etwas, in erster Näherung *keine* Zeitänderung gibt; es gibt nur eine Zeitänderung in *zweiter* Näherung. Mit anderen Worten ist das Prinzip derart, daß das Licht einen Weg in der Weise nimmt, daß es nahebei viele andere Wege gibt, die fast exakt *dieselbe* Zeit benötigen.

Das folgende zeigt eine andere Schwierigkeit mit dem Prinzip der kürzesten Zeit, und zwar eine, die jene Leute, die diese Art von Theorie nicht leiden können, niemals verdauen konnten. Mit der Theorie von Snellius können wir Licht „verstehen". Licht breitet sich aus, sieht eine Oberfläche, bricht sich, weil es etwas an der Oberfläche tut. Der Gedanke der Kausalität, daß etwas von einem Punkt zum anderen geht und zu einem nächsten usw., ist leicht zu verstehen. Das Prinzip der kürzesten Zeit ist jedoch ein vollständig anderes philosophisches Prinzip der Arbeitsweise der Natur. Anstatt zu behaupten, daß es sich um einen kausalen Zusammenhang handelt, daß, wenn wir eine Sache tun, eine andere passiert usw., sagt dieses: Wir legen eine Situation fest, und das *Licht* entscheidet, welches die kürzeste Zeit oder die extreme Zeit ist und wählt diesen Weg. Aber *was* tut es, *wie* findet es dies heraus? *Riecht* es die nahegelegenen Wege und vergleicht sie miteinander? Die Antwort ist, ja, das tut es, sozusagen. Das ist eine Eigenschaft, die natürlich in der geometrischen Optik nicht bekannt ist und die mit der Idee der *Wellenlänge* zusammenhängt; die Wellenlänge sagt uns ungefähr, wie weit entfernt das Licht den Weg „riechen" muß, um ihn zu prüfen. Es ist schwierig, diesen Sachverhalt mit Licht in einem großen Maßstab zu demonstrieren, weil die Wellenlängen so schrecklich kurz sind. Aber bei Radiowellen, sagen wir bei 3-cm-Wellen, sind die Entfernungen, über die die Radiowellen prüfen, größer. Wenn wir einen Sender für Radiowellen, einen Empfänger und einen Spalt wie in Fig. 26–13 haben, gehen die Strahlen natürlich von S nach D, weil es eine gerade Linie ist, und wenn wir den Spalt zuschieben, ist alles in Ordnung – sie gehen immer noch. Aber wenn wir jetzt den Empfänger seitwärts nach D' schieben, werden die Wellen nicht durch den weiten Spalt von S nach D' gehen, weil sie einige Wege in der Nähe prüfen und sagen: „Nein, mein Freund, diese gehören alle zu verschiedenen Zeiten." Wenn wir andererseits durch Zuschieben des Spaltes zu einem sehr schmalen Schlitz *verhindern*, daß die Strahlung die Wege prüft, dann steht nur ein Weg zur Verfügung und die Strahlung nimmt ihn! Bei einem schmalen Spalt erreicht mehr Strahlung D' als bei einem weiten Spalt.

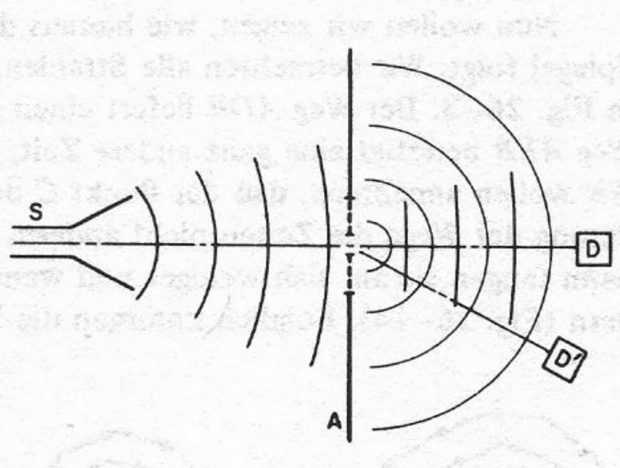


Fig. 26–13. Der Durchgang von Radiowellen durch einen schmalen Spalt.

Dasselbe kann man mit Licht ausführen, aber es ist schwer, es in großem Maßstab zu demonstrieren. Der Effekt kann unter den folgenden einfachen Bedingungen beobachtet werden. Man suche ein kleines helles Licht, sagen wir eine Klarglasbirne in einer weit entfernten Straßenlaterne oder den Reflex von der Sonne in einer gekrümmten Autostoßstange. Dann halte man zwei Finger vor ein Auge, um so durch den Spalt zu gucken, und drücke das Licht sehr langsam zu Null. Man wird beobachten, daß das Bild des Lichtes, welches vorher ein kleiner Punkt war, ganz gedehnt wird und sich sogar zu einer langen Linie streckt. Der Grund ist, daß die Finger sehr dicht zusammen sind und daß das Licht, welches entlang einer geraden Linie kommen sollte, über einen Winkelbereich verteilt wird, so daß es, wenn es in das Auge gelangt, aus verschiedenen Richtungen hereinkommt. Wenn man sehr sorgfältig ist, wird man außerdem auch Seitenmaxima, nämlich eine Schar von Streifen entlang den Kanten bemerken. Die ganze Erscheinung ist außerdem farbig. Dies alles wird zur rechten Zeit erklärt werden, im Moment ist es aber eine Demonstration, daß das Licht sich nicht immer in geraden Linien ausbreitet, und zwar eine, die sehr leicht auszuführen ist.

26–6 Wie es passiert

Zum Schluß geben wir einen sehr groben Überblick über das, was tatsächlich passiert, wie die ganze Sache wirklich abläuft, und zwar von dem heute als korrekt angesehenen, quantendynamisch genauen Standpunkt, aber natürlich nur qualitativ beschrieben. Wenn wir dem Licht von A nach B in Fig. 26–3 folgen, stellen wir fest, daß das Licht überhaupt nicht die Form von Wellen zu haben scheint. Stattdessen scheinen die Strahlen aus Photonen zu bestehen, und sie erzeugen tatsächlich Klicks in einem Photonenzähler, wenn wir einen benutzen. Die Helligkeit des Lichtes ist zur mittleren Zahl der Photonen, die pro Sekunde hereinkommen, proportional, und was wir berechnen ist die *Chance*, daß ein Photon von A nach B gelangt, sagen wir, indem es den Spiegel trifft. Das *Gesetz* für diese Chance ist das folgende, sehr ungewöhnlich anmutende. Man nehme irgendeinen Weg und bestimme die Zeit für diesen Weg; dann schreibe man eine komplexe Zahl oder zeichne einen kleinen komplexen Vektor $\rho e^{i\theta}$, *dessen Winkel θ proportional zur Zeit ist.* Die Zahl der Umdrehungen pro Sekunde ist die Frequenz des Lichtes. Nun nehme man einen anderen Weg; er hat z. B. eine andere Zeit, so daß der Vektor dafür um einen anderen Winkel gedreht ist – der Winkel bleibt immer proportional zur Zeit. Man nehme *alle* verfügbaren Wege und addiere für jeden einen kleinen Vektor hinzu; dann lautet die Antwort, daß die Chance einer Ankunft des Photons proportional zum Quadrat der Länge des resultierenden Vektors vom Anfang bis zum Ende ist!

Nun wollen wir zeigen, wie hieraus das Prinzip von der kürzesten Zeit für den Spiegel folgt. Wir betrachten alle Strahlen, alle möglichen Wege ADB, AEB, ACB usw. in Fig. 26–3. Der Weg ADB liefert einen gewissen kleinen Beitrag, aber der nächste Weg AEB benötigt eine ganz andere Zeit, also ist sein Winkel θ durchaus verschieden. Wir wollen annehmen, daß der Punkt C der kleinsten Zeit entspricht, wo sich bei Änderung der Wege die Zeiten nicht ändern. So ändern sich die Zeiten eine Zeitlang, dann fangen sie an, sich weniger und weniger zu ändern, wenn wir uns Punkt C nähern (Fig. 26–14). Folglich kommen die Pfeile, die wir addieren müssen, für kurze Zeit

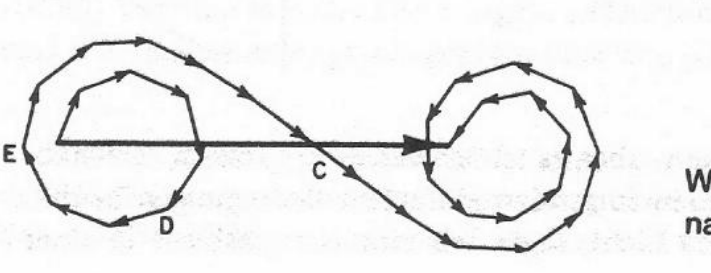


Fig. 26–14. Die Aufsummierung der Wahrscheinlichkeitsamplituden für viele benachbarte Wege.

nahe C unter fast genau demselben Winkel, und dann beginnt die Zeit wieder allmählich größer zu werden und die Phasen gehen in der anderen Richtung herum usw. Schließlich haben wir einen ganz engen Knoten. Die gesamte Wahrscheinlichkeit ist die Entfernung von einem Ende zum anderen im Quadrat. *Diese zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit tritt fast ganz in dem Gebiet auf, in dem alle Pfeile in dieselbe Richtung zeigen* (oder dieselbe Phase haben). Alle Beiträge der Wege, die sehr *verschiedene* Zeiten haben, wenn wir den Weg ändern, heben sich gegenseitig auf, indem sie in verschiedene Richtungen zeigen. Das ist der Grund, warum der Spiegel, wenn wir seine äußersten Teile abdecken, noch fast ebenso reflektiert, da wir nichts anderes getan haben, als ein Stück in den Spiralenden aus dem Diagramm herauszunehmen, und das ergibt nur eine sehr kleine Änderung des Lichtes. Dies ist so die Beziehung zwischen dem fundamentalen Photonenbild mit einer Ankunftswahrscheinlichkeit, die von einer Anhäufung von Pfeilen abhängt, und dem Prinzip der kürzesten Zeit.

27 Geometrische Optik

27–1 Einleitung

In diesem Kapitel werden wir einige elementare Anwendungen der Ideen des vorhergehenden Kapitels auf eine Anzahl praktischer Geräte diskutieren, indem wir die als *geometrische Optik* bezeichnete Näherung benutzen. Dies ist eine sehr nützliche Näherung bei der praktischen Auslegung vieler optischer Systeme und Instrumente. Die geometrische Optik ist entweder sehr einfach oder sie ist sehr kompliziert. Damit meinen wir, daß wir sie entweder nur oberflächlich studieren, so daß wir Instrumente im groben auslegen können, indem wir Gesetze anwenden, die so einfach sind, daß wir uns hier kaum mit ihnen beschäftigen müssen, da sie praktisch Lehrstoff der höheren Schule sind. Wenn wir andererseits etwas über die kleinen Linsenfehler und ähnliche Details wissen wollen, wird die Sache zu kompliziert, um sie hier zu diskutieren! Wenn jemand ein tatsächliches, detailliertes Problem der Linsenkonstruktion einschließlich der Untersuchungen von Aberrationen hat, dann sei ihm geraten, über dieses Thema zu lesen oder einfach die Strahlen durch die verschiedenen Oberflächen zu verfolgen (wie man dies macht, sagt das Buch), das Brechungsgesetz von einer Seite zur anderen anzuwenden und festzustellen, wo sie herauskommen und ob sie ein zufriedenstellendes Bild ergeben. Man hat gesagt, daß dies zu mühsam sei, aber heute, mit Rechenmaschinen, ist es der richtige Weg. Man kann das Problem aufstellen und die Rechnung für einen Strahl nach dem anderen sehr leicht ausführen. So ist die Sache schließlich wirklich ganz einfach und benützt keine neuen Prinzipien. Weiterhin stellt sich heraus, daß die Gesetze der elementaren wie auch der fortgeschrittenen Optik selten charakteristisch für andere Gebiete sind, so daß es keinen besonderen Grund gibt, das Thema sehr weit zu verfolgen, mit einer wichtigen Ausnahme.

27–7 Auflösungsvermögen

Eine andere interessante Frage – eine sehr wichtige technische Frage bei allen optischen Instrumenten – ist, welches *Auflösungsvermögen* sie haben. Wenn wir ein Mikroskop bauen, wollen wir die Objekte sehen, die wir uns anschauen. Das bedeutet z. B., wenn wir eine Bakterie mit einem Fleck an jedem Ende anschauen, wollen wir *sehen,* daß es zwei Punkte gibt, wenn wir sie vergrößern. Man könnte denken, daß alles, was wir zu tun haben, darin besteht, genügend Vergrößerung zu erhalten – wir können immer eine weitere Linse hinzufügen, und wir können immer wieder und wieder vergrößern, und mit der Schlauheit der Konstrukteure können alle sphärischen und chromatischen Aberrationen korrigiert werden, und es gibt keinen Grund, warum wir nicht mit der Vergrößerung des Bildes fortfahren können. Die Grenzen eines Mikroskops bestehen nicht darin, daß es unmöglich wäre, eine Linse zu bauen, die mehr als 2.000-fach vergrößert. Wir können ein Linsensystem bauen, das 10.000-fach vergrößert, aber wegen der Grenzen der geometrischen Optik, wegen der Tatsache, daß die schnellste Ankunft nicht präzise ist, könnten wir *dennoch* zwei Punkte nicht sehen, die zu dicht zusammenliegen.

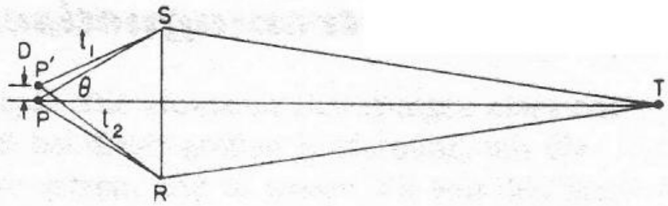


Fig. 27–9. Das Auflösungsvermögen eines optischen Systems.

Das Gesetz, das bestimmt, wie weit zwei Punkte voneinander entfernt sein müssen, damit sie im Bild als getrennte Punkte erscheinen, kann in sehr hübscher Weise im Zusammenhang mit der Zeit für verschiedene Strahlen formuliert werden. Angenommen, wir kümmern uns jetzt nicht um die Aberrationen und stellen uns vor, daß alle Strahlen für einen bestimmten Punkt P (Fig. 27–9) vom Objekt bis zum Bild T genau dieselbe Zeit brauchen. (Dies ist nicht richtig, weil es kein vollkommenes System ist, aber das ist ein anderes Problem.) Nun nehmen wir einen anderen nahe gelegenen Punkt P' und fragen, ob sein Bild sich von T unterscheiden wird. Mit anderen Worten, ob wir die Differenz zwischen ihnen feststellen können. Entsprechend der geometrischen Optik würden natürlich zwei Punktbilder entstehen, aber was wir sähen, würde ziemlich verwischt sein, und wir könnten vielleicht nicht erkennen, daß es dort zwei Punkte gibt. Die Bedingung, daß der zweite Punkt an einem vom ersten deutlich verschiedenen Ort fokussiert wird, besteht darin, daß die zwei Zeiten für die äußersten Strahlen $P'ST$ und $P'RT$ an jeder Seite der großen Linsenöffnung für die beiden möglichen Objektpunkte zu einem gegebenen Bildpunkt *nicht* gleich sein dürfen. Warum? Da, wenn die Zeiten gleich wären, beide natürlich auf denselben Punkt *fokussiert* würden. Deshalb werden die Zeiten nicht gleich sein. Aber um wieviel müssen sie sich unterscheiden, um sagen zu können, daß beide *nicht* in einen gemeinsamen Brennpunkt kommen, so daß wir die zwei Bildpunkte unterscheiden können? Das allgemeine Gesetz für die Auflösung eines jeden optischen Instrumentes ist dieses: Zwei verschiedene Punktquellen können nur aufgelöst werden, wenn eine Quelle in solch einen Punkt fokussiert wird, daß die Zeiten für die äußersten Strahlen, die diesen Punkt von der anderen Quelle erreichen, verglichen mit deren eigenem Bildpunkt sich um mehr als eine Periode unterscheiden. Es ist notwendig, daß der Zeitunterschied zwischen dem oberen und dem unteren Strahl zu dem *falschen* Brennpunkt einen gewissen Betrag übersteigt, nämlich ungefähr die Schwingungsperiode des Lichts:

$$t_2 - t_1 > 1/\nu, \tag{27.17}$$

wobei ν die Frequenz des Lichts ist (Zahl der Schwingungen pro Sekunde; ebenso Geschwindigkeit geteilt durch Wellenlänge). Wenn der Abstand der Trennung der beiden Punkte D und der Öffnungswinkel der Linse θ genannt wird, dann kann man zeigen, daß (27.17) genau der Behauptung entspricht, daß D größer als $\lambda/n \sin\theta$ ist, wobei n der Brechungsindex bei P und λ die Wellenlänge ist. Die kleinsten Dinge, die wir sehen können, entsprechen deshalb ungefähr der Lichtwellenlänge. Für Fernrohre* existiert eine entsprechende Formel, welche uns die kleinste Winkeldifferenz zwischen zwei Sternen angibt, die gerade noch unterschieden werden können.

* Der Winkel ist ungefähr λ/D, wobei D der Linsendurchmesser ist. Können Sie sehen warum?