

Wenn Licht auf Oberflächen trifft

Die Bestimmung der Größe von Himmelskörpern mit Hilfe von Streulicht

Monika Maintz

Planeten, Zwergplaneten und Kleinkörper im Sonnensystem wie Monde und Asteroiden erzeugen im Gegensatz zu den Sternen zwar selbst kein Licht, dennoch stellen wir fest, dass auch diese Körper leuchten. Der Grund ist, dass solche Objekte genau wie die Erde von der Sonne angestrahlt werden und einen Teil des einfallenden Sonnenlichts wieder in den Weltraum zurückstrahlen. Wie viel Licht sie reflektieren, hängt von ihrer Größe und der Beschaffenheit ihrer Oberfläche ab. So strahlt ein mit Eis überzogener Mond wie Europa einen sehr viel größeren Anteil des einfallenden Lichts ab als ein steiniger Asteroid mit dunkler Oberfläche. Das Verhältnis von reflektierter zu einfallender Strahlungsmenge, die Albedo, ist ein Maß für das Rückstrahlungsvermögen einer Oberfläche. Die Albedo kann sowohl für einzelne Materialien als auch für komplette reflektierende Himmelskörper bestimmt werden. Durch den Vergleich verschiedener Albedo-Werte kann man auf die Oberflächenbeschaffenheit der Himmelskörper schließen. Analog zur Helligkeitsmessung bei Sternen kann man die reflektierte Lichtmenge aber auch als eine Art „Leuchtkraft“ auffassen und damit die Größe der „im Streulicht leuchtenden Himmelskörper“ bestimmen. Wie das geht und welche Annahmen man dabei machen muss, wird anhand einer Rechenaufgabe erläutert.

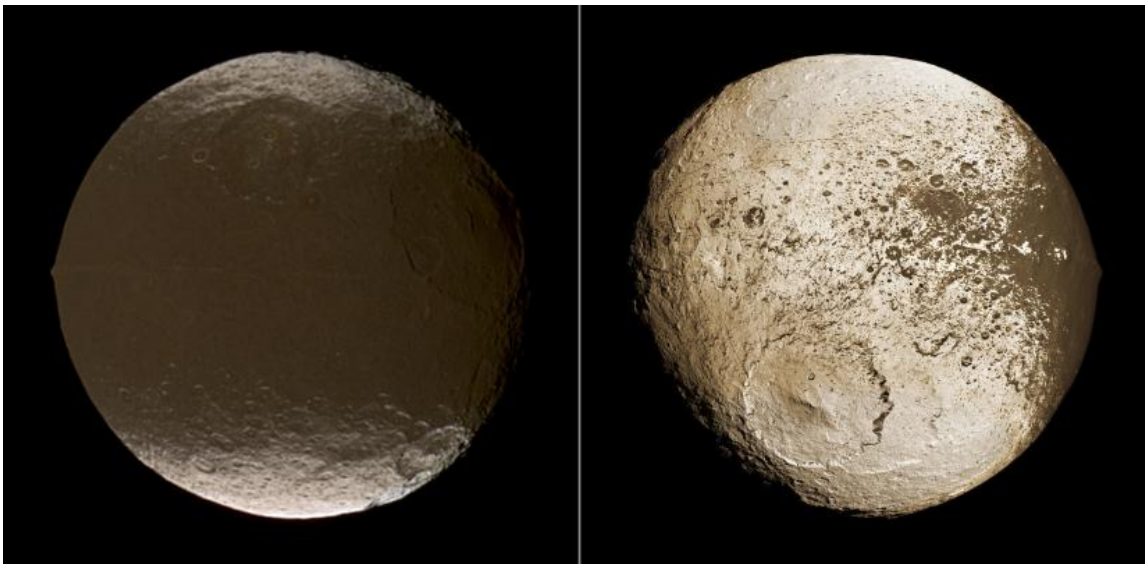


Abbildung 1: Die Oberfläche des Saturnmonds Iapetus weist extreme Helligkeitsunterschiede auf. Eine Seite erscheint fast schwarz, die andere dagegen leuchtend weiß. (Bild: NASA/JPL/Space Science Institute)

Übersicht der Bezüge im WIS-Beitrag		
Astronomie	Kleinkörper, Positions-astronomie, Astropraxis	Albedo (Rückstrahlungsvermögen), scheinbare Helligkeit, Entfernungsbestimmung, Radiusbestimmung
Physik	Optik, Thermodynamik	Spiegelnde und diffuse Reflexion (Lichtstreuung), Strahlungsstrom, Strahlungsleistung, Beleuchtungsstärke
Fächerverknüpfung	Astro-Ma	Kugeloberfläche
Lehre allgemein	Kompetenzen: Erkenntnis und Fachwissen	Abschätzungen, Entwickeln und Anwenden von Modellvorstellungen, Umgang mit Tabellen

Begriffe aus der Optik

Spiegelung (spiegelnde Reflexion): Licht, das auf spiegelnde Oberflächen fällt, wird nur in bestimmte Richtungen reflektiert (gespiegelt) gemäß „Einfallswinkel = Ausfallswinkel“.

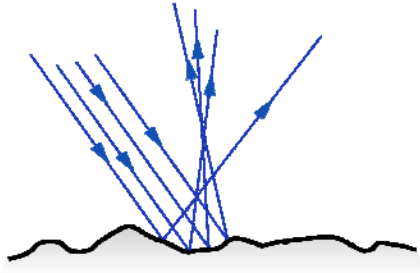


Abbildung 2: Licht, das auf eine unebene Oberfläche fällt, wird in beliebige Richtungen reflektiert, d.h. es wird diffus reflektiert (gestreut). (Bild: Wikipedia)

Diffuse Reflexion: Wenn Licht auf unebene Oberflächen fällt, wird es in *beliebige* Richtungen reflektiert (gestreut). Man nennt diesen Vorgang diffuse Reflexion (Abb. 2).

Rückstrahlungsvermögen: Wie viel von dem einfallenden Licht von einer Oberfläche reflektiert wird, hängt vom Material und der Beschaffenheit der Oberfläche ab.

Reflektiert eine Oberfläche einen großen Anteil des eingestrahnten Lichts, so hat sie ein hohes Rückstrahlungsvermögen. Oberflächen, die nur wenig Licht reflektieren, haben dagegen nur ein geringes Rückstrahlungsvermögen.

Will man das Rückstrahlungsvermögen von Oberflächen quantifizieren, muss man das Verhältnis der reflektierten zur eingestrahnten Lichtmenge (die Albedo) betrachten.

Albedo: Die Albedo, A , ist das Maß für das Rückstrahlungsvermögen von nicht selbstleuchtenden, diffus reflektierenden Oberflächen. (Die Bezeichnung kommt aus dem Lateinischen und bedeutet soviel wie „Weißheit“ oder „weiße Farbe“.)

Da sie vom Material und von der Beschaffenheit der bestrahlten Oberfläche bestimmt wird, kann man mit ihrer Hilfe auf die Eigenschaften der diffus streuenden Materie und somit auf das Oberflächenmaterial selbst schließen. Definiert ist die Albedo A als Quotient aus reflektierter und eingestrahelter Lichtmenge:

$$A = \text{reflektierte Lichtmenge} / \text{eingestrahelte Lichtmenge}$$

Die Albedo ist dimensionslos und wird meist in Prozent angegeben. Aus der Definition folgt, dass Oberflächen, die sehr wenig Licht reflektieren, eine kleine Albedo haben. Bei Oberflächen, die sehr viel Licht reflektieren, ist die Albedo dagegen groß.

Die Albedo kann Werte zwischen 1 bzw. 100% (das gesamte eingestrahelte Licht wird reflektiert) und 0 bzw. 0% (kein Licht wird reflektiert) haben. In Tabelle 1 sind Werte für die Albedo verschiedener Materialien aufgelistet.

Tabelle 1: Albedo-Werte für verschiedene Materialien (Quelle: Wikipedia, www.atmosphere.mpg.de)

Material	Albedo	Material	Albedo
Neuschnee	0,8 - 0,85	Wüste	0,3
Alter Schnee	0,5 - 0,6	Gras	0,2 - 0,25
Wolken	0,6 - 0,9	Wald	0,05 - 0,1
Wasserflächen	0,03 - 0,1	Asphalt	0,15

Begriffe aus der Strahlungstheorie und Astrophysik

Strahlungsleistung, s : Energiemenge Q , die pro Zeiteinheit t (1 Sekunde) durch Strahlung übertragen wird; gemessen in Joule pro Sekunde = Watt (1 J/s = 1 W):

$$s = Q / t \quad \text{(Gleichung 1)}$$

Strahlungsstrom, F : Strahlungsmenge (Energiemenge Q), die pro Zeiteinheit t (1 Sekunde) durch eine Einheitsfläche A (1 cm² oder 1 m²) hindurchgeht, oder anders formuliert: Strahlungsleistung s bezogen auf eine Einheitsfläche A ; gemessen in Joule pro Sekunde pro Meter² = Watt pro Meter² (1 (J/s) / m² = 1 W/m²):

$$F = (Q/t) / A = s / A \quad \text{(Gleichung 2)}$$

Leuchtkraft, L : Gesamtstrahlungsleistung eines leuchtenden Körpers, d.h. Strahlungsmenge (Energiemenge Q), die ein leuchtender Körper mit dem Radius R pro Zeiteinheit t (1 Sekunde) von seiner Oberfläche ($4 \pi R^2$) in den gesamten Raum abstrahlt; gemessen in Meter² mal Watt pro Meter² = Watt (1 m²·W/m² = 1 W):

$$L = 4 \pi R^2 F \quad \text{(Gleichung 3)}$$

Bestrahlungsstärke, E : Strahlungsmenge (Energiemenge Q), die in der Entfernung r (m oder km) pro Zeiteinheit t (1 Sekunde) senkrecht auf eine Einheitsfläche A (1 cm² oder 1 m²) auftrifft; gemessen in Watt pro Meter² (W/m²):

$$E = L / 4 \pi r^2 \quad \text{(Gleichung 4)}$$

Aus der Gleichung folgt, dass sich die Gesamtstrahlungsleistung eines leuchtenden Körpers in der Entfernung r gleichmäßig über eine Kugeloberfläche der Größe $4 \pi r^2$ verteilt. Außerdem nimmt die Bestrahlungsstärke mit zunehmender Entfernung der Lichtquelle ab.

Solarkonstante, S_E : Menge der Sonnenstrahlung (Energiemenge Q), die in der Entfernung $r_E = 1 \text{ AE}^1$ (mittlere Entfernung Erde – Sonne) pro Zeiteinheit t (1 Sekunde) senkrecht auf eine Einheitsfläche A (1 cm² oder 1 m²) auftrifft, also die durch die Strahlung der Sonne hervorgerufene Bestrahlungsstärke in Erdentfernung (gemessen in W/m²). Die Solarkonstante wird außerhalb der Erdatmosphäre gemessen und entspricht der Energiemenge, die senkrecht pro m² auf die Erdatmosphäre auftrifft (siehe Tabelle 3):

$$S_E = L_{\text{Sonne}} / 4 \pi r_E^2 \quad \text{(Gleichung 5)}$$

Scheinbare Helligkeit, m : Helligkeit, mit der uns ein Himmelskörper erscheint; gemessen in der Einheit „Größenklasse“ bzw. „Magnitude“ (mag). Objekte, die die scheinbaren Helligkeiten m_1 und m_2 haben, rufen in Erdentfernung die Bestrahlungsstärken E_1 und E_2 hervor. Scheinbare Helligkeit und Bestrahlungsstärke stehen in folgendem Zusammenhang:

$$m_1 - m_2 = -2,5 \text{ mag} \cdot \log (E_1 / E_2) \quad \text{(Gleichung 6)}$$

Mit Hilfe dieser Gleichung kann man scheinbare Helligkeiten bzw. Bestrahlungsstärken berechnen.

1 AE: Astronomische Einheit (engl.: Astronomical Unit, AU), 1 AE = 149,6·10⁶ km. Dies entspricht ungefähr dem mittleren Abstand Erde - Sonne, und damit der großen Halbachse der Erdumlaufbahn bzw. dem mittleren Bahnradius der Erde, siehe auch Tabelle 3.

Aufgabe

Schätze den Durchmesser des Saturnmonds *Iapetus* mit Hilfe der in Tabelle 2 und 3 gegebenen Werte ab. Überlege, ob es sinnvoll ist, für die physikalischen Größen Mittelwerte zu verwenden. Begründe deine Überlegung. Stimmen der Literaturwert und der berechnete Wert überein? Was sagt das Ergebnis über die Qualität der zugrunde gelegten Annahmen aus?

Fragen, deren Beantwortung bei der Bearbeitung der Aufgabe weiterhelfen:

- a) Überlege, wie man mit Hilfe der Bestrahlungsstärke (Gl. 4) und der Solarkonstanten (Gl. 5) eine Leuchtkraft für Iapetus definieren kann. Wodurch wird diese Leuchtkraft hervorgerufen? Warum braucht man hierzu die Albedo der Oberfläche von Iapetus?
- b) Wie sollten Iapetus, die Sonne und die Erde idealerweise im Verhältnis zueinander stehen und welche Entfernungen sollte man für eine möglichst gute Abschätzung verwenden?
- c) Warum kann man mit Hilfe der Leuchtkraft (Gl. 3) den Radius eines leuchtenden Körpers bestimmen?
- d) Wie hängen die Bestrahlungsstärke (Gl. 4) und die scheinbare Helligkeit (Gl. 6) leuchtender Körper physikalisch zusammen? Wie kann man diesen Zusammenhang nutzen, um den Radius des leuchtenden Körpers zu bestimmen?

Lösung

Die von Iapetus reflektierte Sonnenstrahlung kann man als Leuchtkraft (L_{Iapetus}) auffassen. Um diese Leuchtkraft zu berechnen, muss man wissen, wie viel Sonnenlicht auf den Saturnmond auftrifft und welchen Anteil er davon wieder in den Weltraum zurückstrahlt. Als Entfernung Sonne-Iapetus verwendet man sinnvollerweise den mittleren Abstand zwischen den beiden Himmelskörpern (Abb. 3). Dadurch kann man auch für andere Größen wie die scheinbare Helligkeit oder die Albedo Mittelwerte verwenden und so die Abschätzung vereinfachen.

Die Menge an Sonnenstrahlung, die auf Iapetus auftrifft, wird durch die Bestrahlungsstärke S_{Saturn} bestimmt (Gl. 4), die in Saturnentfernung, r_S , (= mittlere Entfernung Sonne-Iapetus, siehe Tab. 3) gemessen werden kann:

$$S_{\text{Saturn}} = E_{\text{Sonne} \rightarrow \text{Saturn}} = L_{\text{Sonne}} / 4 \pi r_S^2$$

Um S_{Saturn} bestimmen zu können, setzt man diese Gleichung in Beziehung zur Gleichung für die Bestrahlungsstärke in Erdentfernung, deren Wert wir als Solarkonstante S_E kennen (Tab. 3):

$$S_E = E_{\text{Sonne} \rightarrow \text{Erde}} = L_{\text{Sonne}} / 4 \pi r_E^2 = 1,37 \cdot 10^3 \text{ W/m}^2$$

Daraus erhält man einen Ausdruck für S_{Saturn} :

$$S_{\text{Saturn}}/S_E = (L_{\text{Sonne}} / 4 \pi r_S^2) / (L_{\text{Sonne}} / 4 \pi r_E^2) = r_E^2/r_S^2 = (r_E/r_S)^2$$

$$S_{\text{Saturn}} = S_E (r_E/r_S)^2$$

Um aus der eingestrahlenen Lichtmenge S_{Saturn} den Strahlungsstrom F_{Iapetus} zu bestimmen, der pro m^2 Oberfläche von Iapetus reflektiert wird, muss man die eingestrahlte Lichtmenge S_{Saturn} mit der Albedo der Mondoberfläche multiplizieren. Da der Saturnmond sehr große Helligkeitsunterschiede aufweist, verwendet man als Albedo-Wert die mittlere Albedo der Oberfläche, \bar{A}_{Iapetus} (Tab. 2).

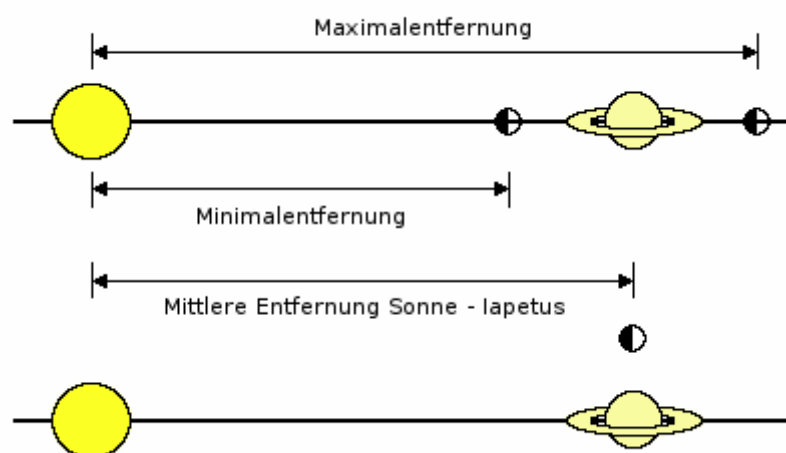


Abbildung 3: Maximale, minimale und mittlere Entfernung zwischen der Sonne (gelb) und dem Saturnmond Iapetus (schwarz-weiß). Die mittlere Entfernung zwischen Sonne und Iapetus entspricht der Entfernung Sonne - Saturn (beige). (Bild: Monika Maintz)

Aus der Definitionsgleichung für die Albedo (siehe S. 2) folgt:

$$\bar{A}_{\text{Iapetus}} = F_{\text{Iapetus}} / S_{\text{Saturn}} \quad \rightarrow \quad F_{\text{Iapetus}} = \bar{A}_{\text{Iapetus}} S_{\text{Saturn}} = \bar{A}_{\text{Iapetus}} S_E \cdot (r_E/r_S)^2$$

Nun lässt sich mit Hilfe von Gleichung 3 eine Leuchtkraft für Iapetus definieren. Dabei ist zu beachten, dass nur eine Mondhälfte von der Sonne angestrahlt wird. Daher kann auch nur diese Hälfte das Sonnenlicht reflektieren. Anstelle der vollen Kugeloberfläche $4 \pi R^2$, wie sie in Gleichung 3 verwendet wird, kann also nur die halbe Kugeloberfläche $(4 \pi R^2)/2$ eingesetzt werden:

$$L_{\text{Iapetus}} = 2 \pi R_{\text{Iapetus}}^2 F_{\text{Iapetus}} = 2 \pi R_{\text{Iapetus}}^2 \bar{A}_{\text{Iapetus}} S_E (r_E/r_S)^2$$

Mit Hilfe dieser Leuchtkraft kann man die Menge der reflektierten Strahlung berechnen, die als Bestrahlungsstärke $E_{\text{Iapetus} \rightarrow \text{Erde}}$ am Ort der Erde ankommt. Als Entfernung Iapetus-Erde verwendet man analog zum Abstand Sonne-Iapetus den mittleren Abstand zwischen dem Saturnmond und der Erde (Abb. 4). Dieser Abstand entspricht dem Abstand Sonne-Saturn, r_S (Tab. 3). Analog zu oben gilt auch hier: Da immer nur die der Sonne zugewandte Seite des Mondes angestrahlt wird, kann auch immer nur eine Mondhälfte Licht reflektieren. Anders als bei selbstleuchtenden Sternen, die ihre Energie in den gesamten Raum abstrahlen, verteilt sich die Leuchtkraft von Iapetus im Abstand r folglich nur über die Oberfläche einer Halbkugel mit dem Radius r und damit über eine Fläche von $(4 \pi r^2)/2$:

$$E_{\text{Iapetus} \rightarrow \text{Erde}} = L_{\text{Iapetus}} / (4 \pi r_S^2)/2 = L_{\text{Iapetus}} / 2 \pi r_S^2 = 2 \pi R_{\text{Iapetus}}^2 \bar{A}_{\text{Iapetus}} S_E (r_E/r_S)^2 / (2 \pi r_S^2)$$

Für die Bestrahlungsstärke $E_{\text{Iapetus} \rightarrow \text{Erde}}$ ergibt sich also:

$$E_{\text{Iapetus} \rightarrow \text{Erde}} = R_{\text{Iapetus}}^2 \bar{A}_{\text{Iapetus}} S_E (r_E/r_S)^2 / r_S^2 \quad (\text{Gleichung 7})$$

Die Gleichung enthält zwei Unbekannte: den Radius von Iapetus, R_{Iapetus} , der bestimmt werden soll, und die Bestrahlungsstärke $E_{\text{Iapetus} \rightarrow \text{Erde}}$. Die Bestrahlungsstärke lässt sich mit Hilfe der scheinbaren Helligkeiten m_{Sonne} und m_{Iapetus} , mit der uns die Sonne und der Saturnmond erscheinen (Tab. 2), gemäß Gleichung 6 berechnen:

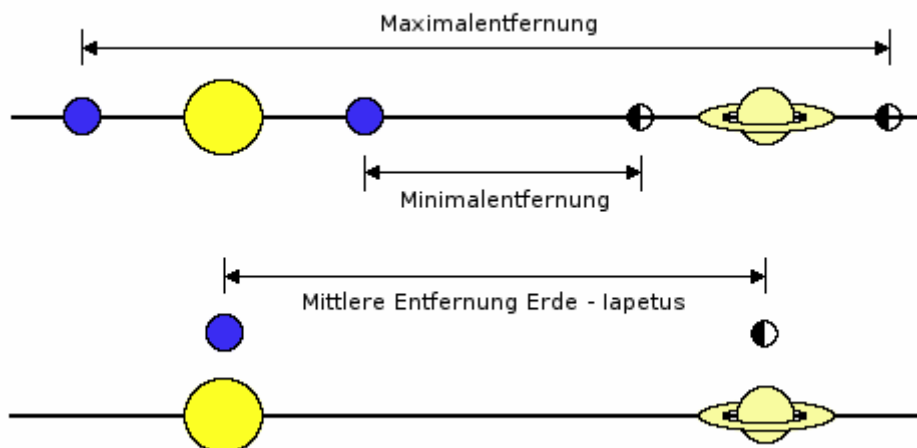


Abbildung 4: Maximale, minimale und mittlere Entfernung zwischen der Erde (blau) und dem Saturnmond Iapetus (schwarz-weiß). Die mittlere Entfernung zwischen Erde und Iapetus entspricht der Entfernung Sonne (gelb) – Saturn (beige). (Bild: Monika Maintz)

$$m_{\text{Iapetus}} - m_{\text{Sonne}} = -2,5 \text{ mag} \log (E_{\text{Iapetus} \rightarrow \text{Erde}} / E_{\text{sonne}}) = -2,5 \text{ mag} \log (E_{\text{Iapetus} \rightarrow \text{Erde}} / S_E)$$

$$(m_{\text{Iapetus}} - m_{\text{Sonne}}) / (-2,5 \text{ mag}) = \log (E_{\text{Iapetus} \rightarrow \text{Erde}} / S_E)$$

Durch Logarithmieren erhält man:

$$10^{[(m_{\text{Iapetus}} - m_{\text{Sonne}}) / (-2,5 \text{ mag})]} = E_{\text{Iapetus} \rightarrow \text{Erde}} / S_E$$

Daraus ergibt sich für $E_{\text{Iapetus} \rightarrow \text{Erde}}$ folgender Ausdruck:

$$E_{\text{Iapetus} \rightarrow \text{Erde}} = S_E \cdot 10^{[(m_{\text{Iapetus}} - m_{\text{Sonne}}) / (-2,5 \text{ mag})]} \quad (\text{Gleichung 8})$$

Um den Radius von Iapetus zu erhalten, muss man Gleichung 8 in Gleichung 7 einsetzen und diese nach R_{Iapetus} auflösen:

$$E_{\text{Iapetus} \rightarrow \text{Erde}} = R_{\text{Iapetus}}^2 \bar{A}_{\text{Iapetus}} S_E (r_E/r_S)^2 / r_S^2 \quad (\text{Gleichung 7})$$

$$S_E \cdot 10^{[(m_{\text{Iapetus}} - m_{\text{Sonne}}) / (-2,5 \text{ mag})]} = R_{\text{Iapetus}}^2 \bar{A}_{\text{Iapetus}} S_E (r_E/r_S)^2 / r_S^2$$

$$R_{\text{Iapetus}} = (\{10^{[(m_{\text{Iapetus}} - m_{\text{Sonne}}) / (-2,5 \text{ mag})]}\} / \{\bar{A}_{\text{Iapetus}} (r_E/r_S)^2 / r_S^2\})^{-2} \quad (\text{Gleichung 9})$$

Nun muss man noch für die physikalischen Parameter die entsprechenden Werte aus Tabelle 2 und 3 einsetzen. Dabei ist zu beachten, dass auch für die scheinbare Helligkeit von Iapetus, m_{Iapetus} , ein Mittelwert gebildet werden muss, da die anderen Größen, die sich auf den Saturnmond beziehen, ebenfalls Mittelwerte darstellen:

$$R_{\text{Iapetus}} = (\{10^{[(10,2+11,9)\text{mag}/2-(-26,7\text{mag})]/(-2,5 \text{ mag})}\} / \{0,3 \cdot (1\text{AE}/9,5\text{AE})^2 / (9,5\text{AE})^2\})^{-2}$$

$$R_{\text{Iapetus}} = (\{10^{-15,1}\} / \{0,3 \cdot (1/9,5)^2 / (9,5\text{AE})^2\})^{-2} = 4,6439 \cdot 10^{-6} \text{ AE}$$

$$R_{\text{Iapetus}} = 4,6439 \cdot 10^{-6} \cdot 149,6 \cdot 10^6 \text{ km}$$

$$\mathbf{R_{\text{Iapetus}} = 695 \text{ km} \quad \rightarrow \quad 2 \cdot R_{\text{Iapetus}} = 2 \cdot 695 \text{ km} = 1390 \text{ km}}$$

Vergleich mit dem Literaturwert

Der in der Literatur gegebene Wert für den Durchmesser von Iapetus beträgt 1436 km (Tab. 2). Der Vergleich mit dem in der Aufgabe berechnete Wert von 1390 km zeigt, dass der berechnete Wert dem tatsächlichen Wert sehr nahe kommt. Die Abschätzung liefert folglich prinzipiell das richtige Ergebnis. Daraus kann man schließen, dass die physikalischen Überlegungen und Annahmen, auf denen die Abschätzung basiert, sowie die Verwendung von Mittelwerten sich als tauglich und sinnvoll erwiesen haben.

Anhang

Tabelle 2: Physikalische Parameter von Iapetus

(Quelle: <http://sci.esa.int/science-e/www/object/index.cfm?fobjectid=35229&fbodylongid=1722>)

Physikalischer Parameter	Wert
Durchmesser	1436 km
Masse	$1,6 \cdot 10^{21}$ kg
Mittlere Dichte (Wasser: 1000 kg/m^3)	1200 kg/m^3
Rotationsdauer	79 Tage 7 Stunden 55 Minuten
Fluchtgeschwindigkeit	0,586 km/s
Albedo (dunkle Bereiche)	0,05
Albedo (helle Bereiche)	> 0,5
Mittlere Albedo der Oberfläche	0,3
Scheinbare Helligkeit	10,2 – 11,9 mag
Bahnradius (Mittlerer Abstand von Saturn)	3 560 800 km
Umlaufzeit	79 Tage 7 Stunden 55 Minuten
Mittlere Umlaufgeschwindigkeit	3,27 km/s
Exzentrizität	0,028
Bahnneigung	7,6°

Tabelle 3: Physikalische Parameter, astronomische Konstanten und Einheiten

Physikalischer Parameter	Wert
Erde: Bahnradius (Mittlerer Abstand von der Sonne), r_E	$149,6 \cdot 10^6$ km (1 AE)
Saturn: Bahnradius (Mittlerer Abstand von der Sonne), r_S	$1429 \cdot 10^6$ km (9,5 AE)
Scheinbare Helligkeit der Sonne, m_{Sonne}	-26,7 mag
Astronomische Konstante	
Solarkonstante, S_E	$1,37 \cdot 10^3$ W/m ²
Astronomische Einheit	
Astronomische Einheit, AE	$149,6 \cdot 10^6$ km