Kepler und die Doppelsterne – ein fächerübergreifendes Thema

In Bezug auf die Nachricht „Zwei Planeten in einem exotischen Doppelsternsystem“ in SuW 11/2011, S. 14

Thomas Jahre

Als die Wissenschaftler des South African Astronomical Observatory das exotische Doppelsternsystem UZ Fornacis untersuchten und ihre aktuellen Beobachtungsdaten mit bis zu 27 Jahre alten Daten verglichen, entdeckten sie Hinweise, dass der Doppelstern ein Planetensystem besitzt. Mit Hilfe des folgenden WIS-Beitrags soll (Schülern) verdeutlicht werden, was diese Entdeckung mit dem vor rund 400 Jahren entdeckten dritten Keplerschen Gesetz zu tun hat.

Der Aufbau unseres Sonnensystems ist ein Bestandteil des Physik/Astronomieunterrichtes der Klasse 9 der Mittelschule in Sachsen. Neben den verschiedenen Körpern, die in unserem Sonnensystem zu finden sind, spielen die Bewegungen der Himmelskörper und das Gravitationsgesetz eine wichtige Rolle.

Der im Folgenden beschriebene Auftrag richtet sich an Schüler der Klassenstufen 9 oder 10. Es sind historische Entwicklungen in der Astronomie aufzuzeigen. Weiterhin sollen einfache mathematische Umformungen vorgenommen werden. Die zugrunde liegenden physikalischen Sachverhalte (Kreisbahngeschwindigkeit, Hebelgesetz, Modell Massenpunkt) sind zu wiederholen. Im letzten Abschnitt gilt es, die Aktualität der „alten“ Gesetze zu belegen.

Übersicht der Bezüge im WIS-Beitrag		
Physik	Mechanik	Gravitationsgesetz, Zentripetalkraft, Kreisbewegung, Kreisbahngeschwindigkeit, Hebelgesetz, Schwerpunkt
Astronomie	Sonnensystem, Astronomiegeschichte	Keplersche Gesetze, Weltbilder, Rolle der Astronomie in der Antike
Fächerverknüpfung	Astro-Ma	Umstellen von Gleichungen, Abschätzen von Größen

Abbildung 1: Ersttagsbrief Deutschland zum 400. Geburtstag J. Keplers im Jahre 1971 (Scan vom Original aus der Sammlung des Verfassers).

Auftrag:

Untersuche, auf welche Weise das dritte Keplersche Gesetz und das Gravitationsgesetz von Isaac Newton verbunden sind? Wiederhole in dem Zusammenhang wesentliche Etappen in der Astronomiegeschichte. Zeige an einem Beispiel die Bedeutung des dritten Keplerschen Gesetzes in der modernen Forschung.

Drittes Gesetz von Kepler:

$$\frac{T_1^{\,2}}{T_2^{\,2}} = \frac{a_1^{\,3}}{a_2^{\,3}} \rightarrow \frac{T_1^{\,2}}{a_1^{\,3}} = \frac{T_2^{\,2}}{a_2^{\,3}} \rightarrow \frac{T^2}{a^3} = konstant$$

Gravitationsgesetz:

$$F = \gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

(Die in den Gleichungen vorkommenden physikalischen Größen sind durch die Schüler zu untersuchen.)

Historischer Ansatz:

In den alten Kulturen der Menschheit wurden schon sehr zeitig astronomische Beobachtungen gemacht, waren diese doch für das Wohl und Wehe der Gesellschaft wichtig. In Ägypten und Mesopotamien waren es die alljährlichen Überschwemmungen, deren Auftreten durch die Sichtbarkeit des Sirius (Kleiner Hund) vorhersehbar wurde. In Mittel- und Westeuropa wurde der Beginn Jahreszeiten astronomisch bestimmt (Sternscheibe von Nebra, Stonehenge) und somit die Zeiten für Aussaat und Ernte festgelegt. Das „Wie“ der Sternenbewegung war recht leicht durchschaubar, das „Warum“ aber nicht? Hier kamen nun die Götter ins Spiel, die sich auch gleich noch am Himmel finden ließen – in der Gestalt der Planeten, der Sonne und des Mondes. Langfristige Beobachtungen ließen erkennen, dass sich auch bei den göttlichen Himmelskörpern Regelmäßigkeiten zeigten – z. B. die Finsternisse. Es sollte also doch eigentlich auch möglich sein, die Bewegungen der Planeten zu untersuchen und zu berechnen. Wenn man vom geozentrischen Weltbild ausgeht, gestaltet sich diese Aufgabe aber schwierig. Waren die „Formeln“ auch noch so kompliziert – immer wieder wiesen die Rechenergebnisse Abweichungen zu den Beobachtungen auf. (Aufgabe für einen weiteren Schülerauftrag wäre: Untersuche die Epizykeltheorie des Apollonius von Perge.)
Ansätze, das geozentrische System zu überwinden, wurden gemacht – durch Aristarchus von Samos und Hypathia[1] – konnten sich aber nicht durchsetzen. Erst Kopernikus entwickelte das heliozentrische Weltbild, auch wenn dieses nicht wirklich eine Vereinfachung brachte und auch die Genauigkeit nur unwesentlich verbesserte. (Aufgabe für einen weiteren Schülerauftrag wäre: Untersuche die Notwendigkeit der Verwendung von Epizyklen im System des Kopernikus.)
Der in Abb. 2 gezeigte Text auf dem Ersttagsbrief zeigt einen Ausschnitt aus dem Manuskript von Kopernikus – der Bezug zu Aristarchus ist durchgestrichen und fehlt dann auch in seinem Werk. Zugleich zeigt dieser Text aber, dass Kopernikus von den Lehren des Aristarchus gewusst hat.

[1] Buchtipp: Jean-Pierre Luminet – Alexandria 642, Thomas Bührke – Die Sonne im Zentrum, Filmtipp: Agora

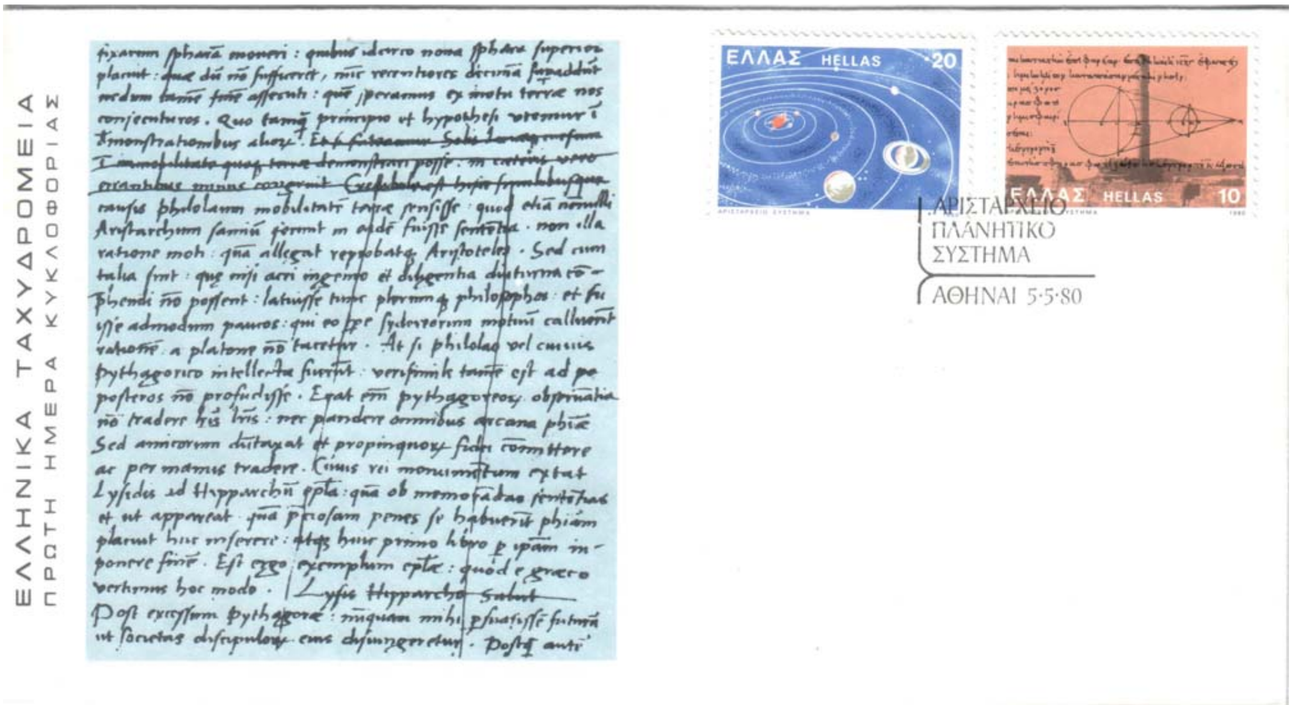

Abbildung 2: Ersttagsbrief (Griechenland) aus Anlass des 2300. Geburtstages des Aristarchus im Jahr 1980. Scan vom Original aus der Sammlung des Verfassers

Rund 50 Jahre nach dem Tod von Kopernikus veröffentlichte Tycho Brahe sein Weltbild – ein Kompromiss zwischen geo- und heliozentrischem Weltbild. Die Erde steht im Zentrum der Welt und wird von Mond und Sonne umkreist, die 5 Planeten (bekannt waren Merkur, Venus, Mars, Jupiter und Saturn) wiederum bewegen sich um die Sonne.

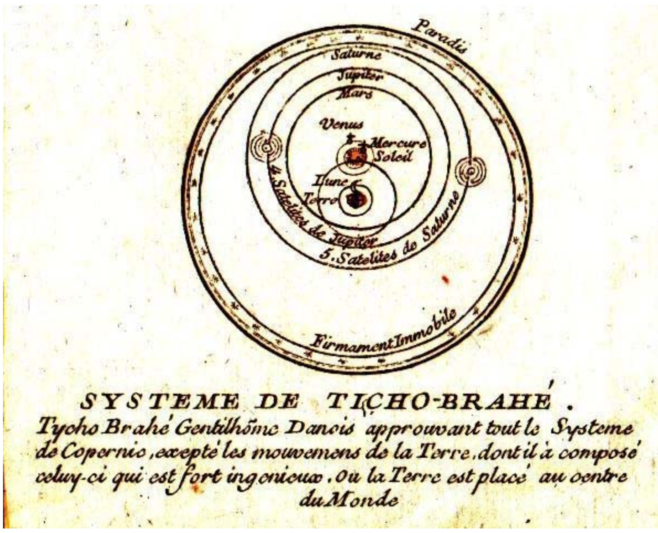

Abbildung 3: Ausschnitt aus einer Weltbilderkarte aus dem Jahr 1750. Scan vom Original aus der Sammlung des Verfassers

Tycho Brahe besaß die genauesten Daten des Sternenhimmels – so auch hunderte Messdaten der Marsbahn. Als Brahe starb trat Johannes Kepler die Nachfolge am Hof Rudolfs II. in Prag an und konnte in dieser Funktion die Unterlagen Brahes nutzen.

Kepler kannte keine physischen Doppelsterne. Zwar hat Kepler selbst ein Fernrohr entwickelt, aber auf Grund eines Augenleidens nicht (kaum) genutzt. Die von ihm gefundenen Gesetzmäßigkeiten zu den Planetenbahnen beruhten auf der Auswertung der Daten von Tycho Brahe.

Als Anhänger der kopernikanischen Lehre rechnete Kepler jahrelang mit den Daten (ohne Computer und Tabellenkalkulation) und fand die später nach ihm benannten Gesetze.

Gesetz 1: Planeten bewegen sich auf einer elliptischen Bahn um die Sonne, die in einem der Brennpunkte der Ellipse steht.

Gesetz 2: Der Leitstrahl Sonne-Planet überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

Gesetz 3: Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen der großen Bahnhalbachsen. Die mathematische Formulierung – s. o.

Die Frage nach dem „Wie“ war nun zufriedenstellend geklärt, aber beim „Warum“ musste Kepler seine Idee „Anima motrix“ letztlich verwerfen. Die Frage nach dem „Warum“ konnte Isaac Newton mit dem Gravitationsgesetz beantworten – zumindest teilweise. (Die vorläufig letzte Antwort liefert die allgemeine Relativitätstheorie von Albert Einstein.) Der letzte Beweis für das heliozentrische Weltbild gelang im Jahr 1838 F. W. Bessel mit dem Nachweis der Parallaxe des Sternes 61 im Sternbild Schwan.

Ansatz 1:

Vereinfachung:
Es wird von einer Kreisbahn (Radius r) des Planeten ausgegangen, auf welcher dieser in der Zeit T mit einer konstanten Geschwindigkeit v umläuft:

$$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}.$$

Die Sonne (Masse m)$_2$ ruht im Zentrum und zieht den Planeten (Masse m_1) mit der Kraft F an:

$$F = \gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}.$$

Die Gravitationskraft lässt sich als Zentripetalkraft auffassen, welche den Planeten auf seine Bahn zwingt:

$$F = \frac{m \cdot v^2}{r}.$$

Diese Gleichsetzung wird nun vollzogen, und die Gleichung wird umgestellt und vereinfacht bis ein „nützlicher“ Ausdruck vorliegt:

$$\frac{m_1 \cdot v^2}{r} = \gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \qquad \rightarrow$$

$$\frac{m_1 \cdot 4\pi\pi \cdot r^2}{T^2 \cdot r} = \gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \qquad \rightarrow$$

$$\frac{4\pi^2 \cdot r}{T^2} = \gamma \cdot \frac{m_2}{r^2} \qquad | \cdot \left(T^2 / r\right) \quad \rightarrow$$

$$4\pi^2 = \gamma \cdot \frac{m_2 \cdot T^2}{r^3} \qquad | : \left(m_2 \cdot \gamma\right) \quad \rightarrow$$

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{m_2 \cdot \gamma} \qquad \rightarrow$$

$$\underline{\underline{\frac{T^2}{r^3} = \text{konstant}}}$$

Fasst man die Kreisbahn als Spezialfall einer Ellipsenbahn auf, kann man r durch die große Halbachse a ersetzen und erhält so das 3. Gesetz Keplers, welches zumindest für diesen speziellen Fall gilt.
ABER! Kepler wusste ja noch nichts von der Gravitation. Deshalb fragte er auch nicht nach der Rolle der Masse von Sonne und Planet.
Uns hingegen, die wir die Gravitation kennen, stört es, dass die Masse des Planeten scheinbar keinen Einfluss hat. Deshalb betrachten wir das Problem näher und kommen zu Ansatz 2.

Ansatz 2:

Dieser Ansatz berücksichtigt den Wechselwirkungscharakter der (Gravitations-)Kraft und bezieht auch die Planetenmasse ein.
Die Sonne steht nicht im Mittelpunkt, sondern sie kreist synchron mit dem Planeten um den gemeinsamen **Schwerpunkt** (des Systems Stern-Planet). Dieser liegt für unser Sonnensystem noch im Innern der Sonne selbst, aber eben nicht im Mittelpunkt (siehe Abb. 4).

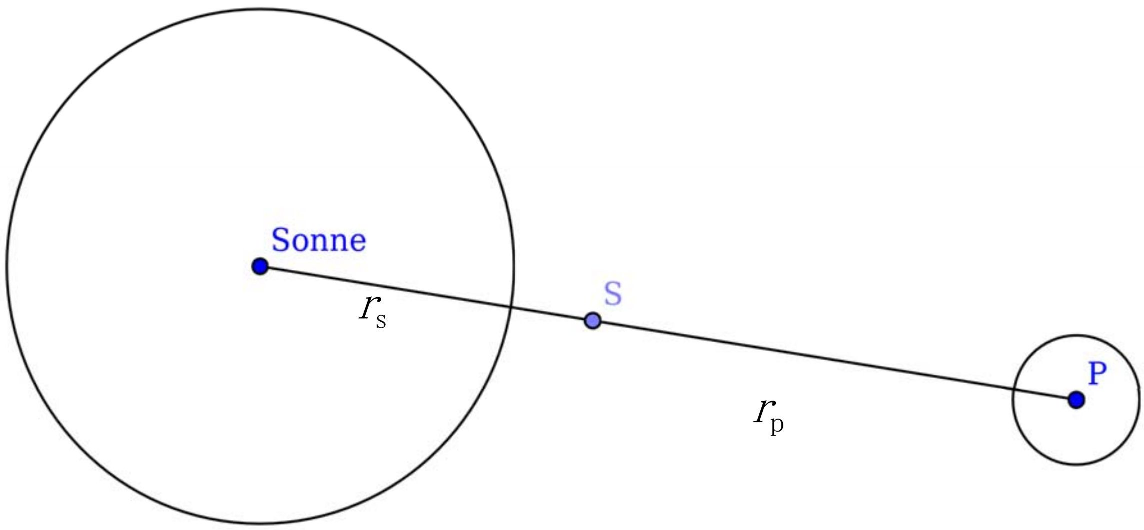

Abbildung 4: Sonne und Planet (P) kreisen (Kreis als bleibende Vereinfachung) um den gemeinsamen Schwerpunkt S (erstellt mit dem Programm „Geogebra“).

Es gilt: r_s – Sonnenabstand, r_p – Planetenabstand, beide Abstände zusammen ergeben r.

Nach dem Schwerpunktsatz (den man als Hebelgesetz interpretieren kann) gilt nun:
$m_1 \cdot r_p = m_2 \cdot r_s$.

Daraus ergibt sich:

$$m_1 \cdot r_p = m_2 \cdot (r - r_p) \quad \rightarrow$$

$$m_1 \cdot r_p = m_2 \cdot r - m_2 \cdot r_p \quad \rightarrow$$

$$m_1 \cdot r_p + m_2 \cdot r_p = m_2 \cdot r \quad \rightarrow$$

$$(m_1 + m_2) \cdot r_p = m_2 \cdot r \quad |:(m_1 + m_2) \quad \rightarrow$$

$$r_p = \frac{m_2}{(m_1 + m_2)} \cdot r.$$

Der Planet läuft diesmal auf der (Kreis-)Bahn mit dem Radius r_p um. Für die Zentripetalkraft gilt diesmal also

$$F = \frac{m \cdot v^2}{r_P}.$$

Daraus ergibt sich:

$$F = \gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}; \quad v = \frac{2\pi \cdot r_p}{T} \quad \rightarrow$$

$$\frac{m_1 \cdot 4\pi^2}{T^2} \cdot r_p = \gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \quad \rightarrow$$

$$\frac{m_1 \cdot 4\pi^2}{T^2} \cdot \frac{m_2}{(m_1 + m_2)} \cdot r = \gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \quad \rightarrow$$

$$\frac{4\pi^2}{T^2} \cdot \frac{1}{(m_1 + m_2)} \cdot r = \gamma \cdot \frac{1}{r^2} \quad | \cdot T^2 / r \quad \rightarrow$$

$$\frac{4\pi^2}{(m_1 + m_2)} = \gamma \cdot \frac{T^2}{r^3} \quad |:\gamma \quad \rightarrow$$

$$\underline{\underline{\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{(m_1 + m_2) \cdot \gamma}}}$$

Mit r gleich a (wieder in Verallgemeinerung) erhält man den vollständigen Ausdruck des 3. Keplerschen Gesetzes.
Da m_1 für alle Planeten unterschiedlich ist, gilt das Keplersche Gesetz im Sinne, dass das Verhältnis des Quadrates der Umlaufzeit und der dritten Potenz des Abstandes für alle Planeten gleich sein soll, nun nicht mehr.
Warum hat das Kepler nicht erkannt? Dazu kann man den Schülern ein Beispiel vorführen. Die Nenner auf der rechten Seite der obigen Gleichung betragen:

- für die Erde: $1{,}327409 \cdot 10^{20}$ m³/s²,
- für den Jupiter: $1{,}328671 \cdot 10^{20}$ m³/s².

Der prozentuale Unterschied liegt mit rund 0,09 % jenseits dessen, was Kepler aus den Messwerten von Brahe ableiten konnte.
Die exakte Formulierung hat Kepler also nur knapp verfehlt.

Anmerkung:
Die Ansätze 1 und 2 gehen von Kreisbahnen aus. → Aufgaben für zwei weitere Schüleraufträge wären: 1. Untersuche den Ansatz 2 für den Fall, dass Sonne und Planet auf Kreisbahnen um den gemeinsamen Schwerpunkt kreisen. 2. Untersuche den Ansatz 2 für den Fall, dass sich Sonne und Planet auf Ellipsenbahnen um den gemeinsamen Schwerpunkt bewegen. Beide Aufträge sind für mathematisch versierte Schüler zumindest qualitativ machbar.

Das 3. Keplersche Gesetz in der heutigen Forschung

Das 3. Keplersche Gesetz ist für die Bestimmung der Masse von Doppelsternen von grundlegender Bedeutung, wie zum Beispiel für den Doppelstern 61 Schwan. Dieser ist einer der 20 sonnennächsten Sterne. Schon mit einem einfachen Fernrohr kann man die beiden Sterne „getrennt“ sehen. Aus der beobachteten Umlaufzeit und der gemessenen Entfernung (diese wird gebraucht, um die große Halbachse der Umlaufbahn zu berechnen) lässt sich also die Gesamtmasse des Systems bestimmen. Die Einzelmassen können dann ermittelt werden, wenn man den Schwerpunkt identifiziert hat.
Günstige Vermessungsmöglichkeiten für solche Systeme ergeben sich dann, wenn wir sehen können, wie sich sie sich gegenseitig bedecken. (Beispiel: UZ Fornacis im Sternbild Chemischer Ofen). Die Umlaufzeit des Systems liegt bei nur 127 Minuten. Damit lassen sich viele Umläufe beobachten und auswerten. Dabei kam heraus, dass die periodischen Bedeckungen zeitlichen Abweichungen unterworfen sind. Dieses System muss noch kleinere Himmelskörper enthalten, welche die Doppelsterne gravitativ beeinflussen.
→ weiter lesen in „Zwei Planeten in einem exotischen Doppelsternsystem“ in SuW 11/2011, S. 14