wissenschaft in die schulen!

Monumentalgeometrie aus Karton

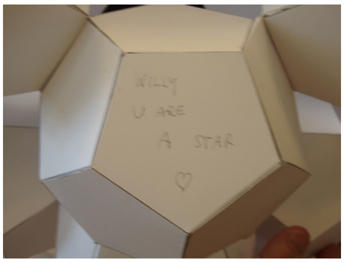
Durch die Arbeit einer großen Gruppe entsteht in relativ kurzer Zeit aus biederem Karton ein geometrisches Großobjekt, das nicht nur reichhaltiges Anschauungsmaterial für fraktale und überhaupt räumliche Geometrie bietet, sondern auch als eindrucksvolles Vorzeigeobjekt dienen kann.

Christoph Pöppe, Spektrum der Wissenschaft, Slevogtstr. 3–5, 69126 Heidelberg, poeppe@spektrum.com

Abb. 1: Die Erbauer des fraktalen Dodekaeders von Lüdinghausen 2005 posieren vor dem vollendeten Werk. Oberste Reihe links: der Chef des Gymnasium Canisianum, Hartmut Stutznäcker; Unterste Reihe, vierter von links: Wilhelm Sternemann. Der Dicke in der untersten Reihe links bin ich.

Hundert oder mehr Schüler sitzen an großen Tischen in der Schulaula, arbeiten emsig und konzentriert mit Messer, Schere und Lineal an einem großen Gemeinschaftswerk, das von jedem Einzelnen präzises Arbeiten fordert. Über den Köpfen der Beteiligten wabert nichts als der charakteristische Dunst des Klebstoff-Lösungsmittels. Innerhalb eines einzigen Wochenende bringt die internationale Gruppe, die eigens zu diesem Anlass zusammengerufen wurde, ein Gesamtwerk von monumentalen Ausmaßen zu Stande. Jubel und Dankbarkeit regnen in gänzlich ungewohntem Ausmaß auf die Initiatoren hernieder, der Chef der Schule erstrahlt über das eindrucksvolle Vorzeigeobjekt, aus dem Artikel in der lokalen Tageszeitung spricht zwar mathematisches Unverständnis, aber große Begeisterung, ich selbst genieße die ungewohnt direkte Begegnung mit einer wichtigen Zielgruppe, und nicht zu vergessen: Man hat an dem Wochenende richtige Mathematik getrieben – eine ungewöhnliche, aber schultaugliche Kombination aus euklidischer Geometrie im Raum und fraktaler Geometrie –, sich den Gegenstand der abstrakten Betrachtung in handgreiflicher Arbeit hergestellt und auch noch ein äußerst ansehnliches Objekt erzeugt (Abb. 1).

Abb. 2: Endmontage des fraktalen Dodekaeders von Lüdinghausen 2005 (oben); rechts das fertige Werk, soeben am Seil an die Decke gezogen, darunter Sternemann und Pöppe; unten der Dank des Publikums, verewigt auf zweien der 400 Teildodekaeder



Wir haben Glück gehabt. Das Geometriewochenende am Gymnasium Canisianum in Lüdinghausen ist geradezu bilderbuchmäßig verlaufen. Selbst der großflächige Stromausfall, der weite Teile des Münsterlandes an diesem Wochenende (28./29. November 2005) in Kälte und Dunkelheit versinken ließ, hat um uns einen Bogen gemacht. Ganz so reibungslos lief es nicht jedesmal.

Dieser Beitrag berichtet über mehrere große geometrische Bastelaktionen, die ich im Rahmen verschiedener Veranstaltungen unternommen habe. Dabei habe ich mehrfach in pädagogischem Terrain gewildert (zumindest waren jedesmal Schüler beteiligt); aber es ist häufig so gutgegangen, dass ich diese oder jene Aktion zur Nachahmung empfehlen möchte.

Die Sache begann Mitte 2000 ganz harmlos mit einem Artikelprojekt zum Thema „Fraktale aus platonischen Körpern“. Wilhelm Sternemann, Mathematiklehrer am Gymasium Canisianum in Lüdinghausen und treibende Kraft der oben geschilderten Wochenendveranstaltung, hatte die Grundidee zur Erzeugung eines populären Fraktals auf dreidimensionale Gebilde, insbesondere platonische Körper, verallgemeinert. Einzelheiten sind in dem Beitrag „Platonische Fraktale im Unterricht“ von Wilhelm Sternemann (ebenfalls auf dieser Website) ausführlich beschrieben. Dass sich das Projekt so ausweiten würde, hätten wir beide nicht gedacht.

Die weiteren geometrischen Themen des vorliegenden Artikels sind: unendliche Polyeder, Raumfüllungen mit Polyedern und vierdimensionale Polyeder.

1. Platonische Fraktale – das Prinzip

Man setze in die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks verkleinerte Versionen seiner selbst, parallel zur Ursprungsfigur ausgerichtet und so groß, dass sie einander gerade nicht überschneiden, was auf einen Verkleinerungsfaktor von 1/2 hinausläuft. Das ist die einfache Grundoperation „aus einem Dreieck mach drei Stück der halben Größe und in der beschriebenen Lage“. Die wende man auf jedes der entstehenden Dreiecke wieder an, im Prinzip unendlich oft. Das ist das Sierpiński-Dreieck (Abb. 3), mit dem man gerne und mit gutem Grund das Thema „Fraktale Geometrie“ eröffnet.

Vom Dreieck zum Tetraeder überzugehen, auf den Gedanken waren schon mehrere Leute gekommen: Man setze in die Ecken eines regelmäßigen Tetraeders vier Stück der halben Größe, die sich dann gerade in den Eckpunkten treffen. Diese Operation, wiederum

Abb. 3: Die ersten Iterationsstufen zum Sierpiński-Dreieck

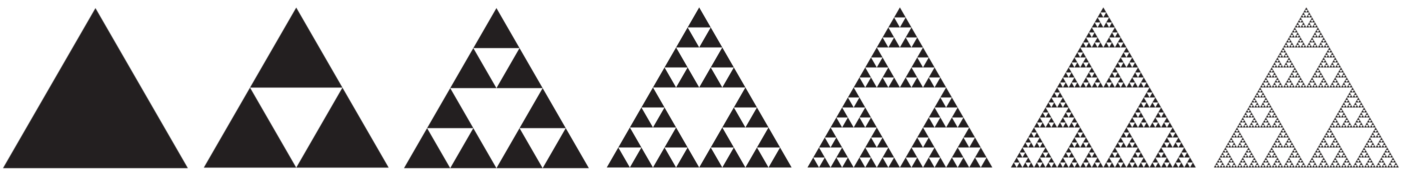


Abb. 4: Fraktales Ikosaeder der zweiten Stufe mit seinen Erbauerinnen Meike Mevenkamp, Caroline Schenk und Janina Schlenkert (November 1999)

unendlich oft iteriert, führt in einleuchtender Weise zum Sierpiński-Tetraeder. Aber warum beim „kleinsten" unter den fünf platonischen Körpern stehenbleiben? Was man mit dem Dreieck anstellen kann, geht schließlich für regelmäßige Vielecke beliebiger Seitenzahl und sieht auch ganz hübsch aus; nur das Fraktal zum Quadrat ist ziemlich langweilig. Was passiert also, wenn man einen Würfel (ein Oktaeder, Dodekaeder, Ikosaeder) durch geeignet verkleinerte, in die Ecken gesetzte Kopien seiner selbst ersetzt und diese Operation im Prinzip unendlich oft wiederholt?

Der Würfel wird im Wesentlichen auf sich selbst abgebildet, und bei den weiteren Iterationsschritten tut sich nichts Entscheidendes. Aber was aus den anderen platonischen Körpern wird, ist einer näheren Untersuchung wert. Das Vorstellungsvermögen gerät da relativ schnell an seine Grenzen und ruft um Hilfe – die von allerlei Grafikprogrammen bereitgestellt wird. Wilhelm Sternemann konzentrierte sich zunächst auf das Ikosaeder als den in vielerlei Hinsicht „dankbarsten" platonischen Körper, berechnete den Verkleinerungsfaktor und baute mit einer Arbeitsgemeinschaft an seiner Schule die ersten zwei Iterationsstufen des fraktalen Ikosaeders aus Karton (Abb. 4).

2. Das Geometriewochenende in München

Das sah alles schon ganz ansehnlich aus; aber natürlich ist 3 eine wesentlich bessere Näherung an unendlich als 2. Da allerdings das Ikosaeder zwölf Ecken hat, verzwölffacht sich mit jedem Iterationsschritt die Anzahl der kleinen Ikosaeder. 144 Stück macht eine motivierte Arbeitsgemeinschaft noch mit; aber 1728 Ikosaeder mit je 20 Seitenflächen zu fertigen und zu dem großen Ding zusammenzukleben erschien doch als eine ziemlich wahnwitzige Idee.

Da ich aber schon ziemlich viele Karton-Bausätze für geometrische Körper selbst entworfen hatte, fuhr ich auf die wahnwitzige Idee ab und gewann meinen Verlag dafür, eigens für das große Werk ein Geometrie-Wochenende zu organisieren [1]. Von da an entwickelten die Dinge eine unerwartete Eigendynamik: Dierk Schleicher, heute Professor an der Jacobs University Bremen, bereitete uns den Weg in das Mathematische Institut der Universität München, an dem er damals eine Professur vertrat. Albrecht Beutelspacher versprach, das fertige Werk in seinem (damals noch in der Planung begriffenen) Mathematik-Museum in Gießen auszustellen. Wir wurden von Anmeldungen überschwemmt und mussten bei 150 Teilnehmern gegen heftige Proteste die Liste schließen. Schleichers Münchner Kollege Rudolf Fritsch bot von sich aus einen Vortrag an, und unversehens hatten wir ein wissenschaftliches Beiprogramm.

Den ganzen Samstag, den 20. Januar 2001, ritzten, schnitten und klebten unsere 150 Leute, was das Zeug hielt. Die Altersspanne reichte von 11 bis 78, mit einem erheblichen Schüleranteil. Mehrere Leute hatten den Weg aus Hamburg und Berlin nach München nicht gescheut. Am Abend waren zwölf fraktale Ikosaeder der zweiten Iterationsstufe fertig. Meine Kolleginnen vom Verlag, die die Orga-

Abb. 5: Links Endmontage des fraktalen Ikosaeders der dritten Stufe, München Januar 2001; rechts das vollendete Werk. Der kleinere gelbe Körper im Hintergrund ist der „große Werbeck" (siehe unten).

Abb. 6: *Das fraktale Ikosaeder im Mathematikum in Gießen*

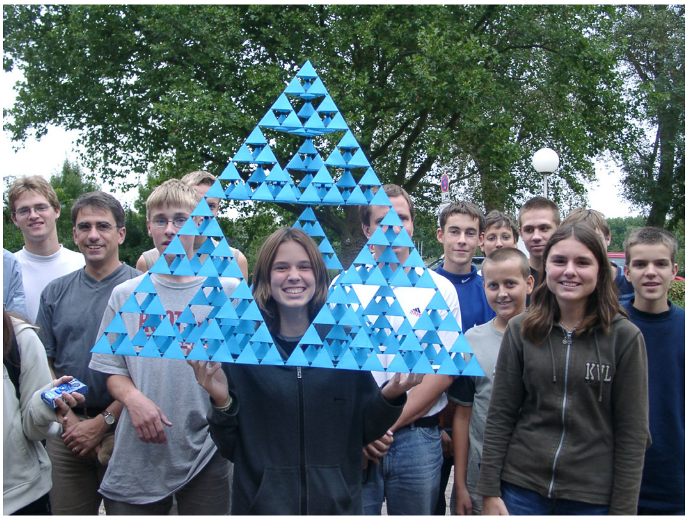


Abb. 7: Sierpiński-Tetraeder der vierten Stufe, Münster, September 2002

nisation übernommen hatten, staunten nicht schlecht, als die Teilnehmer, von der Handarbeit zum Austausch ihrer mathematischen Erfahrungen übergegangen, um 23 Uhr nur mit Mühe zum Gehen zu bewegen waren. Ein leibhaftiger Prorektor der Universität München verlieh der Endmontage am Sonntagmorgen durch eine feierliche Rede offiziellen Glanz. Unser Werk (Abb. 5 und 6) hing im Gießener Mathematikmuseum seit dessen Eröffnung im November 2001 und zog viele bewundernde Blicke auf sich, bis es, in Ehren verstaubt, leicht angegilbt und etwas deformiert, Anfang 2008 abgehängt wurde.

Zugegeben: Dieses Ereignis hat herzlich wenig Ähnlichkeit mit der Schulpraxis. Aber es blieb nicht bei dem einen Ereignis.

3. Weitere platonische Fraktale

3.1 Sierpiński-Tetraeder

Im September 2002 baute ich mit Gewinnern des Wettbewerbs „Känguru der Mathematik“ [2] in Münster (Westfalen) ein Sierpiński-Tetraeder. Vier Gruppen zu je 16 Schülerinnen und Schülern aus Ungarn, Polen, den Niederlanden und Deutschland bastelten in je zwei dreistündigen Sitzungen je ein Tetraeder der dritten Iterationsstufe, das also acht Elementartetraeder entlang jeder Kante enthielt. Das Zusammenfügen zu einem großen Tetraeder der vierten Stufe war dann nicht mehr schwer (Abb. 7).

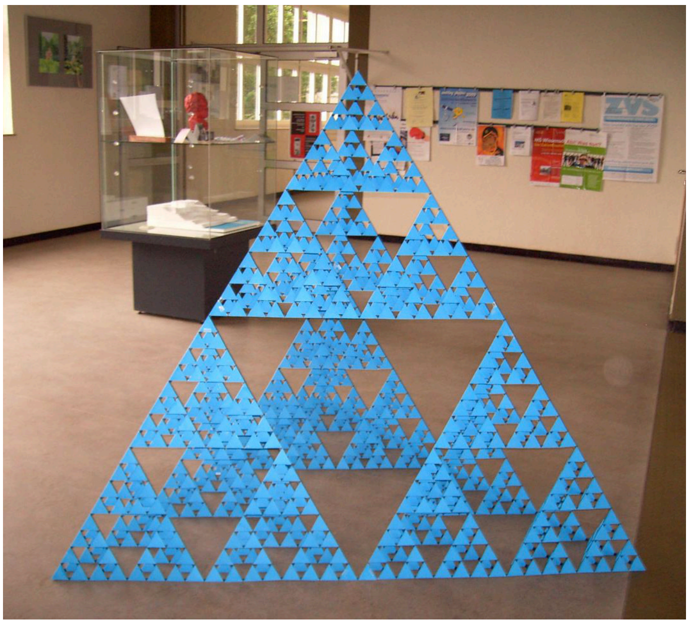
Im Gegensatz zum fraktalen Ikosaeder treffen sich die kleinen Elementarpolyeder nicht entlang einer Kante, sondern nur in einer Ecke. Das hält nicht von alleine, wenn man es in Karton baut. Rolf Springmann vom Dillmann-Gymnasium in Stuttgart, der für sein großes Sierpiński-Tetraeder sämtliche Schüler seiner Schule um einzelne Tetraeder (aus Cornflakes-Tüten) gebeten hatte, löste dieses Problem mit einer Heißklebepistole. Ich fand eine andere Lösung: Pyramidchen (halbe Oktaeder) der Kantenlänge 1 cm, zwischen je zwei Tetraeder eingepasst und schwarz bedruckt, fallen kaum auf und geben dem Gesamtgebilde eine erstaunliche Stabilität [3].

Inzwischen habe ich den Bastelbogen zum Sierpiński-Tetraeder noch weiterentwickelt mit dem Effekt, dass inzwischen eine 30-köpfige, nicht übermäßig motivierte Gruppe das Tetraeder der vierten Stufe (Gesamt-Kantenlänge 80 cm) an einem Abend zu Stande bringt.

Der Bausatz zum Sierpiński-Tetraeder hat inzwischen eine gewisse Verbreitung gefunden, weil der Wettbewerb „Känguru der Mathematik“ ihn Ende 2008 den erfolgreichsten unter den teilnehmenden Schulen als Preis für ebendiesen Erfolg anbot. Mehr als 80 Schulen haben von diesem Angebot Gebrauch gemacht; etliche von ihnen wollten sich sogar an das Tetraeder der fünften Stufe wagen (vierfacher Bastelaufwand, 32 elementare Tetraeder entlang der langen Kante, Kantenlänge 1,60 Meter!).

Zumindest eines von ihnen ist mittlerweile vollendet worden, und zwar nicht, wie ich es mir vorgestellt hatte, von einer großen

Abb. 8: Sierpiński-Tetraeder der fünfen Stufe, erbaut von Eva Nowak, Bad Godesberg 2009



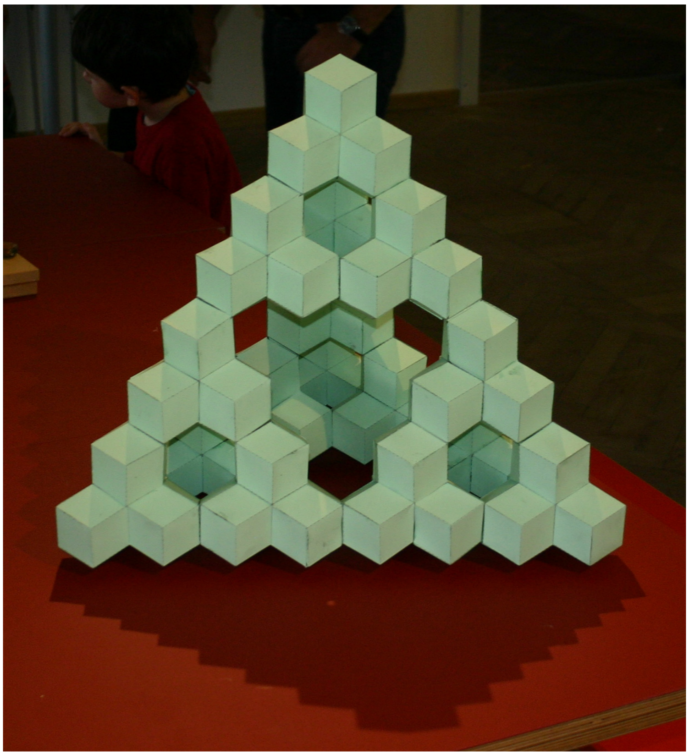
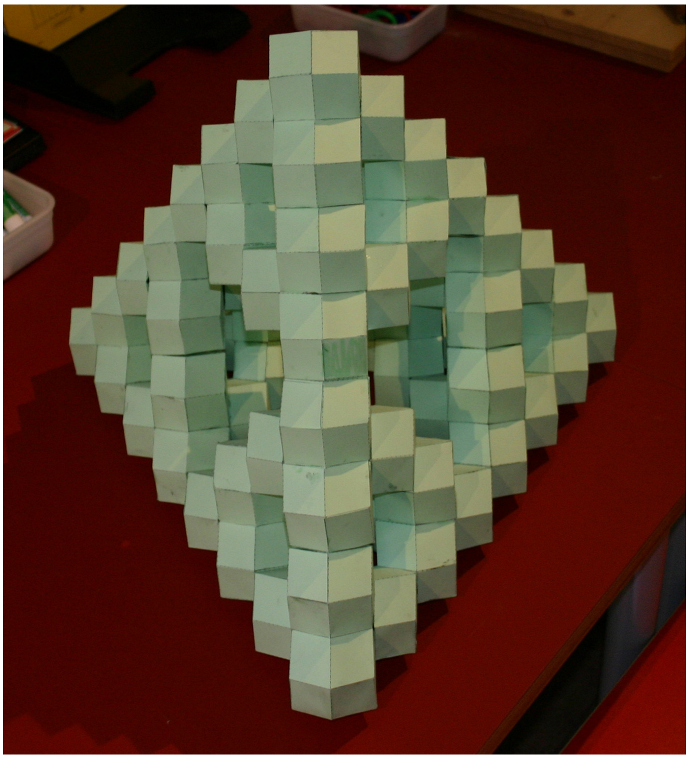



Abb. 9: Sierpiński-Tetraeder der dritten Stufe aus Rhombendodekaedern, Erlebnisland Mathematik, Dresden, September 2009. Schaut man entlang der Geraden, die die Mittelpunkte zweier gegenüberliegender Kanten des Tetraeders verbindet, so wird das Fraktal blickdicht (rechts). Das gilt auch für den Grenzfall unendlich vieler Iterationen.

Arbeitsgruppe, sondern von einer Einzelperson. Eva Nowak, Mathematikerin aus Begeisterung, aber ohne feste (Lehrer-)Stelle, hat damit angefangen und es dann zum allergrößten Teil selbst vollendet (Abb. 8).

„Das herannahende Schulfest gab mir dann genügend Druck, um das Tetraeder trotz Unlust fertigzustellen, auch wenn mich meine Freunde für verrückt erklärt hatten, nachdem ich in den letzten zwei Wochen einige Freizeittermine absagte mit der Begründung ‚ich muss blaue Dreiecke kleben'. Zwar hatte sich gegen Ende ab und an jemand erboten, mir doch zu helfen, dann hatte ich … aber das Zusammenbauen schon so optimiert, dass ich Hilfe ablehnte, eine Einweisung und Hilfestellung von mir hätte mehr Zeit gebraucht, als es selbst zu machen. Nun denke ich trotzdem sehr überzeugt ‚nie wieder blaue Dreiecke!', aber man könnte ja die Farbe ändern! ;-) Die Vorschläge der Mathelehrer, nun eine weitere Iterationsstufe zu erschaffen, habe ich vehement abgelehnt – ich nicht mehr. Nicht allein!"

3.1.1 Sierpiński-Tetraeder aus Rhombendodekaedern

Eine interessante Variante des Sierpiński-Tetraeders nutzt die Tatsache, dass es für das mathematische Fraktal, das heißt den mengentheoretischen Grenzwert der Iterationsfolge, nicht auf die Anfangsfigur ankommt (wenn die nicht gerade die leere Menge ist). Die charakteristische Tetraederform mit den oktaederförmigen Löchern jeder Größe hängt nicht an der Anfangsfigur, sondern an der Iterationsvorschrift; sie stellt sich auch dann ein, wenn man nicht mit einem Tetraeder anfängt.

Das gibt einem Freiheiten bei der Wahl der Ausgangsfigur. Natürlich sollte sie möglichst einfach und symmetrisch sein und zum Fraktal passen. Da bietet sich als erste Wahl die Kugel an, mit dem zusätzlichen Reiz, dass die erste Iterationsstufe sich fast von selbst einstellt: Man lege drei gleiche Kugeln dicht an dicht auf den Tisch und eine vierte in die Mitte obenauf. Legt man nach demselben Muster viele Kugeln auf den Tisch und in weiteren Schichten darauf, so ergibt sich die berühmte keplersche Kugelpackung [4].

Leider ist die Kugel für das Kartonbasteln völlig ungeeignet. Also geht man von der Kugel über zu der Voronoi-Zelle einer Kugel in der keplerschen Kugelpackung. Das ist die Menge aller Punkte, die dem Mittelpunkt der Kugel näher sind als dem Mittelpunkt jeder anderen Kugel der Packung. Diese „Privatsphäre" jeder Kugel ist ein Rhombendodekaeder: Man nehme einen Würfel und setze auf jede seiner Flächen eine Pyramide mit der Höhe „halbe Würfelkante".

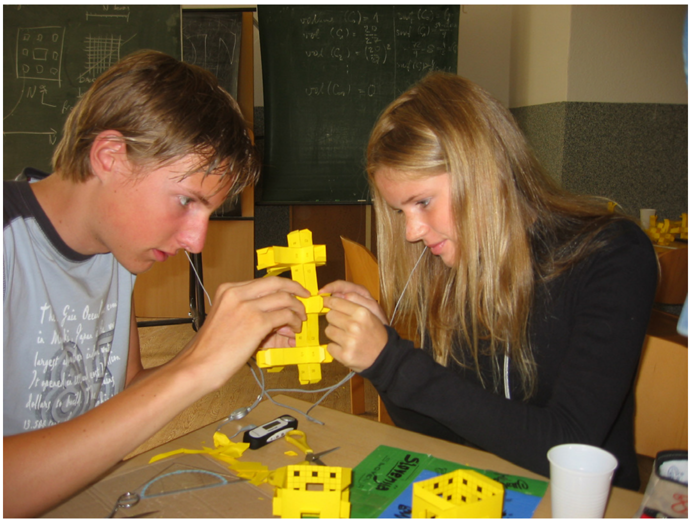
Die Voronoi-Zellen zu dem genannten Kugel-Viererpack liegen dicht an dicht, so dass sich ein geschlossener Körper ergibt. Jede vierte Fläche liegt im unsichtbaren Inneren und muss deswegen überhaupt nicht ausgeführt werden. In den folgenden Iterationsstufen öffnen sich wieder die für das Sierpiński-Tetraeder typischen Löcher. Aber stets berühren sich die Rhombendodekaeder mit ganzen Rautenflächen. Man kann sie also im Prinzip flächig zusammenkleben, was die Sache sehr stabil macht.

Die Anregung dazu habe ich aus einem völlig anderen Kontext [5]. Man erweitere das Pascalsche Dreieck zum Pascalschen Tetraeder; das enthält die Koeffizienten der verschiedenen Terme, die entstehen, wenn man $(a+b+c)^n$ ausmultipliziert. Das Pascalsche Dreieck modulo 2 (das heißt, man macht die ungeraden Terme schwarz und die geraden weiß) gibt im Limes das Sierpiński-Dreieck; entsprechend gibt das Pascalsche Tetraeder modulo 2 das Sierpiński-Tetraeder.

Zur Einjahresfeier des Dresdner Mathematikmuseums „Erlebnisland Mathematik" [6] haben wir am 5. September 2009 einen ersten Prototyp fertiggestellt (Abb. 8). Die nächste Stufe ist in Arbeit.

3.2 Mengerschwamm

In einer weiteren „Känguru"-Veranstaltung im August 2004 am Werbellinsee war dann der Mengerschwamm an der Reihe. Ausgangsfigur dieses ebenfalls sehr populären Fraktals ist ein Würfel. Aus einem großen Würfel macht man zwanzig kleine, indem man ihn in 3·3·3 Teilwürfel zerlegt und den zentralen Teilwürfel jeder



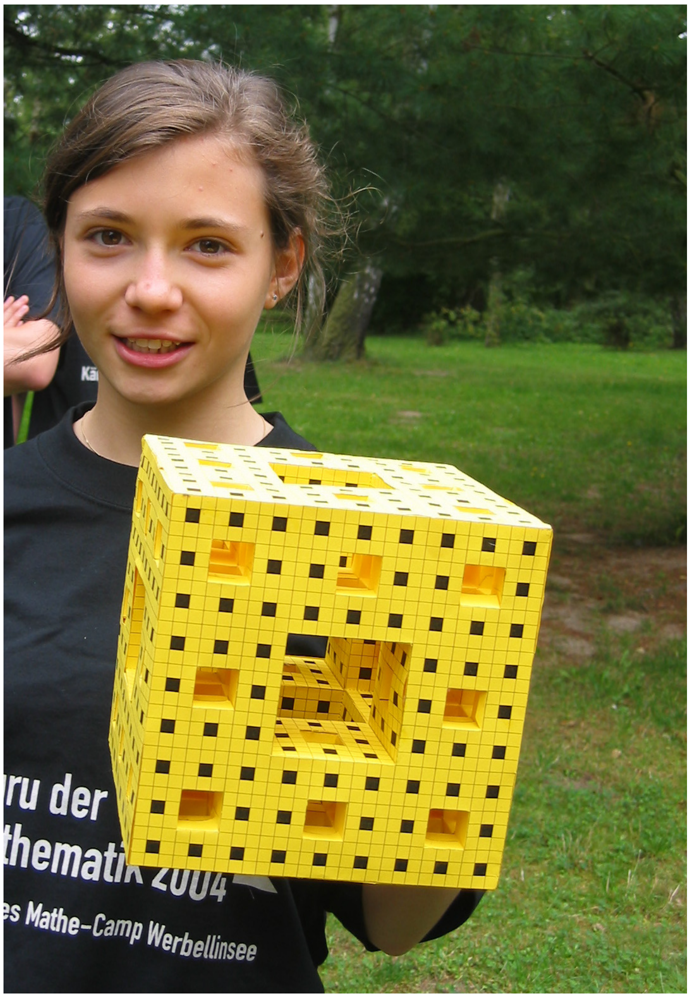


Abb. 10: Der Mengerschwamm vom Werbellinsee, August 2004, im Bau (oben) und vollendet (rechts)

Seitenfläche sowie den zentralen Teilwürfel des ganzen Würfels wegnimmt. Das Fraktal entsteht, indem man diese Iterationsabbildung immer wieder auf die entstehenden Teilwürfel anwendet.

Mit jeder Iteration verzwanzigfacht sich also die Zahl der Elementarwürfel. Mein Bausatz liefert unter Weglassung der zahlreichen unsichtbaren Teilflächen und Zusammenfassung vieler in einer Ebene liegender Flächen einen Mengerschwamm der zweiten Stufe mit 400 kleinen Würfeln; eine dritte Iterationsstufe wird durch aufgedruckte schwarze Quadratchen (anstelle der Löcher) angedeutet (Abb. 10).

Für die nächste Iteration hätten wir zwanzig Exemplare dieses Kartonbauwerks verfertigen müssen. Aber dieses Ziel haben wir weit verfehlt, denn diesmal waren die Teilnehmer weit langsamer als die Testpersonen, mit denen ich den Entwurf zuvor probegebastelt hatte.

3.4 Werbecks Dodekaeder

Bei einem platonischen Fraktal muss man die kleinen Polyeder nicht in die Ecken des großen setzen. Nimmt man statt der Ecken die Flächenmitten (und die Größenverhältnisse wieder so, dass die kleinen Polyeder einander wieder berühren, ohne sich zu durchdringen), so kommt zumindest für das Dodekaeder ein sehr hübscher Körper heraus. Die Idee habe ich von der (damaligen) Website des Wuppertaler Künstlers Stephan Werbeck [7]. Dieses fraktale Dodekaeder ist ein recht dankbares Bastelobjekt, denn die kleinen Dodekaeder grenzen nicht nur entlang von Kanten aneinander, sondern diese gemeinsamen Kanten stoßen ihrerseits an den Ecken aneinander, was dem Gesamtgebilde große Stabilität verleiht.

Da die Ecken des ursprünglichen Dodekaeders bereits in der ersten Iterationsstufe verschwinden und stattdessen die Flächenmittelpunkte prominent hervortreten, nimmt das Werbeck'sche Dodekaeder mit zunehmender Iterationszahl immer mehr die Form eines Ikosaeders an.

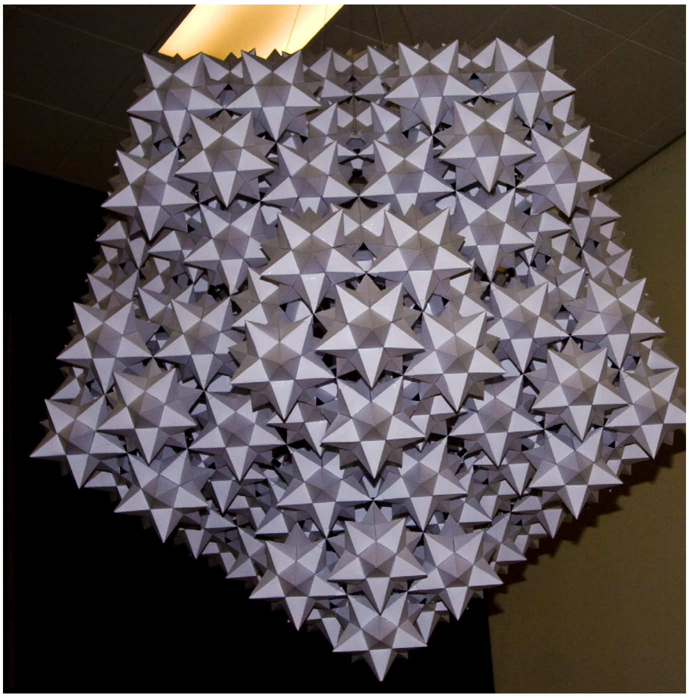
Ein Werbeck'sches Dodekaeder der ersten Stufe ist schnell zusammengebaut. Eines der zweiten Stufe enthält auch nur 144 elementare Dodekaeder und macht schon richtig etwas her. Teilnehmer des Münchner Geometriewochenendes haben es nebenher zusammengebaut, als Pausenfüller, weil ihnen die der Vollendung näherrückenden Ikosaeder des Hauptprojekts keinen Platz mehr zum Mitarbeiten ließen (Abb. 5 rechts). Auf einer Akademie für Hochbegabte („Deutsche SchülerAkademie") im Sommer 2002 haben wir es nach einem verbesserten Entwurf mit ungefähr 20 Leuten an einem Abend nachgebaut.

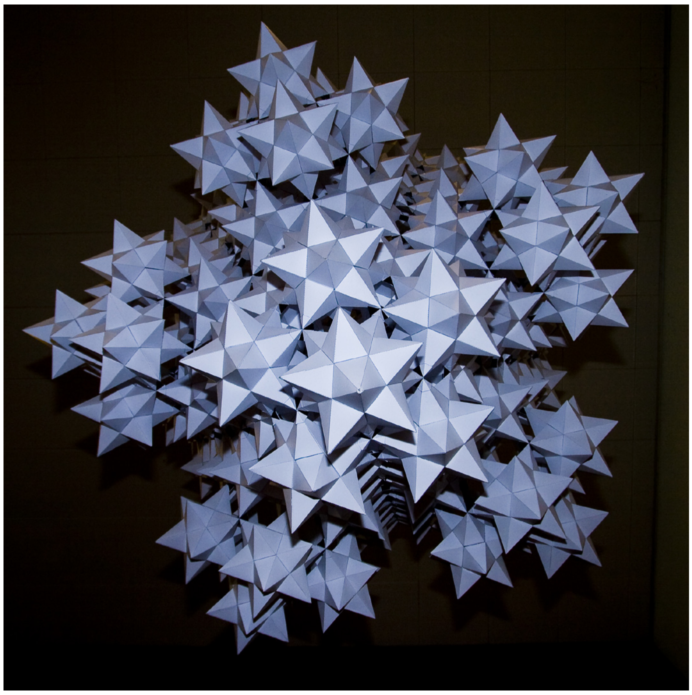
3.5 Das „klassische" fraktale Dodekaeder

Setzt man nach Sternemanns Rezept die kleinen Dodekaeder in die Ecken des großen, so wachsen die Anzahlen mit dem Faktor 20 statt 12 pro Iteration, und nicht nur das: Der ganze Körper ist auch wesentlich „luftiger" als das Werbeck'sche Dodekaeder, eine Eigenschaft, die sich über die fraktale Dimension quantifizieren lässt (siehe den Beitrag von Wilhelm Sternemann). Ein fraktales Dodekaeder der ersten Stufe haben wir in München ebenfalls als Pausenfüller gebastelt. Ein Teilnehmer, Hans Willkomm, nahm daraufhin mit seinen Schülern das Dodekaeder der zweiten Stufe in Angriff und wusste hinterher zu berichten, dass die Steifigkeit des Kartons nicht ausreichte, um das vollendete Werk am Durchhängen zu hindern.

Für unser eingangs geschildertes Lüdinghausener Projekt sahen wir deswegen ein stabilisierendes Skelett aus Holzleisten vor. Nach einigem Überlegen – auch eine interessante Aufgabe für einen Leistungskurs der 13. Klasse – ergab sich, dass diese Leisten die Kanten eines Ikosaeders bilden müssen. Jede Leiste hat als Querschnitt ein gleichschenkliges Dreieck mit einem Winkel von ungefähr 63 Grad zwischen den beiden gleichen Schenkeln, wobei die zum Scheitel dieses Winkels gehörige Kante der Leiste nach außen weist. Genau dann nämlich liegen zwei Paare von Dodekaedern den Seitenflächen jeder Leiste an, sodass das Skelett genau ins Fraktal passt. Es war beim Zusammenbau nicht ganz einfach, die Dinger richtig zu orientieren, weil die drei Winkel sich nur sehr geringfügig unterscheiden.

Sternemann fand nicht nur einen Schreiner, der uns Dreiecksleisten mit diesen speziellen Winkeln zurechtfräste, sondern auch einen metallverarbeitenden Betrieb, der aus Edelstahl „Schuhe" fertigte, in die jeweils fünf Leisten hineinschlupfen konnten. Im fertigen Ikosaeder sitzen die Schuhe in den Ecken und stellen sicher, dass die Leisten in den richtigen Winkeln zueinander sitzen. Die





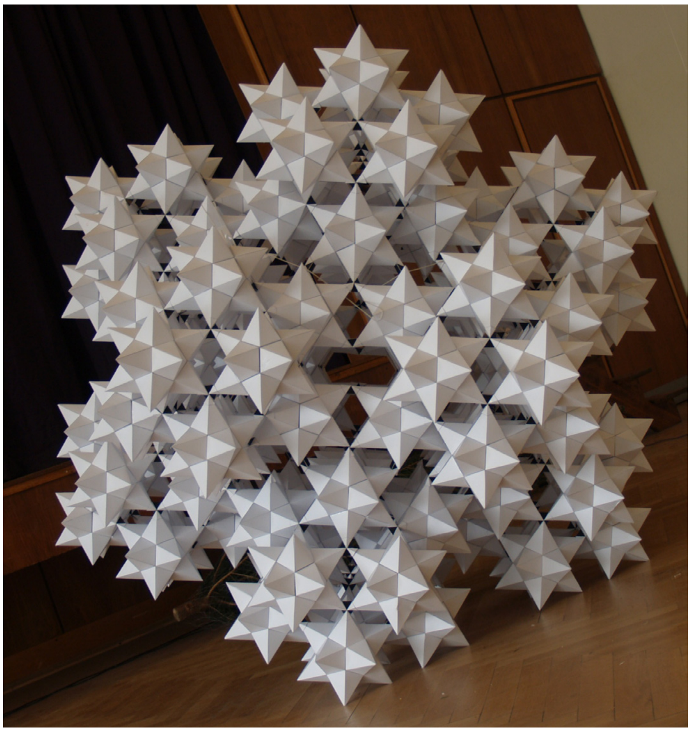


Abb. 11: Der fraktale Keplerstern von Lüdinghausen 2008. Die Bilder zeigen ein und dasselbe Objekt! Fotos von Wolfgang Urbaniak.

Leisten ließen wir noch nicht auf die richtige Länge zuschneiden, weil wir erst am fertigen Blechobjekt ausmessen wollten, um wie viel sie an den Enden gekürzt werden müssten.

Die theoretische Länge der Ikosaederkanten – von Ecke zu Ecke – zu berechnen war dann von all den Rechnereien die leichteste Übung; man kennt ja die Dualitätsbeziehung zwischen Dodekaeder und Ikosaeder. Und genau an der Stelle haben drei ausgebildete und praktizierende Mathematiker (Sternemann, sein Luxemburger Kollege und ich) gemeinsam einen dämlichen Rechenfehler begangen – $\sqrt{2}$ mit 2 verwechselt – und ihn erst bemerkt, als sich bei der Endmontage am Sonntag früh die dreißig soeben zurechtgesägten Holzleisten als zu kurz herausstellten. Da konnte man die drei Mathematiker vernehmlich Scheiße schreien hören. Wie gut, dass Sternemann vorsorglich die doppelte Menge Hölzer bestellt hatte. Das hat die Endmontage samt Feier gerettet.

Es geht übrigens auch ohne Metallschuhe. Brunhilde Juraschek, Lehrerin für Mathematik und Physik am Felix-Klein-Gymnasium Göttingen, hat die dreikantigen Holzleisten an den Enden schräg zugeschnitten, sodass sie präzise aneinanderpassten, und zusammengeleimt. Die Metallstifte, die zur Fixierung der Leimung durch die beteiligten Hölzer getrieben wurden, hätte man hinterher auch wieder herausnehmen können, berichtete sie.

3.6 Das Keplerstern-Fraktal

Nach den platonischen Körpern kommen als „zweitregelmäßigste“ die archimedischen Körper und die Kepler-Poinsot’schen Sternkörper. Man verlängere alle Kanten eines regelmäßigen Dodekaeders, bis sich jeweils fünf wieder in einem Punkt treffen. Das Ergebnis ist der Keplerstern: ein Dodekaeder, das auf jeder seiner zwölf Flächen eine fünfseitige Pyramide mit dem Verhältnis $\tau=(\sqrt{5}+1)/2$ (Goldener Schnitt) von Seitenkante zu Bodenkante sitzen hat.

Der Keplerstern hatte es Sternemann angetan, weil er sich zum Fraktalisieren zu eignen schien. In der Tat: Die konvexe Hülle des Keplersterns ist das reguläre Ikosaeder, und das konnten wir ja schon fraktalisieren. Von einer Iterationsstufe zur nächsten ist es ein vergleichsweise milder Faktor von 12, sodass man die zweite Stufe mit 144 elementaren Teilen ins Auge fassen konnte, auch wenn ein einzelner Keplerstern einen deutlich höheren Bastelaufwand erfordert als ein Ikosaeder. Ersetzt man die elementaren Ikosaeder des Ikosaederfraktals durch Keplersterne, so treffen sich zwei elementare Teile nicht mehr entlang einer Kante, sondern nur noch an deren Endpunkten. Das ist zum Basteln ähnlich problematisch wie das Sierpiński-Tetraeder; allerdings treffen sich in manchen Punkten nicht nur zwei, sondern drei elementare Teile, was der ganzen Sache etwas mehr Halt gibt.

Am Ende stellte es sich als zweckmäßig heraus, alle Keplersterne einzeln zu basteln, sie hinterher in – ebenfalls aus Karton gebastelte – Schuhe zu stecken und darin festzukleben. Das Gesamtwerk hält ohne weitere Stützungsmaßnahmen die Form, weil jeder einzelne Keplerstern durch Stabilisierungsstreben im Inneren sehr steif gemacht wird.

An einem Wochenende Ende November 2008 in Lüdinghausen, das dem Muster der erfolgreichen Veranstaltung drei Jahre zuvor folgte, haben wir den fraktalen Keplerstern der zweiten Stufe vollendet – fast; die Endmontage musste wenige Tage später nachgeholt werden. Die Vielzahl an Sternen weckt, passend zum Termin, durchaus weihnachtliche Assoziationen, und Freunde des Goldenen Schnitts und der Symmetrie kommen reichlich auf ihre Kosten (Bild 11). Zahlreiche weitere Bilder von dieser Veranstaltung sind unter http://sterne.canisianum.net zu finden.

4. Andere geometrische Großprojekte

4.1 Die Projektion des 120-Zells

Bei diesem Projekt ist der theoretische Aufwand erheblich; dagegen hält sich der Bastelaufwand in Grenzen.

Es geht um die Verallgemeinerung der platonischen Körper auf vier Dimensionen. Ein vierdimensionales reguläres Polytop wird begrenzt von lauter gleichen (gewöhnlichen, dreidimensionalen) platonischen Körpern, von denen stets in einer Ecke gleich viele zusammentreffen. Es gibt ihrer sechs, darunter das prachtvolle 120-Zell aus 120 Dodekaedern.

Wenn man das Kantenmodell eines Dodekaeders, das auf dem Tisch liegt, mit einer punktförmigen Lichtquelle von oben beleuchtet, bildet der Schatten auf dem Tisch eine zweidimensionale Projektion (das „Schläfli-Diagramm“) des Körpers; dabei stecken in dem Projektionsbild des obersten Fünfecks die Projektionsbilder der anderen elf Fünfecke. Dieses Prinzip, eine Dimension höher praktiziert, macht aus dem 120-Zell einen greifbaren, dreidimensionalen Gegenstand. Er besteht aus 120 Dodekaedern, deren größtes die 119 anderen enthält.

Alle diese Dodekaeder kann man aus Karton herstellen. Da die Zentralprojektion die Proportionen verzerrt, sind sie alle nicht regelmäßig, bis auf das kleinste in der Mitte. Aber sie passen lückenlos aneinander, drei um jede Kante, vier um jede Ecke. Bei der „nahe liegenden“ Projektion, bei der die Lichtquelle in der vierten Dimension „über“ dem Körpermittelpunkt des nächstgelegenen Dodekaeders hängt, gibt es insgesamt nur neun verschiedene Sorten verzerrter Dodekaeder, sodass die ganze Sache einigermaßen übersichtlich bleibt.

Diese vielen Dodekaeder habe ich zusammen mit einem Mathematik-Leistungskurs am Darmstädter Ludwig-Georgs-Gymnasium gebastelt. Dank an die Lehrerin, Frau Gabriele Getrost, die mir für die Aktion ihr Lehrerpult abtrat und sogar Klausuraufgaben mit dem Thema 120-Zell stellte.

Die neun Klassen verzerrter Dodekaeder bekamen verschiedene Farben zugewiesen. Das äußerste, alle umfassende Dodekaeder habe ich als Käfig ausgeführt, eine Art verbreitertes Kantenmodell aus zwei ineinander steckbaren Hälften [8]. Man kann die obere Hälfte abnehmen, die 119 Dodekaeder eins nach dem anderen von der einen in die andere Hälfte umfüllen und dabei beliebig tiefe Einblicke in die Struktur des 120-Zells nehmen (Abb. 12). Eigentlich eine sehr hübsche Sache.

Die Erfahrungen mit dem Projekt waren gemischt. Die Teilnehmer des Leistungskurses hatten zum Teil erhebliche Schwierigkeiten, die Motivation fürs Basteln aufzubringen. Unser Werk wurde rechtzeitig zum Schulfest fertig und dort auch ausgestellt. Hinterher stellte sich heraus, dass das gute Stück ein paar Zentimeter zu groß für die Schulvitrine war und vor allem in der Vitrine nicht wesentlich mehr von sich hergemacht hätte als ein ganz gewöhnliches Dodekaeder.

Das Objekt entwickelt seinen Reiz nicht beim Anschauen, sondern erst beim Auseinandernehmen und Zusammensetzen. Das aber tun die Leute nicht gern, selbst wenn sie es dürfen. Ich habe das Objekt auf einer großen Publikumsmesse für Modellbau auf dem Stand der Kartonmodellbauer ausgestellt. Die einzigen unter den zahlreichen Besuchern, die sich ernsthaft dafür erwärmen konnten, waren zwei etwa dreizehnjährige Mädchen. Die fanden das exotische Bauklötzchenspiel irgendwie schnuckelig, wollten aber verständlicherweise von platonischen Körpern in vier Dimensionen nichts wissen.

Inzwischen denke ich über ein Kantenmodell des (projizierten) 120-Zells nach. Noch ist nicht klar, ob ein praktikabler Bastelbausatz daraus wird. Vorübungen mit dem 8-Zell aus acht Würfeln (dem vierdimensionalen Hyperwürfel) und dem 24-Zell aus 24 Oktaedern sind erfolgreich verlaufen.

4.2 Raumfüllung mit Polyedern

Neben dem Würfel gibt es etliche Polyeder, die man in beliebig vielen Exemplaren lückenlos und raumfüllend aufeinanderstapeln kann. Zwei bekannte Raumfüller sind das Rhombendodekaeder und der Ikosaederstumpf [9]; beide sind aus der Raumfüllung durch Würfel herleitbar. Weniger bekannt ist, dass die beiden auch direkt ineinander übergeführt werden können: In einer Raumfüllung mit Rhombendodekaedern kann man jedes Teil so zersägen, dass die Fragmente sich zu Oktaederstümpfen fügen, ohne dass eines von ihnen bewegt werden müsste. Arthur Schoenflies, der „Vater der Kristallografie", hat zum Studium gewisser Kristalle diese Fragmente aus Gips herstellen lassen. In einer Vitrine des Göttinger Mathematischen Instituts sind sie bis heute zu bewundern.

Ich habe die 250 Teilnehmer des hessischen „Tags der Mathematik“ 2003 in Hanau eine große Anzahl Rhombendodekaeder und dazu passende Oktaederstümpfe basteln lassen, dazu eine relativ geringe Menge Schoenflies-Klötzchen. Mit etwas Nachhilfe durch hochkant gestellte Tische konnten wir nicht nur die Polyeder beider Sorten raumfüllend aufstapeln, ohne dass sie wegrutschten, sondern

Abb. 12: Dreidimensionale Projektion des vierdimensionalen 120-Zells, zum Auseinandernehmen und Zusammensetzen

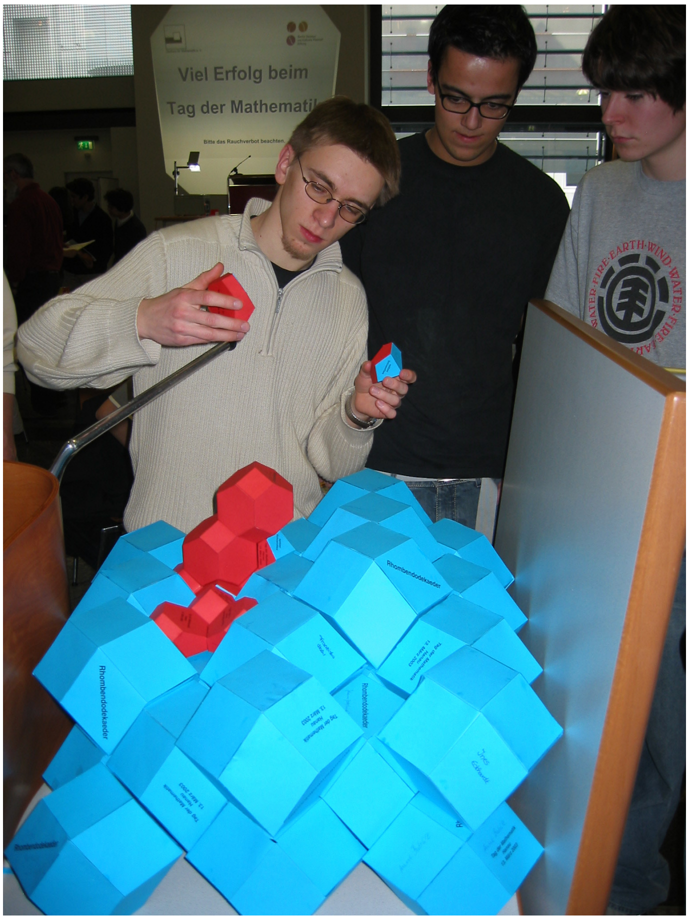


Abb. 13: Raumfüllungen durch Rhombendodekaeder (blau) und Oktaederstümpfe (rot) gehen durch Schoenflies-Klötzchen ineinander über. Tag der Mathematik Hanau 2003

auch mit einer dünnen Schicht Schoenflies-Klötzchen einen Übergang zwischen beiden Stapeln bewerkstelligen (Abb. 13).

Das Projekt war dem Konzept des „Tags der Mathematik“ angepasst: Es handelt sich um einen Klausurwettbewerb; die Schüler bearbeiten die Aufgaben am Samstagvormittag, und am Nachmittag werden bereits die Preise vergeben. Meine Aktion hatte die Pause zu füllen, die die Korrektoren zum Auswerten der Klausuren benötigten. Damit war sie zeitlich eng begrenzt – eine bis höchstens zwei Stunden – und sollte an die noch rauchenden Köpfe der Teilnehmer nicht allzu hohe Anforderungen stellen.

Da jeder „sein“ Polyeder für sich allein bauen kann und sich die Zusammenarbeit unter den Erbauern auf das Einbringen in den Stapel beschränkt, eignet sich eine derartige Aktion auch für sehr große Teilnehmerzahlen. Zusätzlich kann jeder sein Werk als Souvenir mit nach Hause nehmen.

4.3 Unendliche Polyeder

Dass scheinbar kleine Unterschiede über das Gelingen oder Misslingen einer solchen Aktion entscheiden, zeigt das folgende Gegenbeispiel. Beim „Tag der Mathematik“ im März 2006 in Wetzlar, unter praktisch gleichen Rahmenbedingungen, habe ich die Massen gebeten, ein „unendliches Polyeder“ zu bauen – die endliche Näherung eines solchen natürlich. Es handelt sich um eine – im Prinzip unendliche – Menge von Quadraten, die Kante an Kante aneinandergrenzen, ohne dass eine Kante freibleibt; das kann man mit einer gewissen Berechtigung ein verallgemeinertes Polyeder nennen. In jeder Ecke treffen sich fünf Quadrate. Damit ist das Polyeder notwendig nicht konvex; dieses spezielle Polyeder ist sogar räumlich periodisch [10, 11].

Wer die beiden computergrafischen Darstellungen in [10] sieht (Abb. 14 unten), hat große Schwierigkeiten zu glauben, dass beide auf dasselbe Polyeder hinauslaufen; es stimmt aber, wie ich zu meiner Überraschung feststellte. Um diese Überraschung und den zugehörigen Lerneffekt den Teilnehmern zu vermitteln, ließ ich jeweils die Hälfte der Leute Teile des Polyeders nach der einen wie der anderen Bauvorschrift zusammenbasteln. Aber das krönende Aha-Erlebnis blieb aus: Da die Bastelmotivation brüchig war, kamen nicht rechtzeitig genug Einzelteile zusammen, um ein eindrucksvolles Objekt herzustellen. Das gelang erst nach dem Ereignis der Lehrerin Irmtrud Niederle von der Fürst-Johann-Ludwig-Schule in Hadamar, die unsere unfertigen Werke zur Vollendung mitgenommen hatte (Abb. 14 oben).

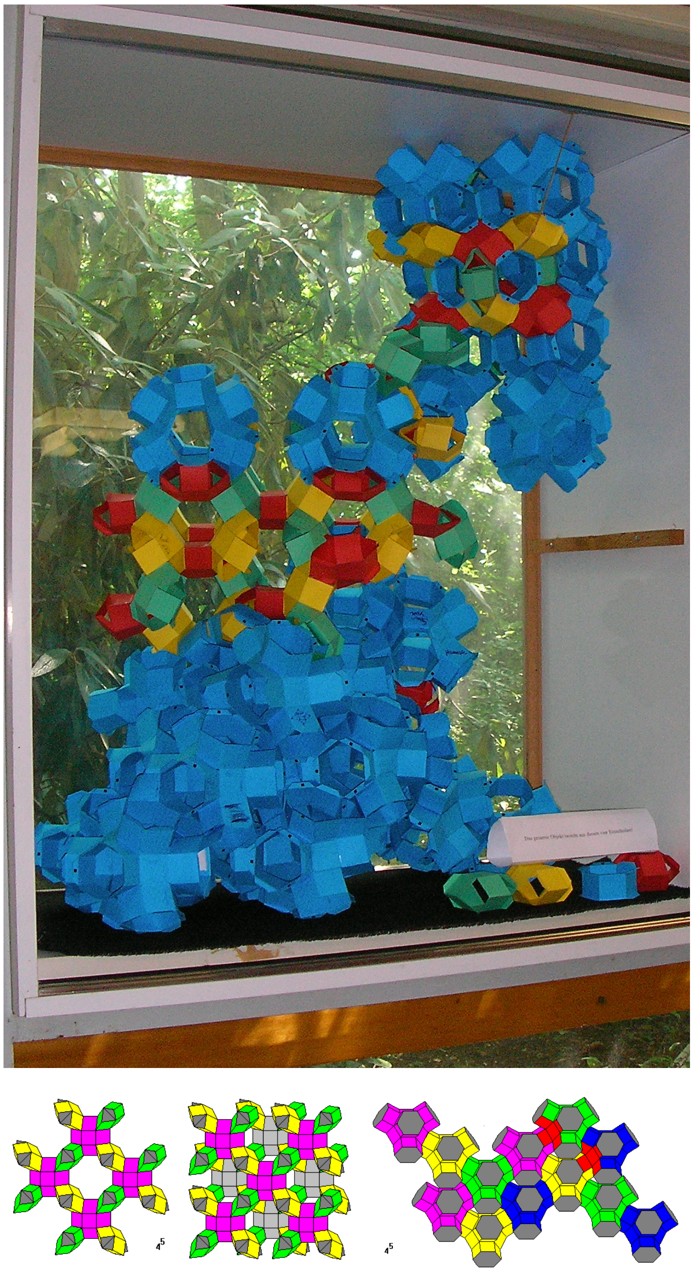


Abb. 14: Zwei Ansichten desselben unendlichen Polyeders aus lauter Quadraten von Steven Dutch (unten); das unendliche Polyeder von Wetzlar, nachträglich fertiggestellt unter Leitung von Irmtrud Niederle

Vielleicht kann eine nach diesen Erfahrungen verbesserte Bastelanleitung die Idee doch noch zum Erfolg führen. Der Duisburger Physiker Norbert Treitz hat anlässlich einer Ausstellung seiner Werke in Beutelspachers „Mathematikum“ den Besuchern anheimgestellt, „im Vorübergehen“ an einem wesentlich einfacheren unendlichen Polyeder mitzubasteln. Da konnte ein einzelner Besucher mit geringem Aufwand bereits einen ernstzunehmenden Beitrag leisten. Von dieser Möglichkeit haben viele Leute Gebrauch gemacht, ohne dass man dafür eine Veranstaltung ausrufen musste, mit ansehnlichem Ergebnis [12].

5. Praktisches

Für ein platonisches Fraktal (genauer: eine endliche Iterationsstufe eines solchen) könnte man die Beteiligten lauter kleine platonische Körper einzeln basteln lassen und diese in einem zweiten Schritt zusammenfügen. Ich weiß von zwei Sierpiński-Tetraedern, die auf diese Weise entstanden sind: das oben erwähnte aus Stuttgart und ein weiteres unter Uschi Embacher vom Gymnasium Moosach in München. Sternemann hat an seiner Schule auch einen Mengerschwamm aus Plastikwürfeln und einen weiteren aus Holzwürfeln zusammenkleben lassen.

Ich verfolge bewusst eine andere Strategie. Viele Flächen eines platonischen Fraktals sind im Inneren des Körpers verborgen und daher unsichtbar; wenn sie für die mechanische Stabilität nicht gebraucht werden, lasse ich sie weg und spare damit den Bastlern entsprechend viel Arbeit.

Eine typische Situation bei platonischen Fraktalen ist: Zwei kleine platonische Körper grenzen mit einer Kante aneinander, und von den vier dieser gemeinsamen Kante anliegenden Flächen liegen je zwei in einer Ebene, und zwar „kreuzweise“. Beim Mengerschwamm liegen sehr viele (8^k bei Iterationsstufe k) kleine Würfelchen in der Ebene einer Fläche des Urwürfels. In beiden Fällen gestalte ich den Entwurf so, dass nach Möglichkeit zwei (oder mehr) in einer Ebene liegende Flächen, auch wenn sie zu verschiedenen Elementarpolyedern gehören, aus einem Stück Papier bestehen. Das hilft der Präzision beim Kleben und hinterher dem Gesamteindruck ungeheuer auf!

Von zwei Paaren kreuzweise in einer Ebene liegender Flächen kann nur eines in den Genuss dieser Präzisionshilfe kommen, sonst müssten sich zwei Papierstücke entlang der gemeinsamen Kante durchdringen. Oder man schlitzt beide Stücke entlang einer halben Kante und steckt sie dann ineinander; dieses Rezept habe ich beim Werbeck'schen Dodekaeder erfolgreich praktiziert. In beiden Fällen bricht die technische Ausführung eine Symmetrie des Objekts, mit der Folge, dass die Bastelei komplizierter wird und höhere Aufmerksamkeit erfordert – ein Nachteil, der durch die Arbeitsersparnis und die höhere Präzision mehr als wettgemacht wird.

Allerdings sehen, vor allem im Frühstadium der Arbeit, die Leute nur mühsam oder gar nicht, was aus diesen merkwürdig geformten und mit allerlei Hinweiszeichen verzierten Bastelteilen werden soll. Das steht zwar auf den schriftlichen Anleitungen, die ich auf den Basteltischen auslege; aber die liest im Allgemeinen niemand. Ich pflege zu geeigneten Zeitpunkten auf einen günstig gelegenen Tisch zu steigen und das richtige Falten und Kleben an einem eigens hergestellten vergrößerten Modell zu demonstrieren.

Auch motivierte Leute suchen nicht aktiv nach Beschäftigung, wenn sie glauben, ihre Arbeit erledigt zu haben, oder gerade nicht weiter wissen. Vielmehr bieten die Abfall-Papierschnipsel reichlich Gelegenheit zu selbstbestimmter kreativer Betätigung mit Filzstift, Schere und Klebstoff. Man muss ständig durch die Reihen wandern und Empfehlungen zu zielführender Betätigung geben; bei größeren Veranstaltungen empfiehlt es sich, kundige Helfer mit auf die Wanderschaft zu schicken. Sammeln Sie besser in regelmäßigen Abständen die Abfallschnipsel ein! Das nimmt der ablenkenden Kreativität die Nahrung und beugt Konflikten mit dem Reinigungspersonal vor.

Bisher habe ich keinen anderen geeigneten Klebstoff gefunden als „Uhu flinke Flasche“ – ein schwerer Schlag für den Umweltbewussten und ein zwingender Anlass zu häufigem Lüften, denn von den Lösungsmitteldämpfen in dieser Menge wird einem ziemlich schnell übel. Aber das lösungsmittelfreie „grüne“ Uhu macht das Papier wellig und lässt kaum Zurechtrücken nach dem Erstkontakt der beiden Papierflächen zu. Einige Profis schwören auf Holzleim; aber auch der erfordert, dass man beim ersten Zusammenfügen schon fast einen Treffer landet.

Es ist mühsam, aber aller Erfahrung nach zweckmäßig, wenn der Veranstalter das komplette Material – Ritzmesser (Cutter), Scheren, Pappunterlage zum Ritzen und Klebstoff – bereitstellt. Zu viele Schüler vergessen eins der vielen Dinge mitzubringen. Keine falsche Sparsamkeit bei den Cuttern! Einer pro Person ist die richtige Menge, sonst gibt es vor allem anfangs zu viel Leerlauf. Scheren und Klebstoff können sich jeweils zwei bis vier Leute teilen.

Es hat sich als sehr schwierig herausgestellt, den Zeitbedarf für die einzelnen Schritte des Bastelprozesses abzuschätzen. Eine halbe Stunde pro DIN-A-4-Bogen (Ritzen, Ausschneiden und erstes Zusammenkleben) ist eine gute Daumenpeilung. Allerdings konnte ich schon krasse Differenzen zwischen den Geschlechtern beobachten: Die Mädchen arbeiteten im Durchschnitt etwa dreimal so schnell wie die Jungen.

Wenn ein monumentales Werk sich der Vollendung nähert, finden immer weniger Hände Platz, an dem wachsenden Gebilde mitzuarbeiten. Damit keine Langeweile aufkommt, empfiehlt es sich, kleine Zusatzprojekte vorrätig zu halten und bei Bedarf hervorzukramen (oder auch nicht, wenn die Leute langsamer sind als erwartet). Am schönsten sind Gegenstände, die man mit nach Hause nehmen kann und die möglichst noch einen Bezug zum großen Werk haben, zum Beispiel ein einzelnes Dodekaeder, wenn ein Dodekaeder-Fraktal Gegenstand der Veranstaltung ist. Bei den großen Wochenendaktionen habe ich die Endmontage auf den Sonntagvormittag gelegt und zwar eine Uhrzeit angesagt, aber nicht besonders zur Pünktlichkeit gemahnt. Die wenigen motivierten Frühaufsteher gerieten sich beim Montieren nicht in die Quere, und die anderen kamen immerhin rechtzeitig, um die Vollendung zu feiern.

6. Pädagogisches

Technisch spricht nichts dagegen, an einem beliebigen Wochenende hundert Schüler zu einem derartigen Großprojekt zusammenzurufen. Aber die richtige Begeisterung kommt wohl erst auf, wenn noch ein besonderer Anlass hinzukommt. Das beschriebene Projekt von Lüdinghausen ließ sich glücklich mit einem Comenius-Projekt verbinden. Aus Partnerschulen in Frankreich, Luxemburg und Polen reisten Schülergruppen an; so kam zu der Mathematik und dem Spaß am Basteln die Völkerverständigung als Motiv hinzu.

Vielleicht genügt an Ihrer Schule die Vorbereitung auf ein Schulfest als Anlass. Oder es tun sich mehrere benachbarte Schulen zusammen, wenn sich im eigenen Haus nicht genug Begeisterte finden. Es muss auch nicht eine Zentralveranstaltung werden. Vier Schulen können jede für sich ein Sierpiński-Tetraeder der zweiten Stufe bauen, oder drei fraktale Ikosaeder der zweiten Stufe oder fünf Dodekaeder der ersten Stufe. Erst dann folgen das Zusammentragen aller Teilstücke und die feierliche Endmontage.

Kann der Bau eines solchen Riesenfraktals die Krönung eines Leistungskurses zum Thema fraktale Geometrie sein? Schwerlich. Wenn sich nur die Teilnehmer eines Leistungskurses an der Bastelei beteiligen, wird sie ätzend lang und eintönig. Da ruft man besser eine größere Anzahl an Mitstreitern zusammen.

Der mathematische Erkenntnisgewinn beim Basteln selbst hält sich in Grenzen. Erst das fertige Werk bietet ausgiebig Gelegenheit, nicht nur fraktale Geometrie, sondern räumliche Geometrie überhaupt am konkreten Objekt zu studieren. Und da gibt es jede Menge zu sehen: lauter weit entfernte Flächen, die alle in einer Ebene liegen, Kanten, die auf einer gemeinsamen Geraden liegen, den Goldenen Schnitt in den verschiedensten Erscheinungsformen sowie massenhaft Rotations- und Spiegelungssymmetrien.

Feiertagspädagogik? Sicher. Ein solches Projekt fällt eindeutig aus dem Schulalltag heraus. Erkenntnisse über platonische Körper, über Fraktale im Allgemeinen und platonische Fraktale im Besonderen sind auf den üblichen Wegen weitaus zeitsparender an die Schüler zu vermitteln. Auf Sekundärtugenden wie genaues Arbeiten, Geduld, Konzentration und Kooperation mit dem Tischnachbarn, der gerade das fehlende Einzelteil hat, kommt es zwar an, sie sollten aber nicht erst aus diesem Anlass eingeübt werden.

Nein – der entscheidende Effekt ist die Begeisterung für das gemeinschaftlich produzierte, eindrucksvoll anzusehende Werk.

Literaturhinweise

[1] Wilhelm Sternemann: Neue Fraktale aus platonischen Körpern. Spektrum der Wissenschaft 11/2000, 116–119
[2] Känguru der Mathematik. www.mathe-kaenguru.de
[3] Christoph Pöppe: Kartonbausätze für geometrische Körper. http://www.poeppe-online.de
[4] Christoph Pöppe: Der Beweis der Keplerschen Vermutung, Spektrum der Wissenschaft 4/1999, 10–13
[5] Georg Glaeser, Konrad Polthier: Bilder der Mathematik, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg 2009
[6] www.erlebnisland-mathematik.de; Christoph Pöppe: „Erlebnisland Mathematik“ in Dresden. http://www.spektrum.de/artikel/1007985
[7] Website von Stephan Werbeck: http://werbeck.num12.com/frame.html. Auf „Geometrie“ und dann auf „Konstrukte II“ klicken! Die letzten vier Bilder sind aufeinander folgende Iterationsstufen des im Text genannten Werbeck'schen Dodekaeders.
[8] Christoph Pöppe: Im R4 ist viel Platz. Spektrum der Wissenschaft 11/2004, 101–104
[9] Christoph Pöppe: Online-Serie zur räumlichen Geometrie, darin insbesondere die Folgen 3: „Neue Raumfüller“ und 4: „Die seltsamen Kristallklötzchen des Arthur Schoenflies“. http://www.wissenschaft-online.de/artikel/773614
[10] dieselbe Website, Folge 7: „Unendliche Polyeder“
[11] Steven Dutch: Wells' „Hyperbolic Tesselations“. http://www.uwgb.edu/dutchs/symmetry/hypwells.htm
[12] Christoph Pöppe: Wundergarten der Polyeder: http://www.spektrum.de/artikel/999815