

Von englischen und deutschen Postämtern

Teilnehmer:

Ricky Burzlaff	Wilhelm-Ostwald-Gymnasium, Leipzig
Robert Butz	Herder-Oberschule, Berlin
Jan Putzig	Heinrich-Hertz-Oberschule, Berlin
Antoni Schilling	Herder-Oberschule, Berlin
Jakob Steinbrück	Käthe-Kollwitz-Oberschule, Berlin
Patrick Zielonka	Herder-Oberschule, Berlin

Gruppenleiter:

André Henning	Humboldt-Universität zu Berlin
Elke Warmuth	Humboldt-Universität zu Berlin Mitglied im DFG-Forschungszentrum MATHEON „Mathematik für Schlüsseltechnologien“

Dass die Engländer fast immer in den technischen und wirtschaftlichen Bereichen die Nase vor den Deutschen hatten, ist schon längst aus der Geschichte bekannt. Nur in der Mathematik schien es bisher so zu sein, dass das Land von Gauß und Ries kaum zu schlagen war. Doch auch da können – wie das folgende Beispiel beweist – die Engländer eine Vorreiterrolle spielen. Wenn man sich anschaut, wie beispielsweise die Warteschlangen auf Postämtern gehandhabt werden, so kann man zwei unterschiedliche Varianten der beiden Staaten finden. Um zu untersuchen, welcher dieser Fälle der günstigere ist, haben wir zunächst an die Binomialverteilung erinnert, bevor wir uns mit dem Poissonprozess und den Markov-Ketten beschäftigt haben. Das Ziel dieser Gruppenarbeit war es also, das Problem der Warteschlangen in Postämtern mit Hilfe von mathematischen Modellen zu untersuchen.

1 Stochastischer Prozess

Zunächst stellt sich die Frage nach dem Begriff des „Stochastischen Prozesses“.

Definition: Ein stochastischer Prozess ist eine Familie von Zufallsgrößen (X_t) , die auf dem gleichen Wahrscheinlichkeitsraum definiert sind und Werte in einem Zustandsraum E annehmen. Die Variable t stellt dabei häufig die Zeit dar.

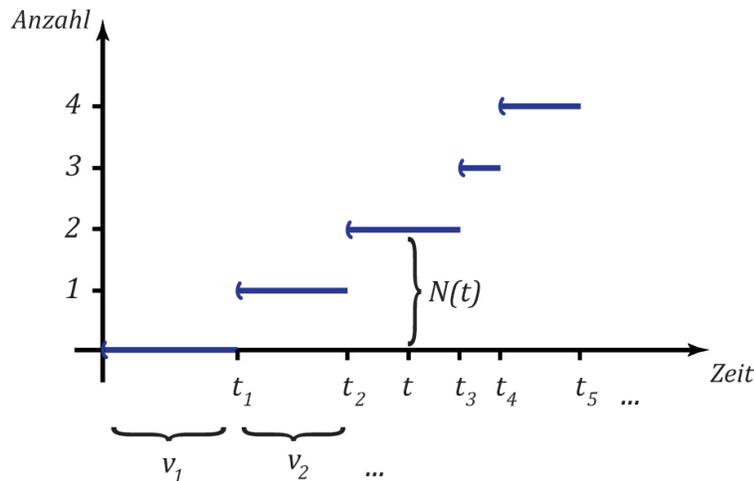
Das einfachste Beispiel eines stochastischen Prozesses ist die Bernoulli-Kette. Diese ist ein Zufallsversuch, bei dem es zu jedem Zeitpunkt $t = 1, 2, \dots, n$ nur relevant ist, ob ein gewisses Ereignis (Treffer) eintritt oder nicht (z.B. Treffer = 1; Niete = 0). Dabei gilt für die Wahrscheinlichkeit, k Treffer bei n Zufallsversuchen mit der Trefferwahrscheinlichkeit p zu erzielen:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

Die Teilversuche einer Bernoulli-Kette sind voneinander unabhängig. Damit ist sie das einfachste Beispiel einer Markov-Kette.

2 Poissonprozess

Der Poissonprozess $(N(t))$ ist ein diskreter stochastischer Prozess in stetiger Zeit, d.h. $N(t) \in E \subset \mathbb{N}, t \geq 0$ und $t \in \mathbb{R}$. Ein typischer Verlauf sieht so aus:



Hierbei bezeichnet v_i die i -te Wartezeit und $N(t)$ die Anzahl der Ankünfte bis zum Zeitpunkt t .

- **Annahme 1:** Der Prozess ist stochastisch zeitinvariant, d.h.

$$P(N(t_1 + c) - N(t_1) = k) = P(N(t_2 + c) - N(t_2) = k)$$

für alle $t_1, t_2, c \geq 0$.

- **Annahme 2:** Die Wartezeiten zwischen zwei Ereignissen sind unabhängige Zufallsvariablen.
- **Annahme 3:** Die Anzahlen der Ereignisse in disjunkten Intervallen sind unabhängige Zufallsvariablen. Der Erwartungswert $E(N(1))$ der Anzahl der Ereignisse pro Zeiteinheit heißt Intensität und wird mit λ bezeichnet.

Der Prozess startet mit $N(0) = 0$. Uns interessiert die Wahrscheinlichkeit

$$P(N(t) = k) \text{ für } k = 1, 2, 3, \dots$$

Um diese Wahrscheinlichkeit zu berechnen, wählen wir ein beliebiges aber festes t . Das Intervall $I = [0; t]$ wird in n disjunkte Teilintervalle der Länge $\frac{t}{n}$ zerlegt. Für die Anzahl N_i der Ereignisse in jedem Teilintervall gilt dann:

$$N_i = N\left(\frac{t}{n}\right) = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ > 1. \end{cases}$$

Wir definieren das Ereignis A als $\bigcap_{i=1}^n \{N_i \leq 1\}$. Das Gegenereignis \bar{A} tritt also ein, sobald ein i mit $N_i > 1$ existiert. Ziel ist es sicherzustellen, dass in einem sehr kurzen Teilintervall maximal ein Ereignis stattfindet, um das Problem mathematisch beherrschen zu können. Deshalb treffen wir folgende

- (Regularitäts-) **Annahme 4:**

Für $h \rightarrow 0$ gilt: $P(N(h) > 1) = o(h)^1$

Für $n \rightarrow \infty$ liefert Annahme 4: $P(N(\frac{t}{n}) > 1) = o(\frac{t}{n})$.

Aus den Annahmen 1 bis 3 folgt

$$\begin{aligned} P(N(t) = k) &= P(N_1 + N_2 + \dots + N_n = k) \\ &= P(\{N_1 + N_2 + \dots + N_n = k\} \cap A) \\ &\quad + P(\{N_1 + N_2 + \dots + N_n = k\} \cap \bar{A}). \end{aligned}$$

¹Ein Term $t(h)$ heißt von der Größenordnung $o(h)$ für $h \rightarrow 0$, falls $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t(h)}{h} = 0$.

Der zweite Summand ist wegen Annahme 4 von der Größenordnung $o(h)$. Deshalb betrachten wir nur den ersten Summanden. In diesem Summanden sind die N_i Bernoulli-Variablen und damit ist ihre Summe binomialverteilt mit n und $p = \frac{\lambda t}{n}$.

Daraus ergibt sich dann für diese Verteilung

$$P(N(t) = k) = \binom{n}{k} \left(\lambda \cdot \frac{t}{n}\right)^k \cdot \left(1 - \lambda \cdot \frac{t}{n}\right)^{n-k} + o(1)$$

und für den Grenzwert bei $n \rightarrow \infty$

$$P(N(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}.$$

Anschließend werden die Wahrscheinlichkeiten für die Länge der Wartezeiten in einem Poissonprozess gesucht. Zunächst gilt, dass $N(t) - N(s)$ und $N(t - s)$ für $0 < s < t$ identisch verteilt sind und für $0 < s_1 < s_2 < s_3 < \dots$ sind $N(s_1), N(s_2 - s_1), \dots$ unabhängig.

Die Wartezeiten v_1, v_2, \dots sind unabhängig und identisch verteilt, mit

$$P(v_1 \leq x) = 1 - e^{-\lambda x},$$

da

$$P(t_n \leq t) = 1 - P(t_N > t) = 1 - P(N(t) < n) = 1 - e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!}.$$

3 Markov-Ketten

Eine Markov-Kette ist ein stochastischer Prozess, bei dem das zukünftige Verhalten nur vom aktuellen Zustand und nicht von vorherigen Zuständen abhängt.

Definition: $X(t)$ sei der Zustand des Systems zum Zeitpunkt t , $t \in \mathbb{R}$, $X(t) \in E \subset \mathbb{N}$.

$(X(t))$ heißt Markov-Kette mit dem Zustandsraum E genau dann, wenn:

$$\begin{aligned} P(X(t_n) = i_n \mid X(t_1) = i_1, X(t_2) = i_2, \dots, X(t_{n-1}) = i_{n-1}) \\ = P(X(t_n) = i_n \mid X(t_{n-1}) = i_{n-1}) \end{aligned} \quad (1)$$

für alle endlichen Auswahlen von Zeitpunkten $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ und Zuständen gilt.

Eine Markov-Kette ist durch ihre **Anfangsverteilung**: $\{p_i = P(X(0) = i)\}$ und die **Übergangswahrscheinlichkeiten** $\{p_{ij}(s, t) = P(X(t) = j \mid X(s) = i)\}$ eindeutig bestimmt. Aus diesen Bestimmungsstücken kann insbesondere für jedes t und jedes k die Wahrscheinlichkeit $P(X(t) = k)$ berechnet werden.

Der Poissonprozess als Markov-Kette

Sei $(N(t))$ ein Poissonprozess. Aus der Annahme 3 und der Poissonwahrscheinlichkeit folgt:

$$\begin{aligned} & P(N(t_n) = i_n \mid N(t_1) = i_1, N(t_2) = i_2, \dots, N(t_{n-1}) = i_{n-1}) \\ &= P(N(t_n) - N(t_{n-1}) = i_n - i_{n-1} \mid N(t_{n-1}) = i_{n-1}) \\ &= P(N(t_n) = i_n \mid N(t_{n-1}) = i_{n-1}) \\ &= \frac{(\lambda \cdot (t_n - t_{n-1}))^{i_n - i_{n-1}}}{(i_n - i_{n-1})!} \cdot e^{-\lambda(t_n - t_{n-1})}. \end{aligned}$$

Somit ist der Poissonprozess eine Markov-Kette und außerdem hängt die Übergangswahrscheinlichkeit $p_{ij}(s, t)$ nur von der Zeitdifferenz $t - s$ ab und nicht von der Lage der Zeitpunkte s und t auf der Achse. Diese Eigenschaft heißt **Zeithomogenität**.

Für eine homogene Markov-Kette liefert die Formel für die totale Wahrscheinlichkeit

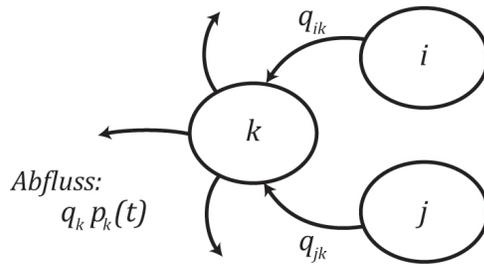
$$\begin{aligned} P(X(t) = k) &= \sum_{i \in E} P(X(t) = k \mid X(0) = i) \cdot P(X(0) = i) \\ p_k(t) &= \sum_{i \in E} p_{ik}(t) \cdot p_i. \end{aligned}$$

Um die zeitliche Entwicklung durch ein System von Differentialgleichungen beschreiben zu können, müssen wir das Verhalten in kurzen Zeitintervallen erfassen. Dies geschieht durch die **Intensitäten**:

$$\begin{aligned} q_{ij} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(h)}{h} = p'_{ij}(0), \\ q_i &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - p_{ii}(h)}{h} = -p'_{ii}(0), \end{aligned}$$

wobei q_{ij} die Intensität ist, mit der das System vom Zustand i in den Zustand j wechselt, und q_i die Intensität ist, mit der das System den Zustand i verlässt.

Durch sogenannte Übergangsgraphen werden die möglichen Übergänge mit ihren Intensitäten veranschaulicht:



Eine homogene Markov-Kette mit $\sum_{i \neq j} q_{ij} = q_i$ heißt **konservativ**.

Der Poissonprozess ist konservativ, weil $q_i = q_{i+1} = \lambda$ und für alle anderen Übergangintensitäten $q_{ik} = 0$ gilt.

Wir wollen nun eine Differentialgleichung für die Wahrscheinlichkeiten $p_k(t)$ herleiten. Dazu teilen wir das Intervall $[0; t+h]$ in die Teilintervalle $[0; t]$ und $[t; t+h]$. Dann ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit zum Zeitpunkt $t+h$ im Zustand k zu sein:

$$p_k(t+h) = \sum_{i \in E} p_{ik}(h) \cdot p_i(t).$$

Nach einigen Umformungen ergibt sich die Differentialgleichung:

$$p'_k(t) = -p_k(t) \cdot q_k + \sum_{i \in E \setminus \{k\}} p_i(t) \cdot q_{ik}$$

mit der Anfangsbedingung

$$p_k(0) = p_k.$$

Stationäre Prozesse

Ein stochastischer Prozess $(X(t))$ heißt stationär, wenn sich alle endlich-dimensionalen Verteilungen bei einer Verschiebung auf der Zeitachse um einen beliebigen, aber festen Betrag h nicht ändern.

Wenn wir nur einen festen Zeitpunkt t betrachten, gilt insbesondere

$$P(X_{t+h} = x) = P(X_t = x).$$

Ist die stationäre Verteilung von der Anfangsverteilung unabhängig, so nennt man den Prozess **ergodisch**. Wenn Ergodizität vorliegt, folgt aus der obigen

Differentialgleichung wegen $p'_k(t) = 0$ für die stationäre Verteilung (x_k) das lineare Gleichungssystem

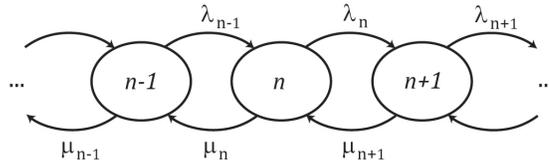
$$0 = -x_k \cdot q_k + \sum_{i \in E \setminus \{k\}} x_i \cdot q_{ik} \quad \text{mit} \quad \sum_{k=0}^{\infty} x_k = 1.$$

4 Bedienungsmodelle

Mathematisch gesehen kann man die Bedienungstheorie als die stochastische Charakterisierung von bestimmten Warteschlangen deuten. Dabei besteht ein solches Bedienungsmodell stets aus einem oder mehreren Bedienungskanälen, welche wir im Folgenden Schalter nennen werden. Als Beispiele können die Schalter auf dem Postamt, die Kassen im Supermarkt oder die Telefonleitungen eines Kundenservice genannt werden. Aus diesen Bedienungssystemen geht hervor, dass hinzukommende Kunden jeweils einen Schalter in Anspruch nehmen möchten, weshalb sich schließlich durch die Bedienungszeit eine sogenannte Wartezeit für die Kunden ergibt. Dies kennt man auch vom Check-In auf Flughäfen oder von Bestellungen in einem Restaurant.

Um die Frage zu klären, wann das Bedienungssystem am kundenfreundlichsten ist bzw. wann die Gesamtbedienungszeit bei endlich vielen Kunden einen möglichst kleinen Wert annimmt, muss man die Faktoren nennen, die ein solches Modell beeinflussen und charakterisieren. Auf der einen Seite hängt das System von dem Kundenstrom ab, auf der anderen Seite aber auch von der Bedienungsanlage. Das heißt also, die Anzahl der Kunden k , die Bedienungszeit t , die Anzahl der Schalter s und die Art der Warteschlangen (je Schalter eine Schlange oder für alle Schalter genau eine Warteschlange) bestimmen, wie letztendlich das Bedienungsmodell aussieht.

Für die von uns betrachteten Systeme ist der Forderungenstrom ein Poissonprozess mit der Intensität λ . Die Bedienungszeit eines Kunden nehmen wir als exponentialverteilt mit dem Parameter μ an. μ beschreibt die Intensität, mit der ein Kunde das System verlässt. Wir modellieren das ganze System als sogenannte **Geburts- und Todesprozess**. Solche Prozesse sind konservative Markov-Ketten, bei denen nur die Übergänge von k nach $k + 1$ (Geburt) und von k nach $k - 1$ (Tod) möglich sind. Die zugehörigen Intensitäten bezeichnen wir mit $q_{k,k+1} = \lambda_k$ und $q_{k,k-1} = \mu_k$



Das lineare Gleichungssystem für die stationäre Verteilung nimmt dann folgende Gestalt an:

$$(\mu_k + \lambda_k)x_k = \mu_{k+1}x_{k+1} + \lambda_{k-1}x_{k-1}$$

Wie in der obigen Abbildung zu erkennen ist, stellt der Term $(\mu_k + \lambda_k)x_k$ den Abfluss aus dem Zustand k und $\mu_{k+1}x_{k+1} + \lambda_{k-1}x_{k-1}$ den Zufluss in den Zustand k dar.

Wenn man nun alle Gleichungen bis zu Nummer k addiert erhält man

$$\sum_{i=0}^k (\mu_i + \lambda_i)x_k = \sum_{i=0}^k \mu_{i+1}x_{i+1} + \sum_{i=0}^k \lambda_{i-1}x_{i-1}.$$

und

$$\lambda_0x_0 = \mu_1x_1.$$

Umgeformt ergibt sich dann

$$\mu_1x_1 + \lambda_kx_k = \lambda_0x_0 + \mu_{k+1}x_{k+1}$$

bzw.

$$\lambda_kx_k = \mu_{k+1}x_{k+1}.$$

Wenn man diese Gleichung nach x_{k+1} umstellt, erhält man

$$x_{k+1} = \frac{\lambda_k}{\mu_{k+1}}x_k.$$

Die Auflösung dieser rekursiven Gleichung liefert

$$x_k = \left(\prod_{i=0}^k \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} \right) \cdot x_0$$

mit der Anfangsbedingung

$$x_0 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=0}^k \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} + 1 \right)^{-1}.$$

Beispiele für Bedienungssysteme

Die von uns betrachteten Bedienungssysteme werden mit der Schreibweise $M|M|s|w$ beschrieben, wobei M den Poissonschen Forderungsstrom, M die exponentialverteilte Bedienzeit mit dem Parameter μ , s die Anzahl der Schalter und w die Anzahl der Plätze in der Warteschlange beschreiben. Untersuchen wir die Bedienungssysteme $M|M|1$ und $M|M|2|2$, wobei im ersten Fall ein unendlich großer Warteraum zur Verfügung steht. Für das Verhältnis der Intensitäten λ und μ schreiben wir $\frac{\lambda}{\mu} = \rho$. Für $M|M|1$ erhalten wir aus den obigen allgemeinen Gleichungen die stationäre Verteilung

$$\begin{aligned}x_0 &= 1 - \rho \\x_k &= (1 - \rho)\rho^k, \quad k = 1, 2, \dots\end{aligned}$$

Im System $M|M|2|2$ gibt es 2 Schalter zur Bearbeitung eintreffender Kunden, außerdem bestehen nur für 2 Kunden Warteplätze. Das heißt also, sobald mehr Kunden ankommen, verlassen sie das System.

$$\begin{aligned}x_0 &= \frac{1 - \frac{\rho}{2}}{1 + \frac{\rho}{2} - \rho(\frac{\rho}{2})^4} \\x_1 &= \rho x_0 \\x_2 &= \frac{1}{2}\rho^2 x_0 \\x_3 &= \frac{1}{4}\rho^3 x_0 \\x_4 &= \frac{1}{8}\rho^4 x_0\end{aligned}$$

Aus dieser stationären Verteilung kann man Systemkenngrößen wie die mittlere Schlängellänge und die mittlere Wartezeit berechnen.

5 Die Simulation

Bei wachsender Schalter- und Warteplatzanzahl wachsen auch die zugehörigen Gleichungssysteme quadratisch bezüglich der Platzanzahl, was herkömmliche Software bald überfordert.

Um die ursprüngliche Frage zu klären, müssen wir aber auch Fälle mit mehr als 2 Schaltern und 2 Warteplätzen betrachten. Damit gewinnt das **Werkzeug Simulation** schnell an Attraktivität. In Ermangelung einer Simulationssoftware wurde eine eigene Variante implementiert, deren grundlegende Überlegungen im Folgenden vorgestellt werden.

Wahrscheinlichkeiten

Im Bedienungssystem liegt ein poissonverteilter Zustrom an Kunden und eine exponentialverteilte Reihe von Bedienungszeiten vor. Bei der Implementierung bestand aber nur die Möglichkeit, auf gleichverteilte Zufallszahlen aus $[0; 1]$ zurückzugreifen.

Um den Kundenstrom zu simulieren, werden die Wahrscheinlichkeiten für genau 0, maximal 1, maximal 2, usw. bis maximal 5 Kundenankünfte innerhalb einer Zeiteinheit bestimmt:

$$P(X \leq k) = \sum_{i=0}^k \frac{\lambda^i \cdot e^{-\lambda}}{i!}.$$

Da die Wahrscheinlichkeit für die Ankunft von mehr als 5 Kunden bei kleinem λ verschwindend gering ist, werden diese Ereignisse vernachlässigt. Wir haben nun das Intervall $[0;1]$ in 7 Teilintervalle zerlegt:

$$[0; P(X = 0)], (P(X = 0); P(X = 1)], \dots, (P(X = 5), 1].$$

Je nachdem, in welchem Intervall die gleichverteilte Zufallszahl nun liegt, werden 0 bis 6 neue Kunden simuliert.

Eine exponentialverteilte Bedienungszeit X lässt sich durch die Umkehrung der Formel $Y = 1 - e^{-\mu X}$, also $X = -\frac{\ln(1-Y)}{\mu}$ erzeugen. Wenn Y gleichverteilt auf $[0; 1]$ ist, dann ist

$$X = -\frac{\ln Y}{\mu}$$

exponentialverteilt mit dem Parameter μ .

Ergebnisse

Zur Validierung der Software konnten wir auf das gerechnete Beispiel $M|M|2|2$ bei $\lambda = 2$ und $\mu = 3$ bauen. Der dort erhaltene Erwartungswert der Wartezeit von 0,36 Zeiteinheiten stimmte annähernd mit der simulierten mittleren Wartezeit überein. Auch beim deutschen System stellte sich in der Simulation dieses kleinen Systems etwa dieser Wert ein. Als größere Variante wurde nun $M|M|2|40$ simuliert. Nach 300 bearbeiteten Kunden stellte sich eine stabile mittlere Wartezeit von etwa 5,8 Zeiteinheiten beim englischen und etwa 6,3 beim deutschen System ein.

Literatur

- [1] F. Topsøe: Spontane Phänomene. Stochastische Modelle und ihre Anwendungen. Vieweg, Braunschweig, 1990.

- [2] E. Warmuth: Mathematische Modelle diskreter stochastischer Systeme. Ministerium für Bildung, Wissenschaft und Weiterbildung, Land Rheinland-Pfalz, 1997.

Der Ton macht die Musik

Analyse von Tonsignalen mittels Fourier-Transformationen

Teilnehmer:

Tobias Berchner	Heinrich-Hertz-Oberschule, Berlin
Holger Hesse	Heinrich-Hertz-Oberschule, Berlin
Yasir Kaynar	Andreas-Oberschule, Berlin
Dieu Thuy Linh Tran	Andreas-Oberschule, Berlin
Viet Son Pham	Heinrich-Hertz-Oberschule, Berlin
Jonas Pohl	Herder-Oberschule, Berlin
Henry Salfner	Käthe-Kollwitz-Oberschule, Berlin

Gruppenleiter:

Falk Ebert	Technische Universität Berlin Mitglied im DFG-Forschungszentrum MATHEON „Mathematik für Schlüsseltechnologien“
------------	--

Was genau ist ein Ton? Warum klingt der gleiche Ton bei einer Flöte ganz anders als bei einem Klavier? Warum nehmen wir die Töne trotzdem irgendwie als gleich wahr? Und was hat das mit der Funktionsweise eines MP3-Players zu tun? Diesen und anderen Fragestellungen haben wir uns in der Sommerschule gestellt. Mit Hilfe der Fourier-Reihenentwicklung ist es uns möglich gewesen, Töne in Grund- und Obertöne zu zerlegen. Neben vielen theoretischen Überlegungen haben wir dann auch mal praktisch die Frequenzspektren diverser Instrumente – von Violine bis Vuvuzela – bestimmt und versucht, am Computer zu synthetisieren.

1 Einleitung

Wenn wir im Alltag Töne hören, können wir für gewöhnlich verschiedene Instrumente bzw. Geräuschquellen problemlos auseinanderhalten, auch wenn die Töne eigentlich dieselbe Tonhöhe und dieselbe Lautstärke haben.

Woran liegt das?

Warum klingt der gleiche Ton bei einer Flöte ganz anders als bei einem Klavier?

Um dies beantworten zu können, muss zuerst geklärt werden:

Was ist überhaupt ein Ton aus math./phys. Sicht?

Ein Ton ist mathematisch gesehen nichts anderes als eine periodische Schwingung, z.B. die gleichförmige Sinus-Schwingung einer Stimmgabel oder der Ton eines Streichinstruments:

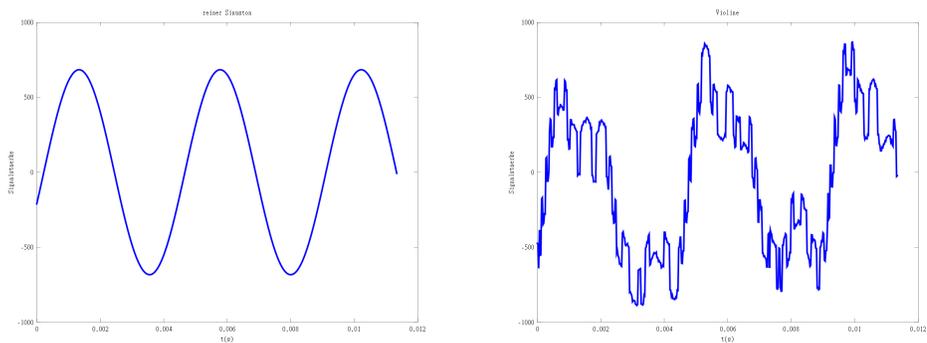


Abbildung 1: Ton einer Stimmgabel (220 Hz) und der Ton einer Geige (220 Hz)

Mit einem Synthesizer lässt sich eine Sinus-Schwingung problemlos reproduzieren. Der Klang der Geige ist aber um ein Vielfaches komplexer.

Die Frage, die sich nun stellt, lautet:

Lassen sich komplexe Schwingungen wie die der Geige durch eine Kombination aus Sinus-/Kosinus-Schwingungen darstellen, damit sie synthetisierbar werden?

Ja! Das ist möglich. Im Folgenden machen wir uns anschaulich, wie ein einfaches Signal durch Überlagerung von trigonometrischen Funktionen approximiert werden kann.

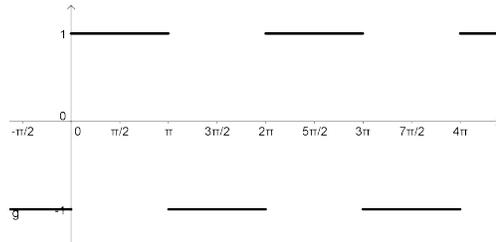


Abbildung 2: Rechteck-Schwingung

$$x(t) = \begin{cases} 1 & : x \in [0, \pi[, \\ -1 & : x \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$$

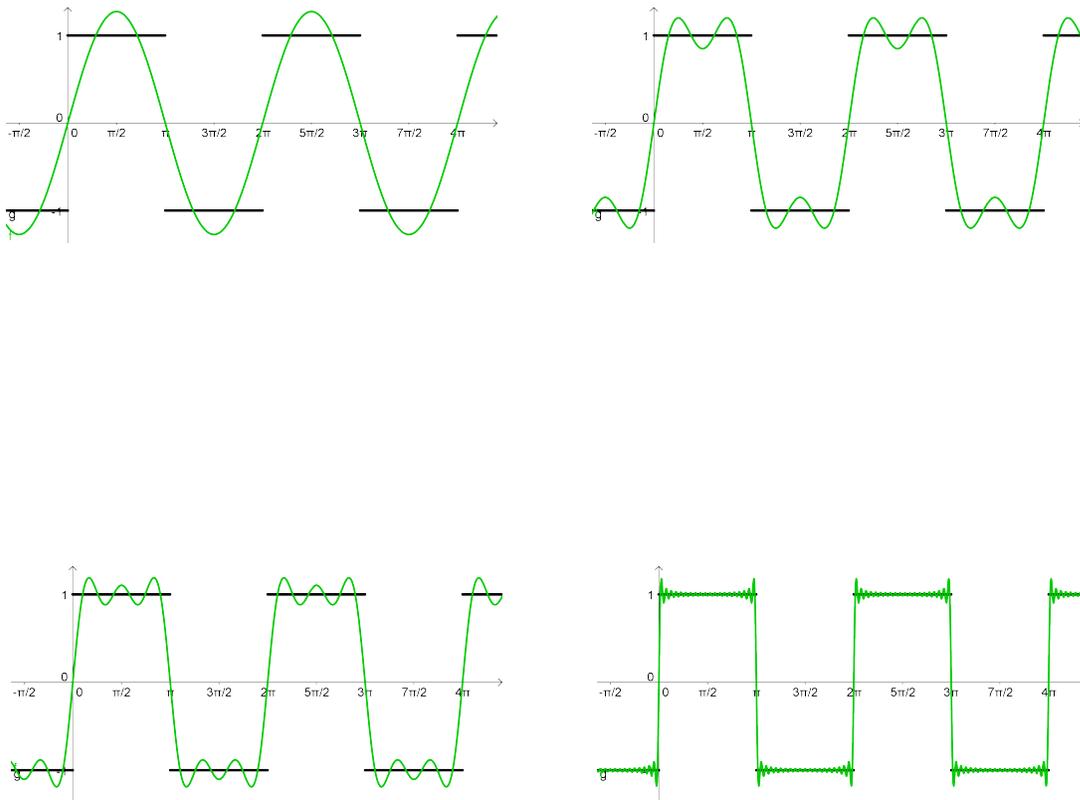


Abbildung 3: Approximation der Rechteck-Schwingung mit 1, 2, 3 und 20 überlagerten Funktionen

Wie kann man nun eine beliebige Schwingung x in eine Kombination trigonometrischer Funktionen zerlegen, die überlagert x approximieren?

Dazu hat sich schon der Mathematiker Joseph Fourier (1768-1830) Gedanken gemacht. Nach ihm ist die *Fourier-Reihe* benannt, die nichts anderes als eine Summe von Sinus-/Kosinus-Funktionen mit je einem zugehörigen Koeffizienten ist.

2 Fourier-Reihen

2.1 Vektoren und Skalarprodukte

Notwendig für diese Zerlegung ist ein elementares Verständnis von Vektoren und Skalarprodukten. Ein Vektor u ist definiert als ein Element eines *Vektorraums*.

Ein Vektor u kann sowohl Teil eines endlichen Vektorraums ($u \in \mathbb{R}^N$, N : Anzahl der Dimension), als auch eines unendlichdimensionalen Raums sein, z.B. als stetige Funktion, die auf einem bestimmten Intervall $[a, b]$ definiert ist. Im Folgenden ist für die Fourier-Transformation das Intervall $[0, 2\pi]$ relevant. Für die stetigen Funktionen f und g auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ definieren wir das folgende *Skalarprodukt*:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(t) \cdot g(t) dt.$$

Dabei sind f und g genau dann *orthogonal*, wenn gilt:

$$\langle f, g \rangle = 0.$$

Weiterhin ist die Norm einer Funktion f definiert als:

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}.$$

Wir betrachten nun die folgende Menge von Funktionen:

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(\omega \cdot t)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(\omega \cdot t)}{\sqrt{\pi}} \right\}, \omega \in \mathbb{N}.$$

Diese Funktionen sind paarweise zueinander *orthogonal*, also:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(t) \cdot g(t) dt = 0, \quad \forall f, g \in \mathcal{B}, f \neq g.$$

Beweis:

1. Fall:

$$\begin{aligned}f(t) &= \frac{\sin(\omega_1 \cdot t)}{\sqrt{\pi}} \\g(t) &= \frac{\sin(\omega_2 \cdot t)}{\sqrt{\pi}}\end{aligned}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}\langle f, g \rangle &= \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\omega_1 \cdot t)}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sin(\omega_2 \cdot t)}{\sqrt{\pi}} dt \\&= \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\int_0^{2\pi} \cos((\omega_1 - \omega_2) \cdot t) dt - \int_0^{2\pi} \cos((\omega_1 + \omega_2) \cdot t) dt \right) \\&= 0, \text{ für } \omega_1 \neq \omega_2.\end{aligned} \quad (1)$$

Der 2. Fall (Kosinus mit Kosinus) und der 3. Fall (Kosinus mit Sinus) werden analog bewiesen. Setzt man in (1) $\omega_1 = \omega_2$, ergibt sich

$$\|f(t)\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = 1. \quad (2)$$

Aus (1), sowie den anderen beiden Fällen und (2) folgt, dass die Funktionen in \mathcal{B} eine *Orthonormalbasis* der stetigen Funktionen auf $[0, 2\pi]$ bilden.

2.2 Definition Fourier-Reihe

Für ein Signal $x(t)$ $t \in [0, 2\pi]$, x stetig, nehmen wir an, dass es geschrieben werden kann als:

$$\begin{aligned}x(t) &= a_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + a_1 \cdot \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}} + a_2 \cdot \frac{\cos 2t}{\sqrt{\pi}} + a_3 \cdot \frac{\cos 3t}{\sqrt{\pi}} + \dots \\&\quad + b_1 \cdot \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}} + b_2 \cdot \frac{\sin 2t}{\sqrt{\pi}} + b_3 \cdot \frac{\sin 3t}{\sqrt{\pi}} + \dots\end{aligned}$$

d.h. als Linearkombination der Basisfunktionen.

Diese Summe von Basisfunktionen nennt man *Fourier-Reihe* und die Darstellung eines Signales als *Fourier-Reihe* heißt *Fourier-Transformation*.

Die Anteile der einzelnen Basisfunktionen, d.h. die Faktoren $a_0, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$ erhält man, indem man das Skalarprodukt des Signals $x(t)$ mit der entsprechenden Basisfunktion bildet.

Bsp. :

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \left\langle x, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle \\
 &= \left\langle a_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + a_1 \cdot \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}} + a_2 \cdot \frac{\cos 2t}{\sqrt{\pi}} + \dots + b_1 \cdot \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}} + b_2 \cdot \frac{\sin 2t}{\sqrt{\pi}} + \dots, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle \\
 &= a_0 \cdot \underbrace{\left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle}_1 + a_1 \cdot \underbrace{\left\langle \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle}_0 + \dots \\
 &\quad + b_1 \cdot \underbrace{\left\langle \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle}_0 + \dots \\
 &= a_0
 \end{aligned}$$

Die Ermittlung aller anderen Faktoren erfolgt analog.

3 Beispiel einer Fourier-Transformation

Als simples Beispiel für eine *Fourier-Transformation* zerlegen wir die schon erwähnte Rechteck-Schwingung

$$x(t) = \begin{cases} 1 & : t \in [0, \pi[, \\ -1 & : t \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$$

a_0 errechnet sich wie schon oben gezeigt:

$$a_0 = \left\langle x, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle = \int_0^{2\pi} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dt = \int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dt - \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dt = 0.$$

a_ω , die Faktoren der Kosinus-Summanden, können durch das Bilden des Skalarprodukts der Schwingung und des Kosinus-Einheitsvektors ermittelt werden:

$$a_\omega = \left\langle x, \frac{\cos \omega t}{\sqrt{\pi}} \right\rangle = \int_0^{2\pi} x \cdot \frac{\cos \omega t}{\sqrt{\pi}} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \left(\int_0^{\pi} \cos \omega t dt - \int_{\pi}^{2\pi} \cos \omega t dt \right) = 0.$$

Analog bestimmt man b_ω :

$$\begin{aligned}
 b_\omega &= \left\langle x, \frac{\sin \omega t}{\sqrt{\pi}} \right\rangle = \int_0^{2\pi} x \cdot \frac{\sin \omega t}{\sqrt{\pi}} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \left(\int_0^\pi \sin \omega t dt - \int_\pi^{2\pi} \sin \omega t dt \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \left(\frac{-1}{\omega} \cdot \cos \omega t \Big|_\pi^0 + \frac{1}{\omega} \cdot \cos \omega t \Big|_\pi^{2\pi} \right) = \frac{1}{\omega \cdot \sqrt{\pi}} \cdot (2 - 2 \cdot \cos \omega \pi) \\
 &= \begin{cases} \frac{4}{\omega \cdot \sqrt{\pi}} & , \text{für gerade } \omega \\ 0 & , \text{für ungerade } \omega \end{cases}
 \end{aligned}$$

Demnach lässt sich die Rechteck-Schwingung als folgende Transformierte $X(t)$ annähern:

$$X(t) = \frac{4}{\pi} \cdot \sin t + \frac{4}{3\pi} \cdot \sin 3t + \frac{4}{5\pi} \cdot \sin 5t + \dots$$

4 Diskrete Fourier-Transformation

Nun ist ein Signal nur an diskreten Zeitpunkten verfügbar, sprich: Man zerlegt nicht mehr stetige Funktionen in Summen von Sinus- und Kosinus-Funktionen, sondern eine endliche Anzahl an Werten, die durch Abtasten eines Signals zu diskreten Zeitpunkten zustande gekommen sind, in eine Folge der Form

$$A(z) = \frac{1}{N} (a_0 + a_1 z + \dots + a_{N-1} z^{N-1})$$

mit

$$z_k = e^{\frac{2\pi i}{N} k} = \cos \frac{2\pi}{N} k + i \cdot \sin \frac{2\pi}{N} k.$$

Die Folge

$$\sum_{k=0}^{N-1} z_k \cdot e^{\frac{2\pi i}{N} kn}$$

heißt *Diskrete Fourier-Transformation (DFT)* von x , wobei:

$$Re(X_n) = \sum_{k=0}^{N-1} \cos \frac{2\pi}{N} kn \cdot z_k,$$

$$Im(X_n) = \sum_{k=0}^{N-1} \sin \frac{2\pi}{N} kn \cdot z_k.$$

X_n gibt die Anteile der Frequenzen an, die auf $[0, N \cdot h]$ genau n Schwingungen haben. Wie sich leicht zeigen lässt, gilt $Re(X_n) = Re(X_{N-n})$ und

$Im(X_n) = -Im(X_{N-n})$. Es lassen sich also nur Frequenzen bis $\frac{n}{N \cdot h}$ für $n \leq \frac{N}{2}$ mit der DFT analysieren. Höhere Frequenzen werden auf niedrigere abgebildet (*Aliasing*).

5 Anwendung - Synthetisierung eines Instruments

Um zu verdeutlichen, dass die hier vorgestellte Theorie auch in der Praxis Anwendungen findet, stellen wir nun einige Beispielanwendungen vor.

Als erstes wird ein Ton aufgenommen. Man erhält nun eine Kurve der Schwingung über die Zeit, die man nun mittels Fourier-Transformation in die einzelnen Frequenzen aufteilen kann. Je nachdem, wie gut man das künstliche Signal an den gemessenen Ton annähern möchte, wählt man eine entsprechende Anzahl der wichtigsten Frequenzen und erhält, wenn man sie mit den entsprechenden Amplituden abspielt, den Ton des synthetisierten Instruments.

Im Anhang befinden sich einige Beispiele, bei denen links die Kurve über die Zeit zu sehen ist, rechts das Spektrum, das man durch die Fourier-Zerlegung erhält.

Nun könnte man denken, es bräuchte nichts, wenn man einen Ton synthetisieren kann, weil dabei natürlich Informationen verloren gehen. Das Lesen einer CD geschieht mit 44kHz, beim Auslassen jeder 2. Abtastung erhält man die Rundfunkqualität, die nur 22kHz beträgt, was jedoch nicht so schlimm ist, da die Signalqualität bei der Übertragung sowieso ein wenig leidet.

Nicht nur bei Musik, auch bei der Speicherung von Fotos wird dieses System verwendet. Dies ist beispielsweise zu beobachten, wenn man scharfe Übergänge (Vorzugsweise von schwarz auf weiss) im JPG-Format betrachtet, denn dann sieht man, dass außer den Farben schwarz und weiss sich an den Übergängen auch noch andere Farben, die durch "Nachschwingungen" der abgespeicherten Ersatzfunktionen entstehen.

6 Fazit

Die Möglichkeit, Speicherplatz zu sparen, indem man die Daten als Parameter von Sinusfunktionen abspeichert, ist sehr effektiv und wird im Multimedia-Bereich bereits häufig angewendet. Bei der Nutzung vieler Funktionen erhält man eine gute Näherung, kann jedoch trotzdem viel Speicherplatz sparen.

Unser Versuch, die Geige zu synthetisieren war insofern erfolgreich, als dass die synthetisierte Kurve größtenteils mit der aufgenommenen Kurve übereinstimmte. Jedoch klingt sie wegen der schlechten Aufnahmequalität und da wir nur wenige Grundfrequenzen betrachtet haben, nicht ganz wie der ursprünglich erzeugte Ton.

Jedoch könnte man sich mit mehr Aufwand dem Originalton weiter annähern. Bei der Nutzung von Spitzen und Ecken hat man das Problem, dass die Sinusfunktion von Natur aus rund ist und deshalb die Modellierung die Spitze immer abrundet. Das wird gerade dann deutlich, wenn die Funktion viele schmale Spitzen hat. Hierzu ist jedoch zu sagen, dass dies in Tondateien nur schwer oder gar nicht hörbar ist. Auch in Bildern fallen die Änderungen nicht sonderlich stark auf.

7 Anhang

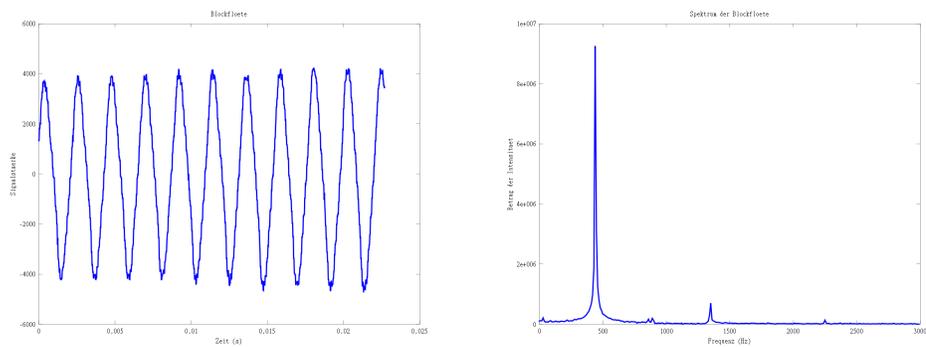


Abbildung 4: Beispiel Flöte

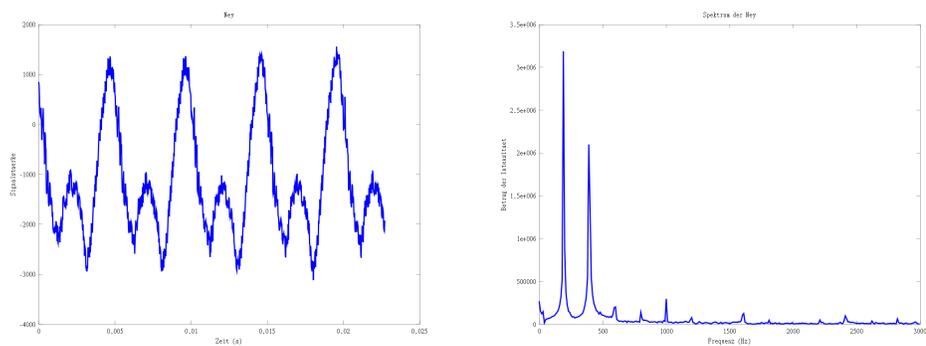


Abbildung 5: Beispiel Ney (Türkisches Blasinstrument)

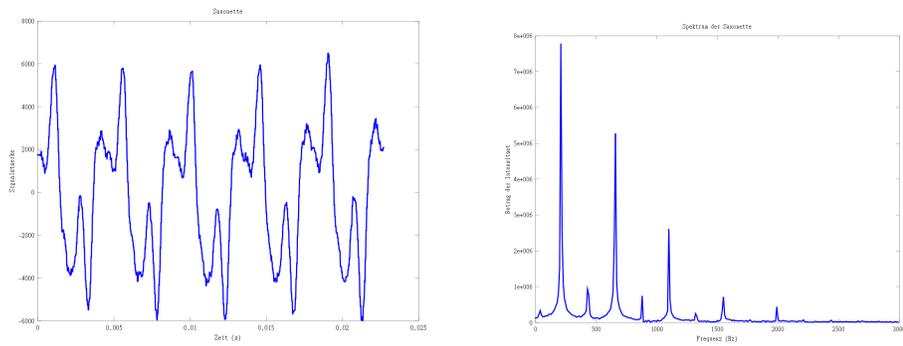


Abbildung 6: Beispiel Saxofone

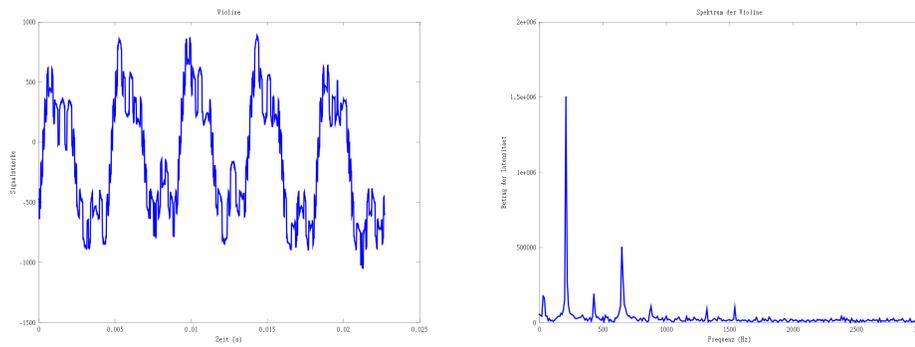


Abbildung 7: Beispiel Geige

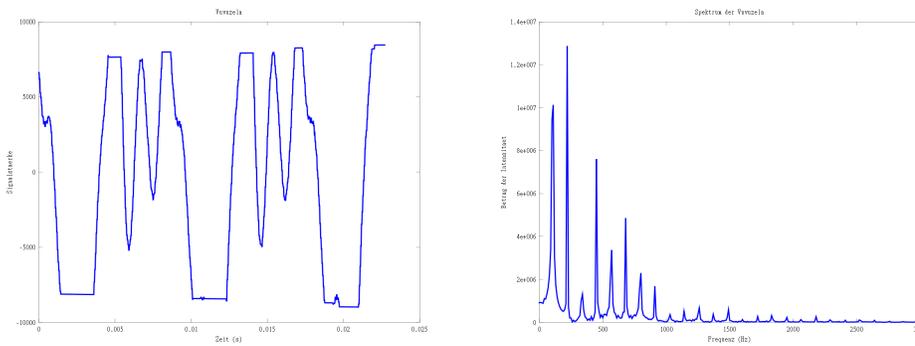


Abbildung 8: Beispiel Vuvuzela (Fantröte, passend zur WM)

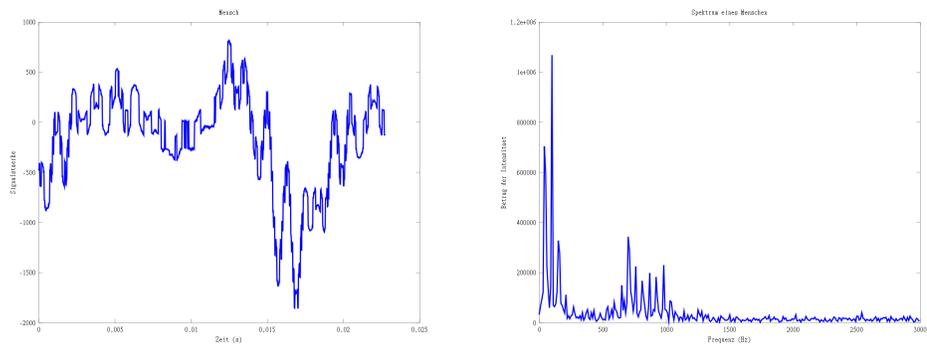


Abbildung 9: Beispiel Jonas (Mensch, tiefer Ton)

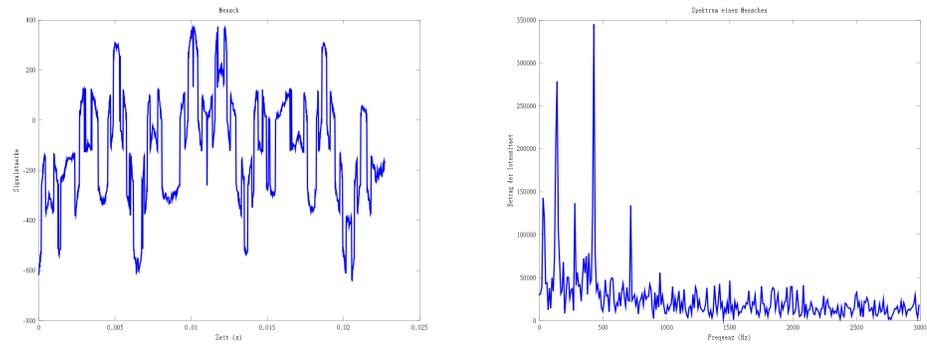


Abbildung 10: Beispiel Ling (Mensch, gehauchter Ton)

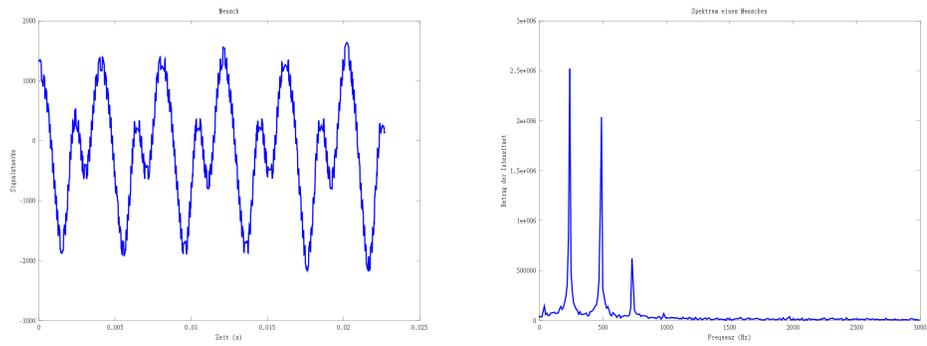


Abbildung 11: Beispiel Holger (Mensch, hoher Ton)

Kurven

Zusammenhänge und Lösungsverfahren

Teilnehmer:

Lisa Fritsche	Andreas-Oberschule, Berlin
Lukas Gehring	Geschwister-Scholl-Gymnasium, Löbau
Roland Pugliese	Herder-Oberschule, Berlin
Julian Risch	Heinrich-Hertz-Oberschule, Berlin
Daniel Ritter	Gymnasium Tegernsee, Tegernsee
Andrei Sterin	Theodor-Heuss-Gymnasium, Hagen

Gruppenleiter:

Andreas Filler	Humboldt-Universität zu Berlin
Carsten Falk	Humboldt-Universität zu Berlin

Kurven sind schön und ihre Eigenschaften sind mathematisch interessant.

Durch Parameterdarstellungen lassen sich Kurven beschreiben, deren graphische Darstellung vielfältige Formen zutage fördert. Wenn der Parameter dabei als Zeit interpretiert wird, lassen sich zudem Animationen erstellen, auf die jedoch in diesem Bericht verzichtet werden muss.

Ansonsten werden im Folgenden Kurveneigenschaften wie die Bogenlänge oder Tangentialvektoren betrachtet. Die Krümmung von Kurven spielte in unserer Gruppe ebenso eine Rolle wie auch zyklische Kurven (Zykloiden).

1 Parameterdarstellungen von Kurven

1.1 Einige Beispiele

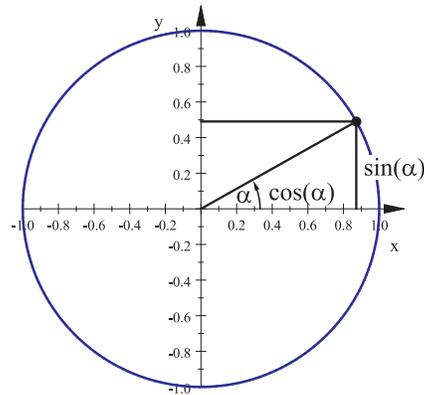
1.1.1 Der Einheitskreis

Ausgehend vom Einheitskreis, bei dem $r = 1$ gilt, entspricht

$$\begin{aligned}\cos(\alpha) &= \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} \hat{=} x \\ \sin(\alpha) &= \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} \hat{=} y\end{aligned}$$

Ein Punkt auf dem Kreisbogen hat die Koordinaten:

$$\begin{aligned}x(\alpha) &= r \cdot \cos(\alpha) \\ y(\alpha) &= r \cdot \sin(\alpha)\end{aligned} \quad \alpha \in [0; 2\pi)$$



Das r deutet darauf hin, dass es sich bereits um eine Verallgemeinerung der Formel handelt.

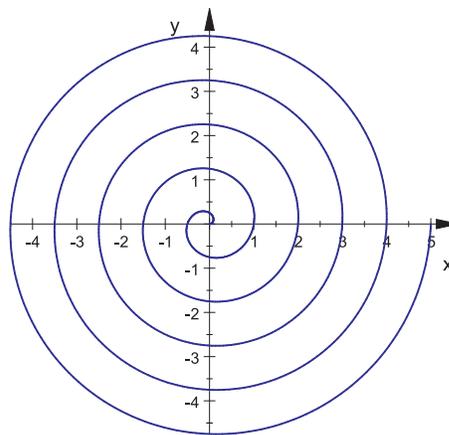
Durch Ersetzen von α durch $2\pi t$ erhält man eine andere Parametrisierung, wobei t der Zeit entspricht und physikalisch betrachtet der Vorgang ist, bei dem in $I = [0; 1)$ durch eine Menge von Punkten ein Kreis im mathematisch positiven Sinn aufgebaut wird.

$$\begin{aligned}x(t) &= r \cdot \cos(2\pi t) \\ y(t) &= r \cdot \sin(2\pi t)\end{aligned} \quad t \in [0; 1)$$

1.1.2 Archimedische Spirale

Durch Veränderung der Radiusfunktion in Abhängigkeit von t entstehen weitere Gebilde. Setzt man beispielsweise $r(t) = r_0 \cdot t$ entsteht die Archimedische Spirale. Für $t = [0, \infty)$ wird die Spirale unendlich lang, wobei der Windungsabstand konstant bleibt.

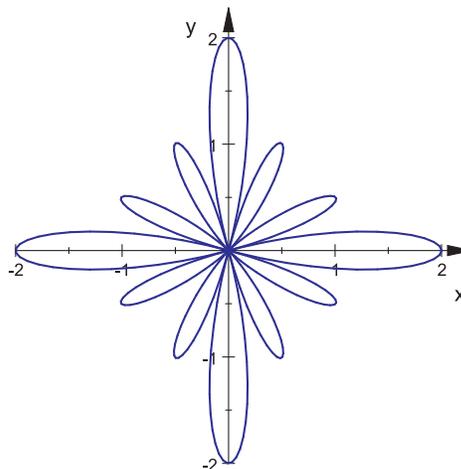
$$\begin{aligned}x(t) &= r \cdot t \cdot \cos(2\pi t) \\ y(t) &= r \cdot t \cdot \sin(2\pi t)\end{aligned} \quad t \in [0; \infty)$$



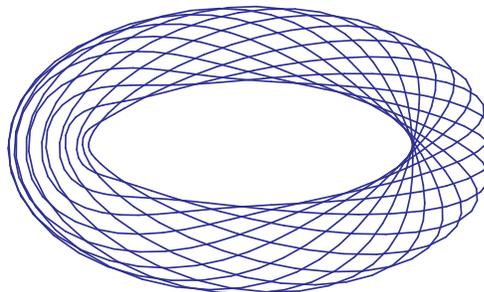
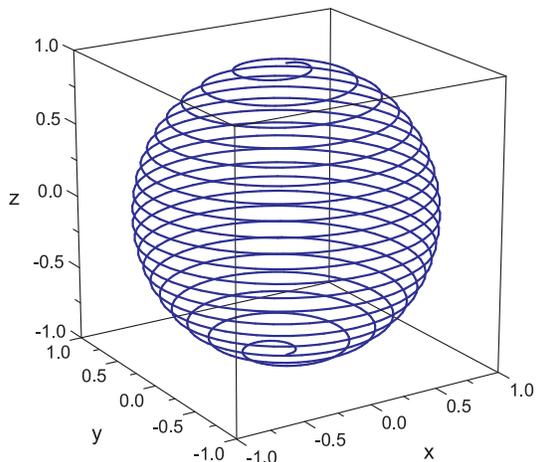
1.1.3 Weitere Beispiele

Hier eine besonders schöne Blume, die durch Zusammensetzen trigonometrischer Funktionen als Radiusfunktion entstanden ist.

$$\begin{aligned}x(t) &= (\cos(8\pi t) + \cos(16\pi t)) \cdot \cos(2\pi t) \\y(t) &= (\cos(8\pi t) + \cos(16\pi t)) \cdot \sin(2\pi t)\end{aligned}$$



Auch dreidimensionale Gebilde sind möglich. Dazu wird eine dritte Funktion $z(t)$ benötigt. Zwei Beispiele:



$$\begin{aligned}x(t) &= \left(\sqrt{1 - \frac{t}{10}}\right)^2 \cdot \cos(2\pi t) \\y(t) &= \left(\sqrt{1 - \frac{t}{10}}\right)^2 \cdot \sin(2\pi t) \\z(t) &= \frac{t}{10}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x(t) &= (5 + \sin(42\pi t)) \cos(26\pi t) \\y(t) &= (5 + \sin(42\pi t)) \sin(26\pi t) \\z(t) &= \cos(42\pi t)\end{aligned}$$

1.2 Jordan-Kurve

Im Folgenden seien nun einige Begriffe genau definiert.

Eine Kurve $C \subset \mathbb{R}^2$ heißt *Jordan-Kurve*, wenn folgendes gilt:

- Es gibt ein $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $C = \text{im}(f)$,
- f ist stetig in I .

C heißt *regulär*, falls für eine Parametrisierung f gilt:
 $f'(t) \neq \vec{0}$ für alle $t \in I$

1.3 Tangentenvektoren

Sei $f(t)$ eine Parametrisierung einer Kurve. Dann gilt:

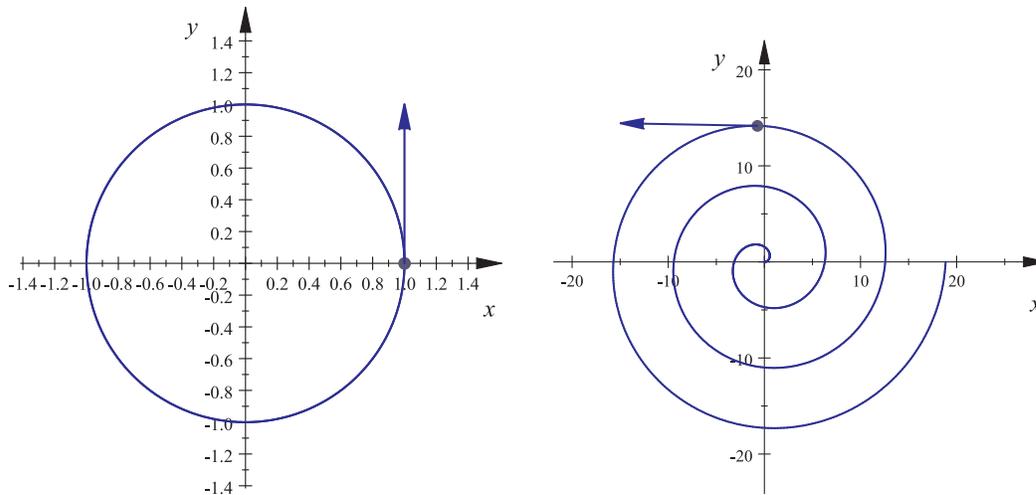
$$f'(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}.$$

Es gilt:

$$f'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}.$$

Die Ableitung ist hierbei ein Vektor. Der Ableitungsvektor steht tangential zur Kurve.

Tangentenvektor an Kreis und Spirale



1.4 Die Bogenlänge

Sei $C \subset \mathbb{R}^2$ eine Kurve, $I = (t_a, t_e) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Sei t_0, \dots, t_n eine Einteilung von I mit $t_{i+1} - t_i = t_{j+1} - t_j$ für alle i, j . Dann gilt für die Bogenlänge S :

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2}$$

$$= \int_{t_a}^{t_e} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

Es gilt $s'(t) = |f'(s)|$.

Man bezeichnet eine Parametrisierung einer Funktion f als Parametrisierung nach der Bogenlänge, wenn $|f'(s)| = 1$ für alle s .

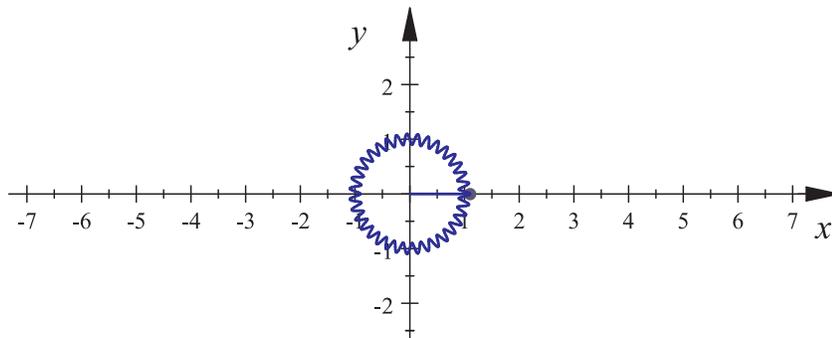
Gilt $|f'(s)| = 1$, so folgt: Die Bogenlänge zwischen $f(s_1)$ und $f(s_2)$ beträgt $s_2 - s_1$.

2 Zykloiden

2.1 Abrollen eines Kreises auf einer Ebene

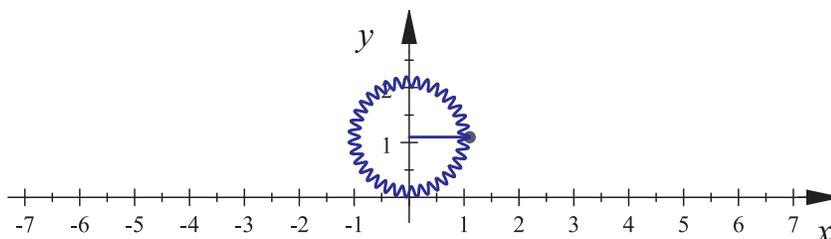
Unter einer Zykloiden versteht man diejenige Kurve, die ein Punkt auf einem abrollenden Kreis beschreibt.

Um diese Kurve zu parametrisieren, beginnen wir zunächst mit der bereits bekannten Parameterdarstellung des Kreises und simulieren dessen Rotation durch die Bewegung des betreffenden Punktes auf dessen Umfang, also auf der parametrisierten Kurve. Im Folgenden sei stets $t \in [0; 1[$.



$$\begin{aligned} x(t) &= r \cdot \cos(2\pi t) \\ y(t) &= r \cdot \sin(2\pi t) \end{aligned}$$

Um den Kreis, dessen Mittelpunkt sich durch oben genannte Parameterdarstellung im Koordinatenursprung befindet, später seine Rollbewegung oberhalb der x -Achse vollführen zu lassen, addieren wir zunächst jeweils die Koordinaten des Mittelpunktes zu den bereits genannten x - und y -Koordinaten des Punktes:



$$\begin{aligned}x(t) &= x_m + r \cdot \cos(2\pi t) \\y(t) &= y_m + r \cdot \sin(2\pi t)\end{aligned}$$

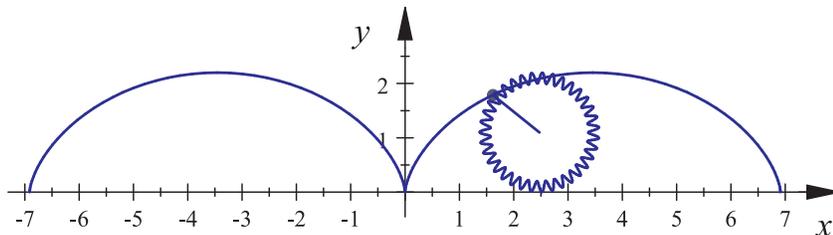
Doch wie verändern sich x_m und y_m während der Rollbewegung, durch welche Funktionen werden sie beschrieben?

Offensichtlich bleibt y_m während des Abrollens konstant und in unserem Beispiel, in dem sich der Kreis auf der x-Achse abrollt, gleich dem Radius r des Kreises. Da die Geschwindigkeit des Kreises über den ganzen Vorgang konstant ist, wird leicht ersichtlich, dass x_m proportional zu t sein muss. Zieht man des Weiteren in Betracht, dass während einer kompletten Umdrehung der Kreis und somit auch dessen Mittelpunkt eine Strecke von $2\pi r$ zurücklegt, ergeben sich folgende Koordinatenfunktionen :

$$\begin{aligned}x_m(t) &= 2 \cdot \pi \cdot r \cdot t \\y_m(t) &= r\end{aligned}$$

Da sich der Punkt zum Abrollen in positive x-Richtung jedoch im Uhrzeigersinn, folglich also im mathematisch negativen Sinn drehen muss, muss vor dem Kosinus-Term ein negatives Vorzeichen stehen. Außerdem muss eine Phasenverschiebung von $-\pi/2$ sowohl bei $x(t)$ als auch bei $y(t)$ eingefügt werden, damit der Punkt seine Bahn am „untersten“ Punkt des Kreises beginnt und nicht wie bisher „ganz rechts“. Es ergibt sich folgende Parametrisierung der Zykloide:

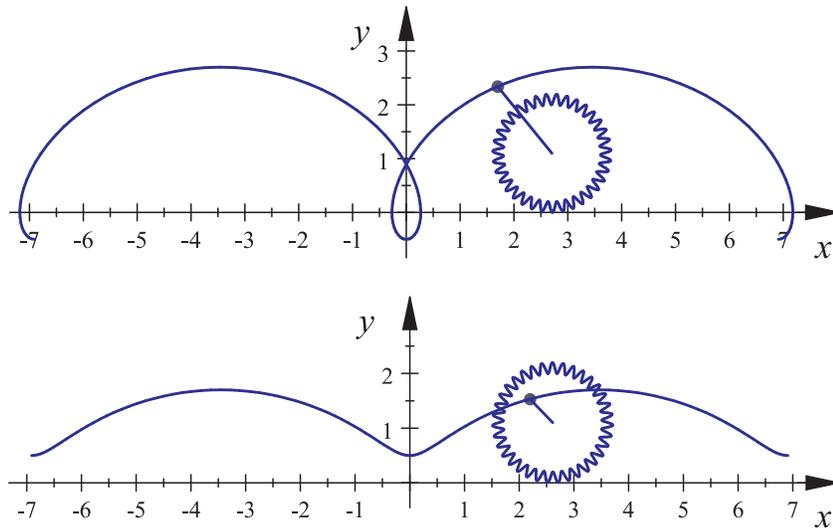
$$\begin{aligned}x(t) &= x_m - r \cdot \cos(2\pi t - \pi/2) & x_m(t) &= 2 \cdot \pi \cdot r \cdot t \\y(t) &= y_m + r \cdot \sin(2\pi t - \pi/2) & y_m(t) &= r\end{aligned}$$



2.2 Weitere Zykloiden

Betrachtet man nun die Bahn eines Punktes außerhalb oder innerhalb des Kreises, müssen die Koordinatenfunktionen so angepasst werden, dass der Faktor r im zweiten Summanden jeweils durch den Abstand R des Punktes zum Kreismittelpunkt ersetzt wird, da sich der veränderte Abstand lediglich auf die Eigenrotation, nicht aber auf die geradlinig gleichförmige Bewegung in x-Richtung auswirkt:

$$\begin{aligned}x(t) &= x_m - R \cdot \cos(2\pi t - \pi/2) & x_m(t) &= 2 \cdot \pi \cdot r \cdot t \\y(t) &= y_m + R \cdot \sin(2\pi t - \pi/2) & y_m(t) &= \text{const.}\end{aligned}$$



2.3 Epizykloiden

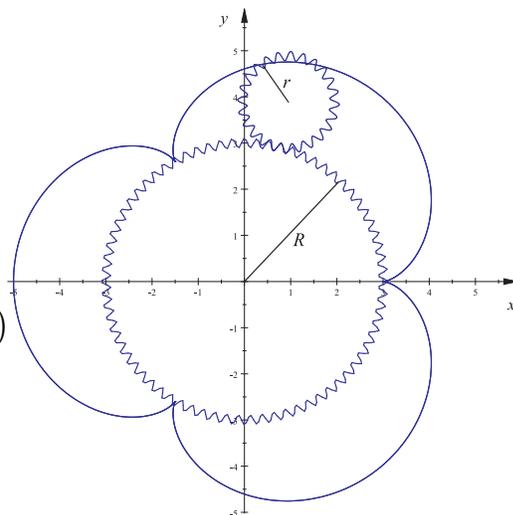
Weiterhin haben wir Zykloiden betrachtet, die beim Abrollen des Kreises auf einer Kreisbahn entstehen. Diese werden als Epizykloiden bezeichnet. In diesem Fall setzen wir $x_m(t) = (R + r) \cdot \cos(2\pi t)$ und $y_m(t) = (R + r) \cdot \sin(2\pi t)$ an, da der Mittelpunkt nun seinerseits eine Kreisbahn mit dem Radius der Summe der beiden Einzelradien beschreibt.

Des Weiteren muss die Rotationsgeschwindigkeit des äußeren Kreises angepasst werden, da der äußere Kreis während seines Umlaufs mehr als eine Rotation vollführt. Der benötigte Faktor ist das Verhältnis des Umfangs der Mittelpunktsbahn zu dem des äußeren Kreises, also

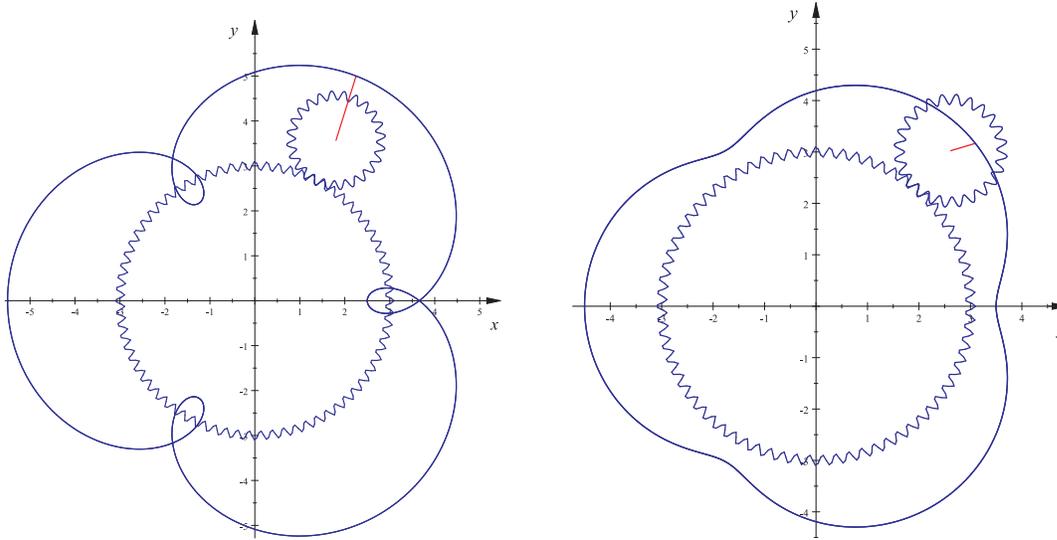
$$\frac{2\pi(r+R)}{2\pi r} = \frac{R}{r} + 1 .$$

Da der Punkt auf der linken Seite des äußeren Kreises zu rotieren beginnt und wir daher eine Phasenverschiebung von $-\pi$ benötigen, ergibt sich folgende Parametrisierung der Epizykloiden:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_m + r \cdot \cos\left(\left(\frac{R}{r} + 1\right) \cdot 2\pi t - \pi\right) \\ y(t) &= y_m + r \cdot \sin\left(\left(\frac{R}{r} + 1\right) \cdot 2\pi t - \pi\right) \\ x_m(t) &= (R + r) \cdot \cos(2\pi t) \\ y_m(t) &= (R + r) \cdot \sin(2\pi t) \end{aligned}$$



Weitere Epizykloiden



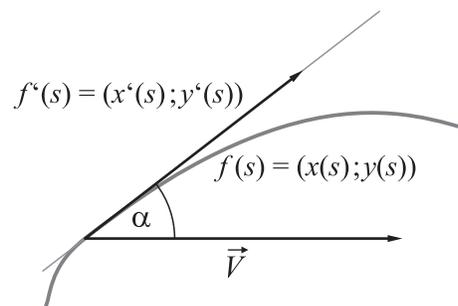
3 Krümmung und weitere interessante Kurven

3.1 Die Krümmung ebener Kurven

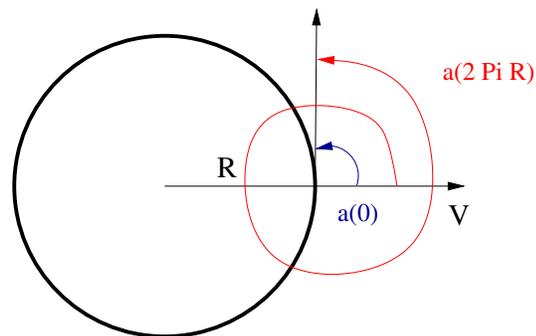
Ist $f(s)$ nach der Bogenlänge parametrisiert, dann ist die Krümmung

$$k(s) := \alpha'(s).$$

Dabei ist $\alpha(s)$ der Winkel zwischen einem beliebig, aber fest gewählten Vektor \vec{V} und $f'(s)$.



$$\begin{aligned} k &= \text{konstant} \\ \Rightarrow \int_0^{2\pi R} k \, ds &= \int_0^{2\pi R} \alpha'(s) \, ds \\ \Leftrightarrow 2\pi R \cdot k &= \alpha(2\pi R) - \alpha(0) \\ &= 2\pi \\ \Leftrightarrow k &= \frac{1}{R} \end{aligned}$$



3.1.1 Allgemeine Formel zur Berechnung der Krümmung

Zunächst noch ein Hilfssatz:

$$\begin{aligned}
 & |f'(s)| = 1 \\
 \Leftrightarrow & f'(s)^2 = 1 \\
 \Rightarrow & 2 \cdot f'(s) \cdot f''(s) = 0 \\
 \Leftrightarrow & f'(s) \cdot f''(s) = 0 \\
 \Rightarrow & f'(s) \perp f''(s) \\
 \Rightarrow & \cos(\angle(f''(s), \vec{V})) = \frac{\langle f''(s), \vec{V} \rangle}{|f''(s)|} = \sin \alpha \quad (1)
 \end{aligned}$$

Nun wird der aus der Formel für das Skalarprodukt gewonnene $\cos \alpha$ abgeleitet, wobei hier erwähnt sei, dass man Skalarprodukte mit einem konstanten Vektor wie Produkte mit konstanten Faktoren differenziert.

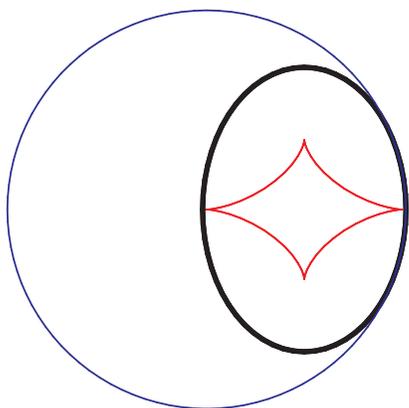
$$\begin{aligned}
 \cos \alpha &= \frac{\langle f'(s), \vec{V} \rangle}{|f'(s)| \cdot |\vec{V}|} \\
 &= \langle f'(s), \vec{V} \rangle \\
 \Rightarrow \sin \alpha \cdot \alpha' &= \langle f''(s), \vec{V} \rangle \quad | : \sin \alpha \\
 \alpha' &= k(s) = |f''(s)| \quad (\text{nach (1)})
 \end{aligned}$$

Durch die Kettenregel ergibt sich allgemein:

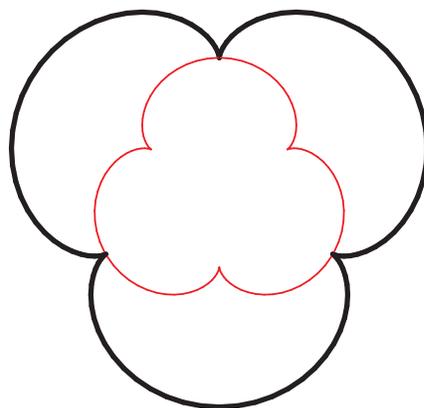
$$k(t) = \frac{y''(t) \cdot x'(t) - x''(t) \cdot y'(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

3.2 Krümmungskreis und Evolute

Für jeden Punkt einer Kurve ist der Krümmungskreis derjenige Kreis, der in diesem Punkt die Kurve berührt und dieselbe Krümmung wie sie besitzt.



Die Evolute einer Ellipse wird Asteroide (Sternenkurve) genannt.



Die Evolute einer (Epi-)Zykloide ist interessanterweise auch eine solche.

3.3 Die Klothoide

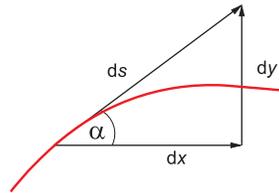
Beim Durchfahren einer Kurve mit dem Auto oder der Bahn soll die Fliehkraft $F_r = m \frac{v^2}{r}$ möglichst gleichmäßig wachsen.

Bei konstanter Geschwindigkeit gilt:

$$F_r \sim k \Leftrightarrow k = b s \stackrel{k=\alpha'(s)}{\Longleftarrow} \alpha(s) = \frac{b}{2} s^2.$$

Aus der nebenstehenden Skizze geht hervor:

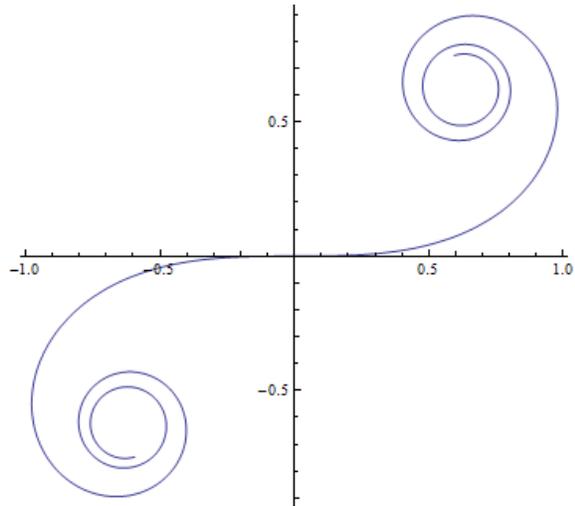
$$\begin{aligned} x'(s) &= \cos\left(\frac{b}{2} s^2\right) \\ y'(s) &= \sin\left(\frac{b}{2} s^2\right) \end{aligned}$$



Nochmals integriert sieht das dann aus wie in der folgenden Abbildung.

Bei Straßen, Eisen- und Achterbahnen sind Kurven im Idealfall in dieser Reihenfolge aus Stücken von Gerade, Klothoide, Kreis, Klothoide und Gerade zusammengesetzt, da die Fliehkraft von 0 bis zu einer oberen Schranke linear wachsen, dort konstant bleiben und dann wieder linear abnehmen soll.

Bei konventionellen Geschwindigkeiten ($< 160 \text{ km/h}$) werden im Eisenbahnbau auch kubische Parabeln als Kurven verwendet, die einer Klothoide in der Nähe ihres Ursprungs ähneln.



Symmetrie von Ornamenten

Teilnehmer:

Theresa Lechner	Gymnasium Ernestinum, Coburg
Alexey Loutchko	Heinrich-Hertz-Oberschule, Berlin
Dennis Menge	Heinrich-Hertz-Oberschule, Berlin
Simon Reinke	Herder-Oberschule, Berlin
Fynn Strohecker	CJD Christophorusschule, Rostock
Thimo Wellner	Käthe-Kollwitz-Oberschule, Berlin

Gruppenleiter:

Jürg Kramer	Humboldt-Universität zu Berlin Mitglied im DFG-Forschungszentrum MATHEON „Mathematik für Schlüsseltechnologien“
Anna v. Pippich	Humboldt-Universität zu Berlin Mitglied im DFG-Forschungszentrum MATHEON „Mathematik für Schlüsseltechnologien“

Die Beschreibung von Symmetrien ist eine sehr schöne Anwendung der Gruppentheorie und stellt somit eine wunderbare Verbindung zwischen Kunst und Mathematik dar. In unserem Sommerschulkurs haben wir uns mit Symmetrien von Ornamenten beschäftigt. Dabei verstehen wir unter einem Ornament ein periodisches Muster der Ebene:



Die Menge der orientierungserhaltenden Symmetrien eines Ornaments (Translations- und Drehsymmetrie) besitzt die Struktur einer Gruppe. Man spricht von der Symmetriegruppe eines Ornaments. Wir haben nachgewiesen, dass es überraschenderweise nur fünf verschiedene Symmetriegruppen von Ornamenten gibt.

1 Die Euklidische Bewegungsgruppe

Wir beginnen mit der allgemeinen Definition einer Gruppe.

Definition 1.1. Eine nicht-leere Menge G mit einer assoziativen Verknüpfung \circ heißt *Gruppe*, falls gilt:

- (1) Es existiert ein neutrales Element $e \in G$, so dass $a \circ e = e \circ a = a$ für alle $a \in G$ gilt.
- (2) Für alle $a \in G$ existiert ein inverses Element a^{-1} , so dass $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$ gilt.

Im folgenden betrachten wir die Menge aller *längen-* und *winkeltreuen* sowie *orientierungserhaltenden* Abbildungen der Euklidischen Ebene \mathbb{R}^2 .

Diese Abbildungen bestehen aus Translationen (Verschiebungen) und Drehungen.

Die Translation T_v um den Vektor $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ verschiebt ein Element $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ auf

$$x' = T_v x = x + v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + v_1 \\ x_2 + v_2 \end{pmatrix}.$$

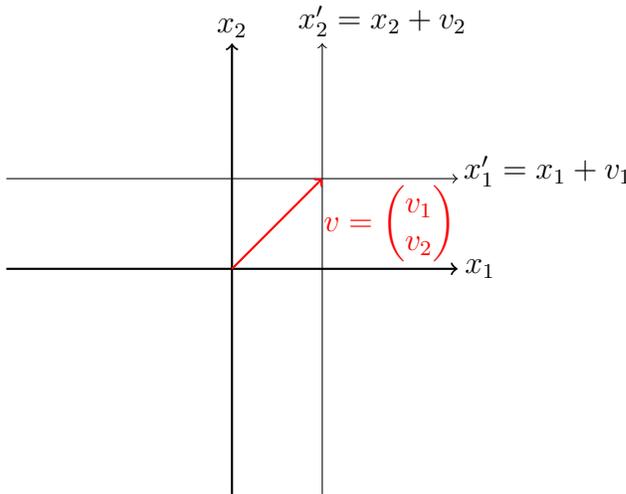


Illustration zur Verschiebung

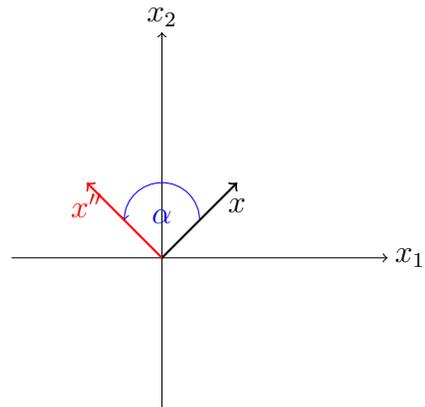


Illustration zur Drehung

Die Drehung D_α dreht x um den Winkel $\alpha \in [0; 2\pi)$ um den Ursprung auf

$$x'' = D_\alpha x = \begin{pmatrix} x_1 \cdot \cos \alpha - x_2 \cdot \sin \alpha \\ x_1 \cdot \sin \alpha + x_2 \cdot \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Die Drehmatrix

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

wird im Folgenden mit A_α bezeichnet.

Durch (A_α, v) können wir nun alle längen- und winkeltreuen sowie orientierungserhaltenden Abbildungen der Euklidischen Ebene darstellen, wobei A_α die Drehmatrix für die Drehung um den Ursprung und v der Translationsvektor ist.

Satz 1.1. *Die Menge*

$$G := \{(A_\alpha, v) \mid \alpha \in [0, 2\pi), v \in \mathbb{R}^2\}$$

kann zu einer Gruppe, der Euklidischen Bewegungsgruppe, gemacht werden.

Beweis. Wir definieren die Verknüpfung zweier Elemente (A_α, v) und (A_β, w) wie folgt:

$$(A_\beta, w) \circ (A_\alpha, v) = (A_{\alpha+\beta}, A_\beta v + w).$$

Als nächstes zeigen wir, dass diese Verknüpfung assoziativ ist. Wir haben einerseits

$$\begin{aligned} (A_\gamma, z) \circ ((A_\beta, w) \circ (A_\alpha, v)) &= (A_\gamma, v) \circ (A_{\alpha+\beta}, A_\beta v + w) \\ &= (A_{\alpha+\beta+\gamma}, A_{\beta+\gamma} v + A_\gamma w + z). \end{aligned}$$

Andererseits berechnen wir

$$\begin{aligned} ((A_\gamma, z) \circ (A_\beta, w)) \circ (A_\alpha, v) &= (A_{\beta+\gamma}, A_\gamma w + z) \circ (A_\alpha, v) \\ &= (A_{\alpha+\beta+\gamma}, A_{\beta+\gamma} v + A_\gamma w + z), \end{aligned}$$

was die Assoziativität bestätigt.

Man überlegt sich leicht, dass das Element $(A_0, 0)$ die Rolle des neutralen Elements spielt.

Wir zeigen schließlich, dass das zu (A_α, v) inverse Element durch $(A_{-\alpha}, -A_{-\alpha}v)$ gegeben ist, denn wir haben

$$\begin{aligned} (A_\alpha, v) \circ (A_{-\alpha}, -A_{-\alpha}v) &= (A_0, -v + v) = (A_0, 0), \text{ und} \\ (A_{-\alpha}, -A_{-\alpha}v) \circ (A_\alpha, v) &= (A_0, A_{-\alpha}v - A_{-\alpha}v) = (A_0, 0). \end{aligned}$$

□

Bemerkung. Eine Drehung $D_{P,\alpha}$ um den Punkt P um den Winkel α lässt sich in G nun wie folgt beschreiben:

$$\begin{aligned} D_{P,\alpha} &= T_v \circ D_\alpha \circ T_{-v} \\ &= (A_0, v) \circ (A_\alpha, 0) \circ (A_0, -v) \\ &= (A_\alpha, v) \circ (A_0, -v) \\ &= (A_\alpha, -A_\alpha v + v). \end{aligned}$$

2 Endliche Gruppen von Bewegungen

Wir beginnen mit der folgenden Definition.

Definition 2.1. Eine *Untergruppe* Γ einer Gruppe (G, \circ) wird aus einer nicht-leeren Teilmenge von G gebildet, die bezüglich derselben Verknüpfung \circ wieder eine Gruppe ist und dasselbe neutrale Element hat.

Für das Weitere benötigen wir den Begriff des Fixpunktes.

Definition 2.2. Als *Fixpunkt* einer Untergruppe der Euklidischen Bewegungsgruppe wird ein Punkt der Euklidischen Ebene bezeichnet, der von allen Elementen der Untergruppe festgelassen wird.

Satz 2.1. *Jede endliche Untergruppe Γ der Euklidischen Bewegungsgruppe G hat einen Fixpunkt.*

Beweis. Wir beweisen zuerst, dass die Untergruppe Γ nur Drehungen enthält. Dazu wird angenommen, dass Γ Translationen der Form $T_v = (A_0, v)$ mit $v \neq 0$ enthält. Daraus folgt, dass auch $T_v \circ T_v = (A_0, v) \circ (A_0, v) = (A_0, 2v)$ und somit $T_v \circ \dots \circ T_v = (A_0, nv)$ mit $n \in \mathbb{N}$ Elemente von Γ sind. Da n alle natürlichen Zahlen durchläuft, enthält Γ unendlich viele Translationen. Dies ist aber ein Widerspruch zur Voraussetzung, dass Γ endlich ist. Daher ist die Annahme, dass Γ Translationen enthält, falsch und Γ kann folglich nur Drehungen enthalten.

Nun wird gezeigt, dass Γ nur Drehungen um ein bestimmtes Drehzentrum enthalten kann. Dazu nehmen wir an, dass es in Γ zwei Drehungen $D_1 = (A_\alpha, 0)$ und $D_2 = (A_\beta, -A_\beta v + v) := (A_\beta, w)$ mit verschiedenen Drehzentren 0 und v gibt, wobei $\alpha, \beta \neq 0$ gilt. Wegen $\beta \neq 0$ folgt auch $A_\beta v \neq v$ und somit $w \neq 0$. Aufgrund der Gruppeneigenschaft von Γ liegen $D_1^{-1} = (A_{-\alpha}, 0)$ und $D_2^{-1} = (A_{-\beta}, -A_{-\beta}w)$ ebenfalls in Γ . Wir betrachten jetzt die Verknüpfung

$$\begin{aligned} D_1 \circ D_2 \circ D_1^{-1} \circ D_2^{-1} &= \\ ((A_\alpha, 0) \circ (A_\beta, w)) \circ ((A_{-\alpha}, 0) \circ (A_{-\beta}, -A_{-\beta}w)) &= \\ (A_{\alpha+\beta}, A_\alpha w) \circ (A_{-(\alpha+\beta)}, -A_{-(\alpha+\beta)}w) &= \\ (A_0, -w + A_\alpha w). \end{aligned}$$

Diese Bewegung ist aber eine Translation, obwohl sie in Γ liegen muss. Da in Γ nur Translationen liegen, deren Verschiebungsvektor der Nullvektor ist, muss $-w + A_\alpha w = 0$ gelten. Daraus folgt $A_\alpha w = w$; wegen $\alpha \neq 0$ folgt $w = 0$. Das ist ein Widerspruch zur Annahme, dass Γ Drehungen um zwei verschiedene Zentren enthält.

Daher kann Γ nur Drehungen um ein Drehzentrum enthalten. Das Drehzentrum wird von keinem Element aus Γ bewegt und ist somit der Fixpunkt von Γ . \square

Satz 2.2. Jede endliche Untergruppe Γ von G wird von der Drehung D_α erzeugt, wobei $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ ist.

Beweis. Sei $(A_\alpha, 0)$ Element von Γ . Daraus folgt, dass $(A_\alpha, 0) \circ (A_\alpha, 0) = (A_{2\alpha}, 0)$ und somit allgemein $(A_{q\alpha}, 0)$ mit $q \in \mathbb{N}$ in Γ enthalten sind. Da Γ nur endlich viele Bewegungen enthält, muss eine Drehung um ein gewisses Vielfaches von α ein Vielfaches von 2π sein, d.h.

$$q \cdot \alpha = 2\pi \cdot p \iff \alpha = 2\pi \cdot \frac{p}{q} \quad (p, q \in \mathbb{N}, q \neq 0).$$

Wir zeigen jetzt, dass damit Γ die Drehung $(A_\beta, 0)$ mit $\beta = \frac{2\pi}{q}$ enthält, wenn $(A_\alpha, 0)$ mit $\alpha = 2\pi \cdot \frac{p}{q}$ in Γ enthalten ist.

Dazu kann ohne Einschränkung angenommen werden, dass p und q teilerfremd sind. Mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus finden sich ganze Zahlen x, y derart, dass

$$x \cdot p + y \cdot q = 1$$

gilt. Durch Multiplikation mit $\frac{2\pi}{q}$ erhält man daraus

$$x \cdot 2\pi \cdot \frac{p}{q} + 2\pi \cdot y = \frac{2\pi}{q}.$$

Die Drehung um den Winkel $x \cdot 2\pi \cdot \frac{p}{q}$ entspricht der Drehung um $x \cdot \alpha$ und ist somit in Γ enthalten. Auch die Drehung um $2\pi \cdot y$, die der Nulldrehung entspricht, ist ein Element von Γ . Daher muss auch die Drehung um die Summe der beiden Winkel $\frac{2\pi}{q}$ in Γ enthalten sein. Daraus folgt, dass Γ Drehungen der Form $(A_\alpha, 0)$ mit $\alpha = \frac{2\pi}{q}$ enthält.

Wir betrachten jetzt die in Γ enthaltenen Drehungen mit Winkeln der Form $\frac{2\pi}{q_1}, \dots, \frac{2\pi}{q_N}$ ($N \in \mathbb{N}$). Nun wird gezeigt, dass eine natürliche Zahl n existiert, die durch jedes q_j ($j \in \{1, \dots, N\}$) teilbar ist.

Sei n das Maximum von q_1, \dots, q_N . Wir nehmen an, dass es ein q_i ($i \in \{1, \dots, N\}$) gibt, das kein Teiler von n ist. Daher gilt $\text{kgV}(q_i, n) > n$. Aus dem Euklidischen Algorithmus erhalten wir zwei ganze Zahlen x, y mit

$$x \cdot q_i + y \cdot n = \text{ggT}(q_i, n).$$

Durch Multiplikation mit $\frac{2\pi}{q_i \cdot n}$ erhält man

$$x \cdot \frac{2\pi}{n} + y \cdot \frac{2\pi}{q_i} = 2\pi \cdot \frac{\text{ggT}(q_i, n)}{q_i \cdot n} = \frac{2\pi}{\text{kgV}(q_i, n)}.$$

Die Drehungen um die Winkel $x \cdot \frac{2\pi}{n}$ und $y \cdot \frac{2\pi}{q_i}$ sind Elemente von Γ . Daher muss auch die Drehung um die Summe ihrer Winkel in Γ liegen, also die Drehung um

$\frac{2\pi}{\text{kgV}(q_i, n)}$. Da n das Maximum aller q_j ist und somit $\text{kgV}(q_i, n) \in \{q_1, \dots, q_N\}$ gilt, muss $n \geq \text{kgV}(q_i, n)$ sein. Da nun aber $n < \text{kgV}(q_i, n)$ ist, folgt daraus ein Widerspruch zu der Annahme, dass q_i kein Teiler von n ist.

Daher sind alle Drehwinkel α der Drehungen in Γ durch ganzzahlige Vielfache von $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ bestimmt. \square

3 Pflasterungsuntergruppen

Wir beginnen mit der folgenden Definition.

Definition 3.1. Eine Untergruppe $\Gamma \subseteq G$ heißt *Pflasterungsuntergruppe*, falls eine beschränkte und konvexe Teilmenge $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^2$ existiert, so dass die beiden folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

$$(i) \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma \mathcal{M} = \mathbb{R}^2$$

$$(ii) \gamma_1(\mathcal{M} \setminus \partial \mathcal{M}) \cap \gamma_2(\mathcal{M} \setminus \partial \mathcal{M}) \neq \emptyset \implies \gamma_1 \mathcal{M} = \gamma_2 \mathcal{M} \text{ für alle } \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma;$$

hierbei bezeichnet $\partial \mathcal{M}$ den Rand von \mathcal{M} .

Wir wollen nun zuerst die Teilmenge der Translationen einer Pflasterungsuntergruppe untersuchen. Dazu benötigen wir die folgende Definition.

Definition 3.2. Sei $\Gamma \subset G$ eine Pflasterungsuntergruppe. Dann bezeichne

$$T_\Gamma := \Gamma \cap \{\text{Translationen von } \mathbb{R}^2\} = \Gamma \cap \{T_v \mid v \in \mathbb{R}^2\}$$

die Teilmenge der Translationen von Γ , den sogenannten *Translationsanteil* von Γ . Weiter bezeichne

$$D_\Gamma := \Gamma \setminus T_\Gamma$$

alle Drehungen aus Γ ohne den Translationsanteil T_Γ .

Satz 3.1. Sei $\Gamma \subset G$ eine Pflasterungsuntergruppe und T_Γ ihr Translationsanteil. Dann existieren zwei nicht kollineare Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^2$ mit der folgenden Eigenschaft:

$$T_\Gamma = \{T_{mv+nw} = (A_0, m \cdot v + n \cdot w) \mid n, m \in \mathbb{Z}\},$$

d.h. jede Translation von Γ ist eine Translation um den Vektor $m \cdot v + n \cdot w$ für gewisse $m, n \in \mathbb{Z}$.

Beweis. Zuerst zeigen wir, dass Γ neben der Identität $\text{id} = (A_0, 0)$ noch weitere Translationen besitzt, d.h., dass

$$T_\Gamma \neq \{\text{id}\}$$

gilt. Wir nehmen im Gegensatz dazu an, dass $T_\Gamma = \{\text{id}\}$ gilt, d.h. Γ bestehe nur aus nicht-trivialen Drehungen. Alle diese Drehungen müssen dann das gleiche Zentrum besitzen; denn wären D_1 und D_2 zwei Drehungen mit verschiedenen Zentren, so ist das Element

$$D_1 \circ D_2 \circ D_1^{-1} \circ D_2^{-1}$$

eine nicht-triviale Translation (siehe Beweis von Satz 2.1), im Widerspruch zu unserer Annahme. Damit folgt, dass alle Drehungen das gleiche Zentrum besitzen. Dies bedeutet, dass die Menge

$$\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma \mathcal{M}$$

in einem genügend groß gewählten Kreis um dieses Drehzentrum liegt, was der Eigenschaft (i) in der Definition 3.1 widerspricht. Damit ist gezeigt, dass \mathbb{R}^2 nicht nur mit Hilfe von Drehungen vollständig gepflastert werden kann; es muss also $T_\Gamma \neq \{\text{id}\}$ gelten.

Als zweites zeigen wir nun, dass in T_Γ zwei nicht kollineare Vektoren existieren. Im Gegensatz dazu nehmen wir an, dass alle Translationen von T_Γ parallel sind. Ist nun $D \in D_\Gamma = \Gamma \setminus T_\Gamma$ eine beliebige Drehung und $T_v = (A_0, v)$ eine nicht-triviale Translation, so gilt

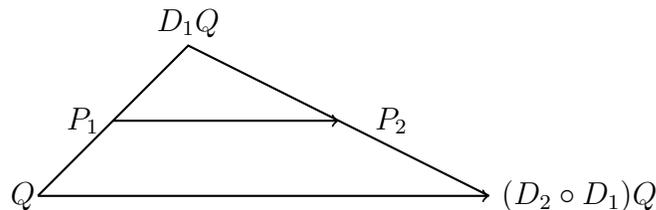
$$D \circ T_v \circ D^{-1} = T_{Dv} \in T_\Gamma,$$

d.h. das Element $D \circ T_v \circ D^{-1}$ ist eine Translation um den Vektor Dv ; dies folgt aus der Gleichheit

$$D_\alpha \circ T_v \circ D_{-\alpha} = (A_\alpha, 0) \circ (A_0, v) \circ (A_{-\alpha}, 0) = (A_0, A_\alpha v) = T_{A_\alpha v}$$

für eine Drehung D_α um den Ursprung. Aufgrund der Annahme muss der Vektor Tv parallel zum Vektor v sein und somit ist jede Drehung $D \in D_\Gamma$ eine Drehung um den Winkel π .

Seien nun $D_1, D_2 \in D_\Gamma$ zwei solche Drehungen um den Winkel π mit Drehzentren in den Punkten P_1 bzw. P_2 , gegeben durch die Ortsvektoren v_1 bzw. v_2 . Weiter sei Q ein Punkt mit dem Ortsvektor w , und es bezeichne D_1Q den Punkt zum Ortsvektor D_1w und $(D_2 \circ D_1)Q$ den Punkt zum Ortsvektor $(D_2 \circ D_1)w$:



Das Element $D_2 \circ D_1$ ist eine Translation um den Vektor $2\overrightarrow{P_1P_2}$, welcher parallel zu dem Vektor v sein muss. Damit ist gezeigt, dass die Zentren aller Drehungen aus D_Γ auf einer Geraden liegen, welche parallel zum Vektor v ist. Demnach liegt die Menge

$$\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma \mathcal{M}$$

in einem genügend breit gewählten Streifen um diese Gerade, was der Eigenschaft (i) in der Definition 3.1 widerspricht. Also ist unsere Annahme falsch und es existieren in T_Γ zwei nicht kollineare Vektoren.

Es bleibt zu zeigen, dass zwei nicht kollineare Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^2$ mit der Eigenschaft

$$T_\Gamma = \{T_{mv+nw} \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$$

existieren. Dazu sei P ein beliebiger Punkt der Euklidischen Ebene \mathbb{R}^2 . Da Γ eine Pflasterungsuntergruppe ist, liegen nur endlich viele Translate γP ($\gamma \in \Gamma$) von P in einem (genügend groß gewählten) Kreis um P . Wir bezeichnen nun das Translat γP , welches P am nächsten liegt, mit Q und setzen $v := \overrightarrow{PQ}$. Da in T_Γ zwei nicht kollineare Vektoren existieren, ist es möglich, ein weiteres Translat R von P zu wählen, welches ebenfalls minimal von P entfernt ist und die Eigenschaft besitzt, dass die Vektoren $w := \overrightarrow{PR}$ und v nicht kollinear sind. Offensichtlich gilt dann

$$T_\Gamma \supseteq \{T_{mv+nw} \mid n, m \in \mathbb{Z}\} \quad (3.1)$$

und für die Gleichheit genügt es, die umgekehrte Inklusion zu zeigen. Dazu nehmen wir an, dass T_Γ eine echte Obermenge von $\{T_{mv+nw} \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$ ist, d.h., dass

$$T_\Gamma \not\subseteq \{T_{mv+nw} \mid n, m \in \mathbb{Z}\} \quad (3.2)$$

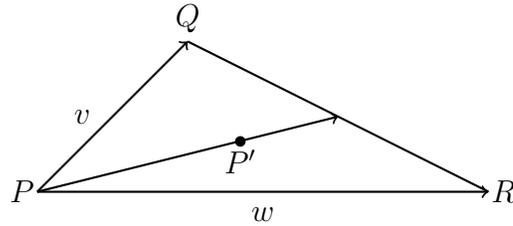
gilt. Wir betrachten nun das Parallelogramm

$$\mathcal{P} = \{P + \lambda v + \mu w \mid \lambda, \mu \in [0, 1]\};$$

wegen (3.1) gilt

$$\bigcup_{\gamma \in T_\Gamma} \gamma \mathcal{P} = \mathbb{R}^2.$$

Aufgrund der Annahme (3.2) muss ein Translat P' von P existieren, welches im Inneren von \mathcal{P} liegt und wir können ohne Einschränkung annehmen, dass P' in dem Dreieck mit den Eckpunkten P, Q, R liegt.



Damit ist der Abstand von P zu P' kleiner als der Abstand von P zu R , was der Wahl von R widerspricht. Somit kann es ein solches Translat P' von P nicht geben und wir haben bewiesen, dass es zwei nicht kollineare Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^2$ mit der Eigenschaft

$$T_\Gamma = \{T_{mv+nw} \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$$

gibt. □

Nachdem wir den Translationsanteil T_Γ einer Pflasterungsuntergruppe Γ untersucht haben, können wir nun beweisen, dass es nur fünf Pflasterungsuntergruppen gibt, indem wir alle Drehungen aus Γ ohne den Translationsanteil T_Γ , d.h. $D_\Gamma = \Gamma \setminus T_\Gamma$, klassifizieren.

Satz 3.2. *Es gibt 5 Typen von Pflasterungsuntergruppen. Die entsprechenden Pflasterungen der Euklidischen Ebene \mathbb{R}^2 sind in den Figuren 1 bis 5 dargestellt, welche aus [1] entnommen sind.*



Fig. 1



Fig. 2

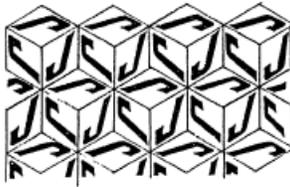


Fig. 3

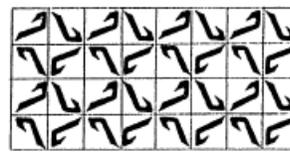


Fig. 4

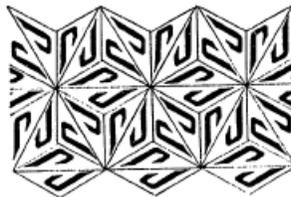


Fig. 5

Beweis. Zunächst wissen wir aufgrund des Satzes 2.2, dass alle Drehungen $D \in D_\Gamma$ Drehungen um einen Winkel der Form $\frac{2\pi}{n}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ sind; n wird hierbei auch als Ordnung der Drehung bezeichnet. Wir bestimmen nun die in Frage kommenden Ordnungen der Drehungen $D \in D_\Gamma$. Hierbei unterscheiden wir die folgenden Fälle:

Fall 1 ($D_\Gamma = \emptyset$, d.h. $n = 1$ für alle $D \in D_\Gamma$):

In diesem Fall ist D_Γ die leere Menge und damit ist Γ ausschließlich gleich T_Γ , besteht also nur aus Translationen. Diese Art der Pflasterung der Ebene \mathbb{R}^2 ist in Figur 1 zu erkennen.

Fall 2 ($D \circ D = \text{id}$ für alle $D \in D_\Gamma$):

Im zweiten Fall haben wir also $n = 2$ für jede Drehung, d.h. in der Menge D_Γ sind nur Drehungen um den Winkel π enthalten. Zu den Translationen kommen jetzt noch diese Drehungen hinzu, was die Pflasterung in Figur 2 liefert.

Fall 3 (Es existiert eine Drehung $D_1 \in D_\Gamma$ der Ordnung $n_1 \geq 3$):

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass D_1 eine Drehung mit dem Nullpunkt als Drehzentrum ist, d.h. es gilt

$$D_1 = D_{\alpha_1} = (A_{\alpha_1}, 0) \in D_\Gamma,$$

wobei $\alpha_1 = \frac{2\pi}{n_1}$ der Drehwinkel und n_1 die Ordnung der Drehung D_1 ist.

Nun wählen wir eine Drehung $D_2 \in D_\Gamma$ der Ordnung $n_2 \geq 3$ derart, dass das Zentrum von D_2 minimal vom Nullpunkt entfernt ist; mit v' bezeichnen wir den Ortsvektor des Drehzentrums von D_2 und mit $\alpha_2 = \frac{2\pi}{n_2}$ den Drehwinkel, d.h. $D_2 = (A_{\alpha_2}, v)$ mit $v := -A_{\alpha_2}v' + v'$. Durch eine kurze Rechnung erhalten wir für die Drehung $D_3 := (D_1 \circ D_2)^{-1}$ die Darstellung

$$\begin{aligned} D_3 &= (D_1 \circ D_2)^{-1} = ((A_{\alpha_1}, 0) \circ (A_{\alpha_2}, v))^{-1} = (A_{\alpha_1 + \alpha_2}, A_{\alpha_1}v)^{-1} \\ &= (A_{-\alpha_1 - \alpha_2}, -A_{-\alpha_2}v) = (A_{2\pi - \alpha_1 - \alpha_2}, -A_{-\alpha_2}v), \end{aligned}$$

d.h. D_3 besitzt ein Drehzentrum mit dem Ortsvektor $-A_{-\alpha_2}v$. Weiter gilt für den Drehwinkel $\alpha_3 = \frac{2\pi}{n_3}$ dieser Drehung die Formel

$$\begin{aligned} \alpha_3 \cdot \nu &= 2\pi - \alpha_1 - \alpha_2 \iff 2\pi = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \cdot \nu \iff \\ 2\pi &= \frac{2\pi}{n_1} + \frac{2\pi}{n_2} + \frac{2\pi}{n_3} \cdot \nu \end{aligned}$$

für ein gewisses $\nu \in \mathbb{N}$. Wir zeigen nun, dass sogar $\nu = 1$ gilt. Denn wäre nämlich $\nu > 1$, so gäbe es eine Drehung $D'_2 \in D_\Gamma$ mit einem Drehwinkel kleiner als α_2 und somit wäre das Drehzentrum der Drehung $D'_3 := (D_1 \circ D'_2)^{-1}$ näher am Nullpunkt als das Drehzentrum der Drehung D_2 . Damit muss also $\nu = 1$ gelten

und wir erhalten die Schlüsselrelation

$$2\pi = \frac{2\pi}{n_1} + \frac{2\pi}{n_2} + \frac{2\pi}{n_3} \iff 1 = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3}. \quad (3.3)$$

Aus dieser Relation leiten wir nun die Pflasterungen der Figuren 4, 5, 6 ab. Es gibt nämlich nur vier Möglichkeiten diese Gleichheit (3.3) für n_1, n_2, n_3 wie gegeben zu lösen, wobei die dritte und die vierte Möglichkeit zusammenfallen:

- $n_1 = 3, n_2 = 3, n_3 = 3 \implies \alpha_1 = \frac{2\pi}{3}, \alpha_2 = \frac{2\pi}{3}, \alpha_3 = \frac{2\pi}{3},$
- $n_1 = 4, n_2 = 4, n_3 = 2 \implies \alpha_1 = \frac{2\pi}{4}, \alpha_2 = \frac{2\pi}{4}, \alpha_3 = \frac{2\pi}{2},$
- $n_1 = 3, n_2 = 6, n_3 = 2 \implies \alpha_1 = \frac{2\pi}{3}, \alpha_2 = \frac{2\pi}{6}, \alpha_3 = \frac{2\pi}{2},$
- $n_1 = 6, n_2 = 3, n_3 = 2 \implies \alpha_1 = \frac{2\pi}{6}, \alpha_2 = \frac{2\pi}{3}, \alpha_3 = \frac{2\pi}{2}.$

Damit haben wir insgesamt gezeigt, dass es nur fünf Typen von möglichen Pflasterungen der Euklidischen Ebene \mathbb{R}^2 gibt. \square

Literatur

- [1] M. Berger, Geometry. Band I, II. Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [2] J. Kramer, Notizen zur Geometrie I. Vorlesungsskript, ETH Zürich, WS 98/99.

Simulation elektrischer Schaltungen

mittels Modifizierter Knotenanalyse

Teilnehmer:

Artur Stephan	Heinrich-Hertz-Oberschule, Berlin
Andreas Dietrich	Heinrich-Hertz-Oberschule, Berlin
Thomas Schoppe	Heinrich-Hertz-Oberschule, Berlin
Maximilian Gruber	Immanuel-Kant-Oberschule, Berlin
Jacob Zschuppe	Käthe-Kollwitz-Oberschule, Berlin
Sven Wittig	Herder-Oberschule, Berlin

Gruppenleiter:

René Lamour	Humboldt-Universität zu Berlin Mitglied im DFG-Forschungszentrum MATHEON „Mathematik für Schlüsseltechnologien“
-------------	---

Um einen Schaltkreis und sein Verhalten zu analysieren, muss man ihn nicht zusammenlöten und messen, sondern kann ihn auch mathematisch simulieren. Da dies sehr rechenintensiv ist, ist die Verwendung eines Computers sinnvoll. Die dazu notwendigen Gleichungen werden hier abgeleitet.

1 Modifizierte Knotenanalyse

1.1 Grundlagen der Basisbauteile

Um einen elektrischen Schaltkreis untersuchen zu können, benötigen wir die physikalischen Grundlagen der Bauteile. Dabei haben wir festgestellt, dass man mittels Ohmschen Widerstands, Spule, Kondensators, Spannungs- und Stromquelle Ersatzschaltungen für alle anderen Bauelemente finden kann. Es ist also immer möglich, Schaltungen auf diese fünf Bauteile zurückzuführen.



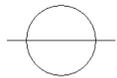
Ohmscher Widerstand Es gilt das Ohmsche Gesetz:
 $R = \frac{U}{I} \Leftrightarrow G = R^{-1} = \frac{I}{U}$



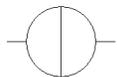
Kondensator Für den (idealen) Kondensator gilt:
 $I = C \cdot \dot{U}$



Spule Bei der (idealen) Spule ist
 $U = L \cdot \dot{I}$



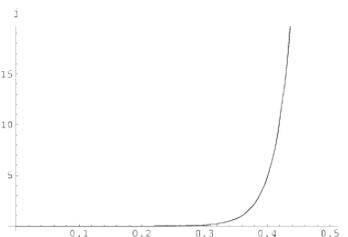
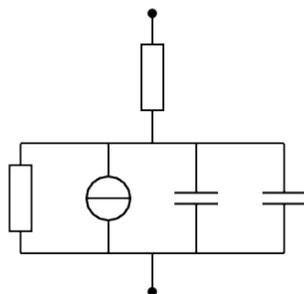
Spannungsquelle $u = u(t)$



Stromquelle $i = i(t)$

Als Beispiel für ein Ersatzschaltbild haben wir die Diode betrachtet, die bis zu einer Grenzspannung U_G einen sehr hohen Widerstand hat und sich danach im Idealfall wie ein Ohmscher Widerstand verhält, d.h. $(U - U_G) I$.

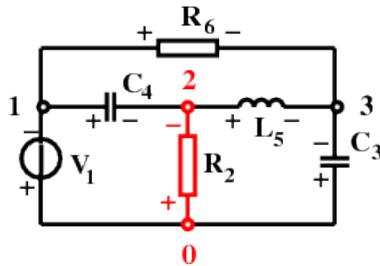
Ein mögliches Ersatzschaltbild, welches das Verhalten der Diode annähernd imitiert, und die dazugehörige Kennlinie sähen z.B. so aus:



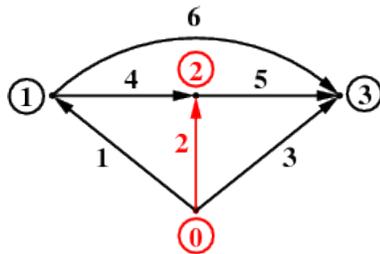
1.2 Netzwerktopologie

1.2.1 Schaltkreis modellieren

Ein jeder Schaltkreis kann mit Hilfe der Graphentheorie vereinfacht dargestellt werden. Nehmen wir zur Veranschaulichung ein Beispiel.



Nun werden an Verzweigungen bzw. zwischen zwei Bauteilen Knoten gelegt, so dass zwischen zwei Knoten immer genau ein Bauteil liegt. Des weiteren geben wir jeder Verbindung zwischen den Knoten eine Richtung. Da ein Pfeil immer nur durch ein Bauteil geht, steht er stellvertretend für den Strom im Bauteil.



1.2.2 Inzidenzmatrix

Unter Zuhilfenahme dieses Graphen lässt sich nun eine Inzidenzmatrix aufstellen, die die Struktur vollständig wiedergibt. Dabei gelten folgende Regeln zum Aufstellen:

- 1 - Pfeil zeigt vom entsprechenden Knoten weg
- 0 - Pfeil hat keine Verbindung zum entsprechenden Knoten
- 1 - Pfeil zeigt auf den entsprechenden Knoten hin

$$\bar{A} = \begin{array}{cccccc|c} I_1 & R_2 & C_3 & C_4 & L_5 & R_6 & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 3 \end{array}$$

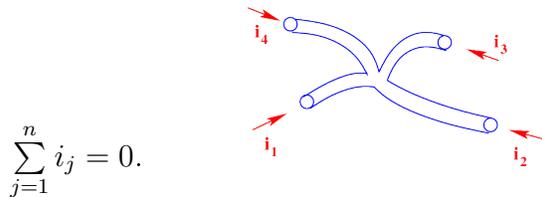
Wie man gut erkennen kann, lässt sich jede Zeile vollständig durch die verbleibenden wiederherstellen. Daher lässt man eine Zeile (im Beispiel die erste) weg und erhält die eigentliche Inzidenzmatrix A . Der weggelassene Knoten sei der Masseknoten und erhält daher das Potenzial $e_0 = 0$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1.3 Kirchhoffsche Gesetze

1.3.1 Knotensatz

Allgemein besagt der Knotensatz, dass die Summe aller Ströme in einem Knoten gleich null ist. Es fließt also genauso viel Strom zum Knoten, wie auch wieder weg.



$$\sum_{j=1}^n i_j = 0.$$

1.3.2 Verbindung von Knotensatzes und Inzidenzmatrix

	Knoten	
	0	$i_1 + i_2 + i_3 = 0,$
Der Knotensatz gilt in unserem Beispiel in jedem Knoten:	1	$-i_1 + i_4 + i_6 = 0,$
	2	$-i_2 - i_4 + i_5 = 0,$
	3	$-i_3 - i_5 - i_6 = 0.$

Sei nun i der Vektor, der die Stromstärken enthält, also

$$i^T = (i_1 \ i_2 \ i_3 \ i_4 \ i_5 \ i_6).$$

Das obige Gleichungssystem kann auch wie folgt geschrieben werden:

$$\bar{A} \cdot i = \begin{pmatrix} i_1 + i_2 + i_3 + 0 + 0 + 0 \\ -i_1 + 0 + 0 + i_4 + 0 + i_6 \\ 0 - i_2 + 0 - i_4 + i_5 + 0 \\ 0 + 0 - i_3 + 0 - i_5 - i_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0},$$

sodass auch

$$A \cdot i = \vec{0} \tag{1}$$

gilt.

1.3.3 Herleitung einer passenden DAE

Gesucht ist ein System von Differential-algebraischen Gleichungen (DAE), das den zeitlichen Verlauf der unbekanntenen Größen beschreibt.

Wie im Schaltbild zu erkennen, sind die Knoten nummeriert. Die Spannungen an den Bauelementen ergeben sich somit als Differenzen der Potentiale der angrenzenden Knoten:

$$\begin{aligned} u_1 &= e_0 - e_1, \\ u_2 &= e_0 - e_2, \\ u_3 &= e_0 - e_3, \\ u_4 &= e_1 - e_2, \\ u_5 &= e_2 - e_3, \\ u_6 &= e_1 - e_3. \end{aligned}$$

Sei e der Vektor der Potentiale $e_1 \dots e_3$, wobei $e_0 = 0$ ist, und u der Vektor der Spannungen $u_1 \dots u_6$. Dann ergibt sich aus den obigen Gleichungen:

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e_1 + 0 + 0 \\ 0 - e_2 + 0 \\ 0 + 0 - e_3 \\ e_1 - e_2 + 0 \\ 0 + e_2 - e_3 \\ e_1 + 0 - e_3 \end{pmatrix} = A^T \cdot e.$$

Es ist also

$$A^T \cdot e = u. \tag{2}$$

Für unser Beispiel gelten darüber hinaus die entsprechenden Formeln aus der Tabelle:

$$\begin{aligned}
 i_1 &= i_1(t) \\
 i_2 &= G_2 \cdot u_2 \\
 i_3 &= C_3 \cdot \dot{u}_3 \\
 i_4 &= C_4 \cdot \dot{u}_4 \\
 u_5 &= L_5 \cdot i'_5 \\
 i_6 &= G_6 \cdot u_6
 \end{aligned}$$

Setzt man dies in (1) ein und behält die Gleichung für die Spule bei, so ergibt sich ein System von Differentialgleichungen mit den gesuchten Größen e_1, e_2, e_3 und i_5 :

$$\begin{array}{rcl}
 -i_1(t) + C_4 \cdot \dot{u}_4 + G_6 \cdot u_6 = 0 & & -i_1(t) + C_4 \cdot (\dot{e}_1 - \dot{e}_2) + G_6 \cdot (e_1 - e_3) = 0 \\
 -G_2 \cdot u_2 - C_4 \cdot \dot{u}_4 + i_5 = 0 & \stackrel{(2)}{\iff} & G_2 \cdot e_2 - C_4 \cdot (\dot{e}_1 - \dot{e}_2) + i_5 = 0 \\
 -C_3 \cdot \dot{u}_3 - i_5 - G_6 \cdot u_6 = 0 & & C_3 \cdot \dot{e}_3 - i_5 - G_6 \cdot (e_1 - e_3) = 0 \\
 u_5 - L \cdot i'_5 = 0 & & (e_2 - e_3) - L_5 \cdot i'_5 = 0
 \end{array}$$

1.4 Modifizierte Knotenanalyse

Da reale Schaltungen im allgemeinen aus vielen hundert bis Millionen Bauteilen bestehen, gibt man folgende allgemeine Form der Inzidenzmatrix an:

$$A = (A_C \quad A_R \quad A_L \quad A_U \quad A_I).$$

Dabei sind die einzelnen A_X Matrizen, die wiederum aus den Spaltenvektoren jedes einzelnen Bauteils aufgebaut sind (und somit angeben, zwischen welchen Knoten welches Bauteil liegt).

Multipliziert man nun die allgemeine Inzidenzmatrix mit dem Vektor aller Stromstärken, so ergibt sich folgendes System von Gleichungen. Dabei ist C eine Matrix mit den einzelnen Kapazitäten auf der Hauptdiagonalen und G analog dazu eine Matrix mit den Kehrwerten der Widerstände.

$$\begin{aligned}
 A &= (A_C \quad A_R \quad A_L \quad A_U \quad A_I) \\
 i^T &= (i_C \quad i_R \quad i_L \quad i_U \quad i_I) \\
 Ai &= \vec{0} \quad \text{(Knotensatz)} \\
 \vec{0} &= A_C i_C + A_R i_R + A_L i_L + A_U i_U + A_I i_I
 \end{aligned}$$

$$A_C C A_C^T \dot{e} + A_R G A_R^T e + A_L i_L + A_U i_U + A_I i_I = \vec{0} \quad (3)$$

$$A_L^T e = L i'_L \quad (4)$$

$$A_U^T e = u(t) \quad (5)$$

2 Numerische Integration von Differentialgleichungen

Bei der Modifizierten Knotenanalyse liegen nun Systeme von DAEs vor, die im Falle von Index-1-Gleichungen in Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen überführt werden können, also Differentialgleichungen, in denen nur eine unabhängige Variable vorkommt. Diese haben im Allgemeinen die Form

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t),$$

wobei $x(t)$ ein Vektor in \mathbb{R}^n und t aus einem gegebenen Intervall sind, also

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), t) \\ f_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), t) \\ \vdots \\ f_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), t) \end{pmatrix}.$$

Dieses Differentialgleichungssystem lässt sich durch Integrieren wie folgt umformen:

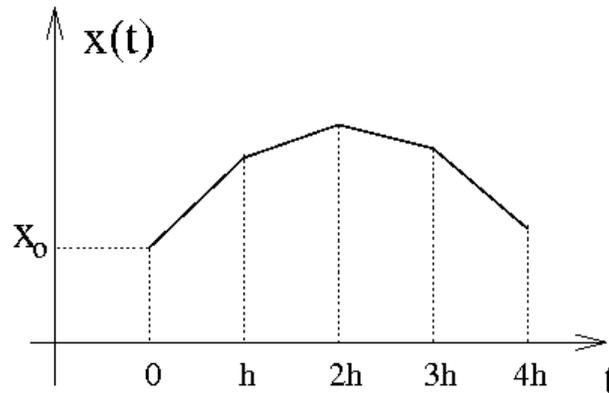
$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), t), \\ \Rightarrow \int_0^t \dot{x}(\xi) d\xi &= \int_0^t f(x(\xi), \xi) d\xi, \\ \Rightarrow x(t) - x(0) &= \int_0^t f(x(\xi), \xi) d\xi, \\ \Rightarrow x(t) &= x(0) + \int_0^t f(x(\xi), \xi) d\xi. \end{aligned}$$

Man erkennt, dass die Lösung des gewöhnlichen Differentialgleichungssystems (ODE) von dem Anfangswert $x(0) = x_0$ abhängt und nur durch ihn eindeutig bestimmt werden kann.

Die folgenden beiden Lösungsverfahren approximieren schrittweise die Lösung $x(t)$ des Differentialgleichungssystems.

2.1 Das Explizite Eulerverfahren

Das Explizite Eulerverfahren nähert die Lösung von Differentialgleichungssystemen durch die Zusammensetzung von kleinen Teilstrecken an. Durch das gegebene System ist der Anstieg $f(x(t), t) = \dot{x}(t)$ in jedem Punkt bekannt. Angefangen mit



dem Anfangswert x_0 erhält man einen neuen Punkt, indem man dem Anstieg ein kleines Stück h folgt. So wird das gesamte Intervall durchschritten, wodurch eine Annäherung der Lösung $x(t)$ erzielt wird. Dadurch ergibt sich folgende rekursive Bildungsvorschrift

$$x_{i+1} = x_i + hf(x_i, t_i).$$

Je kleiner h gewählt wird, desto genauer wird die Approximation.

Die selbe Formel ergibt sich aus einer bekannten Näherungsformel für die Integralberechnung, die linke Rechteckregel.

Zum Zeitpunkt h gilt die bereits erwähnten Formel $x(h) = x(0) + \int_0^h f(x(\xi), \xi) d\xi$.

Nun ist für kleine h das Integral $\int_0^h f(x(\xi), \xi) d\xi$ ungefähr $hf(x_0, t_0)$. Ebenso kann

jedes Integral $\int_{ih}^{(i+1)h} f(x(\xi), \xi) d\xi$ durch $hf(x_i, t_i)$ angenähert werden, was die Formel $x_{i+1} = x_i + hf(x_i, t_i)$ ergibt.

2.2 Die Implizite Trapezregel

Offensichtlich ist die Abschätzung der linken Rechteckregel nicht die beste Approximation für Integrale. So kann durch die Trapezregel, bei der das Integral durch kleine Trapeze anstelle von Rechtecken angenähert wird, eine bessere Abschätzung erfolgen. Der Flächeninhalt eines Trapezes berechnet sich aus dem Produkt der Höhe und dem arithmetischen Mittel der Längen der parallelen Seiten. So ergibt sich analog zum Eulerverfahren die Formel

$$x_{i+1} = x_i + \frac{h}{2}(f(x_i, t_i) + f(x_{i+1}, t_{i+1})).$$

Dieses Verfahren ist im Gegensatz zum expliziten Eulerverfahren implizit, da der unbekannte Vektor x_{i+1} auf beiden Seiten der Gleichung auftaucht und sich dadurch nicht so leicht berechnen lässt. Formt man die Gleichung zu

$$F(x_{i+1}) = x_{i+1} - x_i - \frac{h}{2}(f(x_i, t_i) + f(x_{i+1}, t_{i+1})) = 0$$

um, so erhält man ein äquivalentes Problem, die Nullstellenbestimmung einer Funktion. Die Lösung der Gleichung $F(x_{i+1}) = 0$ kann mit Hilfe des Newtonverfahrens ermittelt werden. Die iterative Bildungsvorschrift lautet

$$x_{i+1} = x_i - (F'(x_i))^{-1}F(x_i).$$

Da x und F n -dimensionale Vektoren sind, ergeben sich einige kleine Schwierigkeiten, die sich jedoch beheben lassen. So kann zum Beispiel keine Division durchgeführt werden, stattdessen lösen wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} F'(x_i)z &= F(x_i) \\ x_{i+1} &= x_i - z. \end{aligned}$$

Außerdem muss $F'(x)$ über eine Jacobi-Matrix, der Matrix der partiellen Ableitungen $\frac{Df}{Dx} = \left(\frac{\partial f_k(x)}{\partial x_l}\right)$, berechnet werden. Dann ist

$$F'(x_{i+1}) = I - \frac{h}{2} \frac{Df(x_{i+1}, t_{i+1})}{Dx},$$

wobei I die Einheitsmatrix ist.

Erstaunlicherweise kann man zeigen, dass nach genau einem Schritt der Fehler des Newtonverfahrens in der Größenordnung des Fehlers der Trapezregel ist.

Als Startwert wird der bereits bekannte Wert x_i benutzt.

3 Beispiele

Die oben beschriebenen Verfahren wurden in MATLAB implementiert. Um nun konkrete Schaltungen simulieren zu können, muss für die jeweilige Schaltung das Differentialgleichungssystem und die zugehörige JACOBI-Matrix aufgestellt und in Matlab-Code überführt werden. Dies wurde exemplarisch für zwei verschiedene Schaltungen durchgeführt.

3.1 RCL-Schwingkreis

Der untersuchte Schwingkreis Abb. 1 besteht aus konstanten Widerstand R , Kapazität C , Induktivität L und einer zeitlich abhängigen Spannungsquelle $v(t)$. Mit dieser allgemeinen Schaltung lässt sich sowohl der ungedämpfte ($R = 0$) als auch der gedämpfte Fall ($R \neq 0$) simulieren.

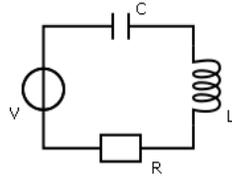


Abbildung 1: RCL-Schwingkreis

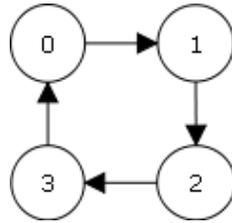


Abbildung 2: Topologie des Schwingkreises

3.1.1 Modifizierte Knotenanalyse

Für den Schwingkreis wird zunächst eine modifizierte Knotenanalyse nach Abschnitt 1.4 durchgeführt. Aus Abbildung 1 ergibt sich die Netzwerktopologie wie in Abbildung 2 dargestellt, mit der sich die Inzidenzmatrix A aufstellen lässt (Die Spalten bezeichnen die Bauteile V , C , L , R , die Zeilen die Knoten 1, 2 und 3.)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe der besprochenen Gleichungen (KIRCHHOFFSche Gesetze) ermittelt sich

für das betrachtete Potenzial $e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$ und den Strom $i = \begin{pmatrix} i_v \\ i_C \\ i_L \\ i_R \end{pmatrix}$ das Differentialgleichungssystem zu

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{i}_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{C} * i_L \\ \frac{1}{L} * (e_1 - (R * i_L + v(t))) \end{pmatrix},$$

sowie die zugehörige Jacobi-Matrix zu

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix}.$$

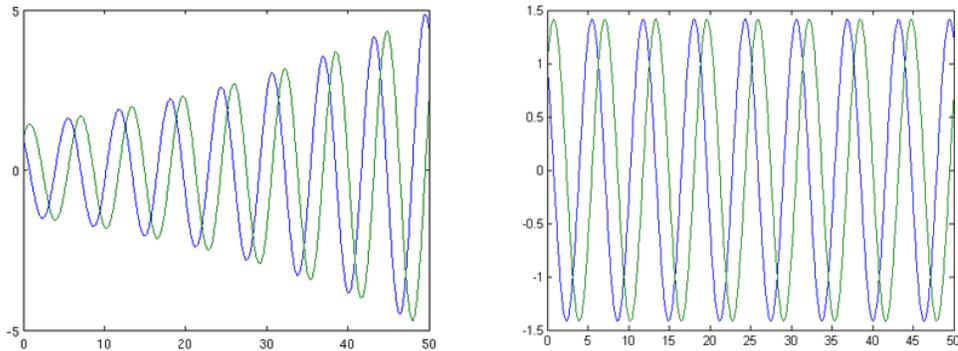


Abbildung 3: Vergleich EULER- und Trapezverfahren

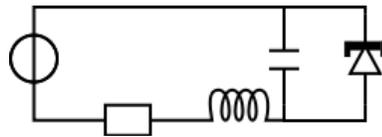


Abbildung 4: Tunneldioden-Oszillator

3.1.2 Simulation in MATLAB

Mit den erhaltenen Gleichungen wird in Matlab das Verhalten der Schaltung bei verschiedenen Parametern (Bauteilkonstanten) simuliert. Die beiden Integrationsverfahren liefern unter Verwendung gleicher Parameter ($R = 0$, $C = 1$, $L = 1$, $v(t) = 0$) die Ergebnisse wie in Abbildung 3. Wie man sieht, unterscheiden sich die Ergebnisse der beiden Verfahren. Während die Simulation mittels der impliziten Trapezregel das Verhalten der Schaltung physikalisch korrekt wiedergibt, wächst beim EULER-Verfahren die Amplitude mit der Zeit an, was bedeuten würde, dass dem System Energie “zugeführt wird”. Dieser Effekt ist zurückzuführen auf den Fehler, der bei jedem Approximationsschritt im EULER-Verfahren besteht. Da die Trapezregel diesen Verfahrensfehler nicht aufweist, liefert sie das bessere Ergebnis.

3.2 Tunneldioden-Oszillator

Für den Tunneldioden-Oszillator gilt nach [1] das Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} * (u_1 - u_2) + \dot{u}_{op} \\ -\frac{1}{R} * (u_1 - u_{op}) + f(u_2) \end{pmatrix}$$

mit der Diodenkennlinie $f(u) = a_1 * u + a_2 * u^2 + a_3 * u^3$ (Die bauteilspezifischen Koeffizienten sind $a_1=1,80048$, $a_2=-8,766$, $a_3=10,8$).

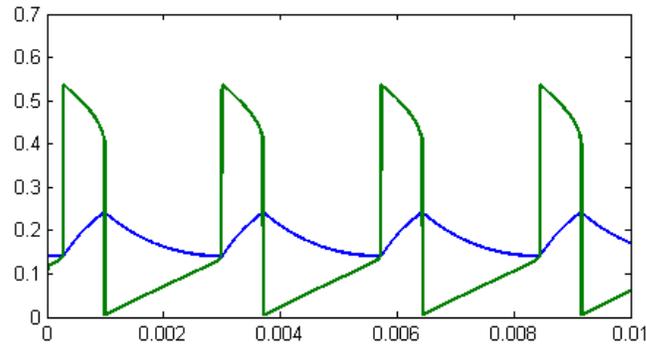


Abbildung 5: Spannungsverlauf Tunnelnioden-Oszillator

Da der Oszillator eine sehr hohe Schwingungsfrequenz hat, muss, um einzelne Schwingungen erkennbar zu machen, ein sehr kleines Zeitintervall gewählt werden (im Beispiel 10^{-2} s). Außerdem muss eine sehr kleine Approximationsschrittweite gewählt werden, um die technisch realistisch gesetzten Bauteilkonstanten ($C = 10^{-7}$ F, $L = 2 * 10^{-3}$ H, $R = 1\Omega$, $u_{op} = 0,25$ V) bei der Rechnung auszugleichen.

Literatur

- [1] W. Kampowsky, P. Rentrop, W. Schmidt. Classification and numerical simulation of electric circuits. *Surv. Math. Ind.* (1992)2, 23–65.