Lösungsblatt zum WiS!-Artikel: Walzer mit Sylvia:

1) $m = \rho \cdot (1 / 6) \cdot \pi \cdot d^3$ => $d = [6 \cdot m / (\pi \cdot \rho)]^{1/3} = 413$ km

2) Nimmt man die Dichten aller drei Asteroiden gleich an, so ist
$m_{Romulus} = m_{Sylvia} \cdot (d_{Romulus} / d_{Sylvia})^3 = 1{,}23 \cdot 10^{15}$ kg und $m_{Remus} = 7{,}21 \cdot 10^{13}$ kg
Für ihre Bahngeschwindigkeit v gilt dann: $v = 2 \cdot \pi \cdot r / T$ $v_{Romulus} = 27{,}0$ m/s, $m_{Remus} = 37{,}6$ m/s

3) Kraft zwischen Sonne und Sylvia $= G \cdot m_{Sonne} \cdot m_{Sylvia} / r^2$
$= 6{,}673 \cdot 10^{-11}\ m^3/kg\ s^2 \cdot 2{,}0 \cdot 10^{30}\ kg \cdot 1{,}48 \cdot 10^{19}\ kg / (3{,}5 \cdot 149 \cdot 10^9\ m)^2 = 7{,}26 \cdot 10^{16}$ N
Kraft zwischen: Sonne und Romulus: $6{,}03 \cdot 10^{12}$ N, Sonne und Remus: $3{,}54 \cdot 10^{11}$ N
Sylvia und Romulus: $6{,}56 \cdot 10^{12}$ N, Sylvia und Remus: $1{,}41 \cdot 10^{12}$ N
Romulus und Remus beim geringsten Abstand: $1{,}40 \cdot 10^8$ N
Wenn Romulus und Remus Sylvia umkreisen, ändert sich ihr Abstand zur Sonne: Bei Romulus erhöht sich die Kraft maximal um den Faktor
$(3{,}5 \cdot 149 \cdot 10^9\ m + 1360 \cdot 10^3\ m)^2 / (3{,}5 \cdot 149 \cdot 10^9\ m)^2 = 1 + (1360 \cdot 10^3\ m)^2 / (3{,}5 \cdot 149 \cdot 10^9\ m)^2$
$= 1 + 6{,}8 \cdot 10^{-12}$, bei Remus ist diese Änderung noch geringer.

3) Der Gesamtimpuls des Systems ist
$p = p_{Sylvia} + p_{Romulus} + p_{Remus} = m_{Sylvia} \cdot v_{Sylvia} + m_{Romulus} \cdot (v_{Sylvia} + v_{Romulus}) + m_{Remus} \cdot (v_{Sylvia} + v_{Remus}) =$
$1{,}48 \cdot 10^{19}$ kg · 15,94 km/s + $1{,}23 \cdot 10^{15}$ kg · (15,94 km/s + 0,027 km/s)
+ $7{,}21 \cdot 10^{13}$ kg · (15,94 km/s + 0,038 km/s) = $2{,}359 \cdot 10^{23}$ kg m / s
Die Schwerpunktsgeschwindigkeit ist 15,94 km/s + 2,43 mm/s. Der Schwerpunkt des Systems dürfte recht genau im Zentrum von Sylvia sitzen.

4) Der gesamte Bahndrehimpuls ist etwa $l = p \cdot r = 2{,}359 \cdot 10^{23}$ kg m / s · 3,5 · 149 · 10^9 m = $1{,}2302 \cdot 10^{35}$ kg m² / s, dazu liefert Romulus einen Beitrag von $m_{Romulus} / m_{Sylvia} = 0{,}000831$ und Remus noch weniger.

5) Die Bewegungsenergie ist $E_{kin} = ½\ m\ v^2$.
Sie beträgt für Sylvia $0{,}5 \cdot 1{,}48 \cdot 10^{19}$ kg · (15,94 km/s)² = $1{,}88 \cdot 10^{27}$ J,
für Romulus $0{,}5 \cdot 1{,}23 \cdot 10^{15}$ kg · (15,94 km/s + 0,027 km/s)² = $1{,}57 \cdot 10^{23}$ J und
für Remus $0{,}5 \cdot 7{,}21 \cdot 10^{13}$ kg · (15,94 km/s + 0,038 km/s)² = $9{,}2 \cdot 10^{21}$ J

Die Gravitationsenergie von Sylvia im Schwerefeld der Sonne beträgt $E_G = - G\ m_{sonne} \cdot m_{Sylvia} / r$
$= - 6{,}673 \cdot 10^{-11}\ m^3/kg\ s^2 \cdot 2{,}0 \cdot 10^{30}\ kg \cdot 1{,}48 \cdot 10^{19}\ kg / (3{,}5 \cdot 149 \cdot 10^9\ m) = 3{,}788 \cdot 10^{27}$ J
Die Gravitationsenergie von Romulus im Schwerefeld der Sonne beträgt dann
$- 6{,}673 \cdot 10^{-11}\ m^3/kg\ s^2 \cdot 2{,}0 \cdot 10^{30}\ kg \cdot 1{,}23 \cdot 10^{15}\ kg / (3{,}5 \cdot 149 \cdot 10^9\ m) = -3{,}148 \cdot 10^{23}$ J , bei Remus beträgt sie entsprechend $-1{,}845 \cdot 10^{22}$ J.
Die Gravitationsenergie von Romulus im Schwerefeld von Sylvia beträgt $-4{,}35 \cdot 10^{12}$ J. Der Einfluss der Asteroiden aufeinander kann also für die Berechnung ihrer Gravitationsenergie vernachlässigt werden.
Will man Romulus aus der Bindung an Sylvia lösen, muss man ihm die Energie von $4{,}35 \cdot 10^{12}$ J zuführen, will man ihn aus dem Sonnensystem entfernen, benötigt man $1{,}845 \cdot 10^{22}$ J.