Im Banne der Dunklen Materie - die rätselhafte Rotation der Galaxien

- Version "light" für zweistündige Astronomiekurse (überarbeitet von Hermann Hammer)

Die im Kosmos vorhandene Dunkle Materie erinnert an den Träger der zuweilen in Märchen und Sagen vorkommenden Tarnkappe. So wie der unsichtbar ist und dennoch agieren kann, so bleibt die Dunkle Materie unseren Teleskopen verborgen und wirkt trotzdem durch ihre Gravitation. Das Agieren der Dunklen Materie in den Galaxien wird u. a. erkennbar, wenn man die Rotation der Galaxien untersucht.

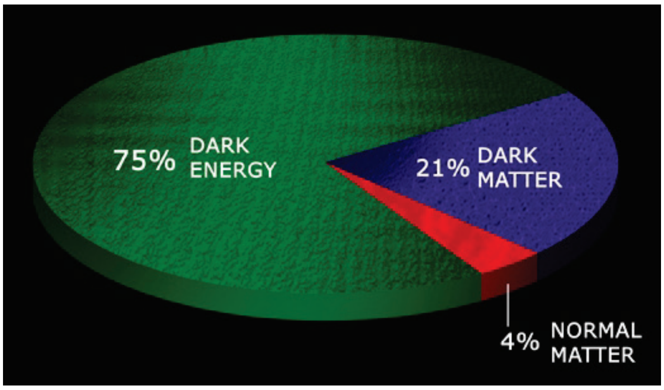


Abb. 1: Es ist überraschend zu erfahren, dass die uns vertraute Materie nur etwa 4% des Materieinhalts im Universum ausmachen soll. Manche Wissenschaftler bezeichnen daher diese Materie als sichtbare Schaumkrone auf dem Meer der unsichtbaren Materie. (Bildquelle: http://chandra.harvard.edu/photo/2004/darkenergy/more.html,

1. Zunächst ein einfacher, grober Vergleich. Wir betrachten dazu zwei Himmelkörper (z.B. unsere Sonne und einen anderen Stern unserer Milchstraße), die um das Zentrum der Milchstraße kreisen:

a) Wie lautet das Gesetz von Hubble?

b) Wie lautet das keplersche Gesetz für die Umlaufzeiten T und die Bahnradien?

c) Die Umlaufgeschwindigkeit eines Himmelskörpers um sein Zentrum ist $v = \frac{U}{T}$, wobei U der Umfang der Kreisbahn ist. Leite damit und mit Hilfe des keplerschen Gesetzes (s. 1b)!) für den Vergleich der Geschwindigkeiten v_1 und v_2 von zwei Himmelskörpern auf den jeweiligen Bahnen r_1 und r_2 um ein gemeinsames Zentrum die folgende Beziehung her: $v_1 = \sqrt{\frac{r_2}{r_1}} \cdot v_2$. Vergleiche mit dem Hubblegesetz.

d) Was ist an dieser Form des Vergleiches nicht korrekt?

2. Rotation des Planetensystems

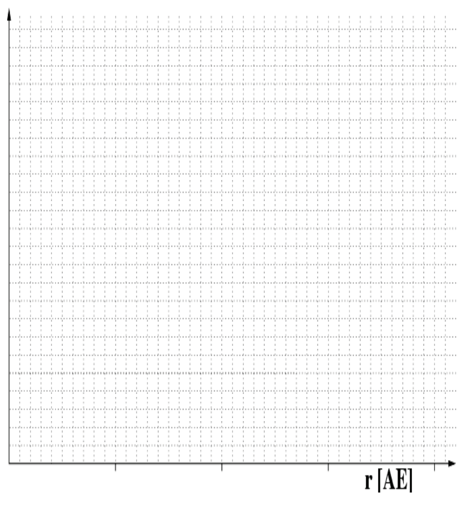
a) Berechne die Bahngeschwindigkeiten *v* der Planeten, die auf Kreisbahnen um die Sonne (Tabelle 1!).

b) Zeichne die **Rotationskurven**, d. h. den jeweiligen Verlauf der Bahngeschwindigkeit *v* (Kreisbahn) der Beobachter mit wachsendem Abstand *r* von der Rotationsachse (*v*-*r*-Diagramm, siehe unten)!

c) Diskutiere ausführlich die erhaltene Rotationskurve. Arbeite insbesondere die Formelzusammenhänge zwischen *v* und *r* heraus (für Planetensystem Kräfteansatz nutzen).

Tabelle 1

Planet	*r* [AE]	*T* [a]	*v* [km/s]
Merkur	0,39	0,241	
Venus	0,72	0,615	
Erde	1	1	
Mars	1,52	1,881	
Jupiter	5,20	11,86	
Saturn	9,54	29,44	
Uranus	19,19	84,02	
Neptun	30,07	164,79	
Pluto	39,48	247,92	

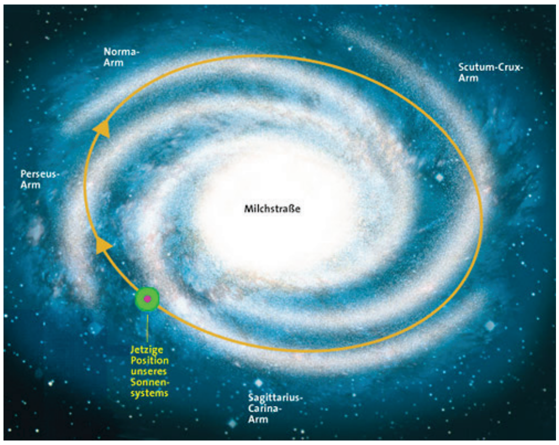


3. Rotierende Milchstraße

Die Sonne läuft mit einer aus Beobachtungen abgeleiteten Geschwindigkeit von etwa 200 km/s in 8,5 kpc Entfernung um das Zentrum des Milchstraßensystems. Beobachtungen der sichtbaren Materie erbrachten, dass sich innerhalb der Sonnenbahn etwa 50 Mrd Sonnenmassen befinden. (1 pc = $3{,}086 \cdot 10^{16}$ m)

b) Vergleiche die aus Beobachtungen abgeleitete Umlaufgeschwindigkeit mit der, die nach dem Gravitationsgesetz notwendig ist, damit die Sonne auf einer Kreisbahn um die eingeschlossene Masse umläuft.

c) Wie lange dauert ein „galaktisches Jahr“?



Information:

Wie schon Newton gezeigt hat, kann die innerhalb der Sonnenbahn eingeschlossene Masse als zentrale Punktmasse betrachtet werden. Die außerhalb der Sonnenbahn befindliche Masse bleibt ohne Wirkung.

Geg.:

Radius Sonnenbahn	$r = 8{,}5$ kpc
Bahngeschwindigkeit der Sonne (beobachtet)	$v_{beob} = 200 \text{ km s}^{-1}$
Sichtbare Masse innerhalb der Sonnenbahn	$M = 50 \cdot 10^{9}\, M_S$
Gravitationskonstante	$\gamma = 6{,}6726 \cdot 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \text{ m}^{3} \text{ s}^{-2}$
Umrechnung	$1 \text{ pc} = 3{,}086 \cdot 10^{16}$ m
Umrechnung	$1 \text{ a} = 3{,}1557 \cdot 10^{7}$ s
Sonnenmasse	$M_S = 1{,}9896 \cdot 10^{30}$ kg

Ges.: Bahngeschwindigkeit der Sonne (theoretisch entsprechend der sichtbaren Masse) v_{theo}

4. Aufgabe - Rotierende Galaxie

Bei der Betrachtung der **Rotation des Planetensystems** muss für alle umlaufenden Planeten stets nur die Sonne als Zentralmasse angenommen werden (gilt in sehr guter Näherung, weil die Sonnenmasse ein Vielfaches der gesamten Planetenmasse darstellt.). Im Falle der **Rotation eines Sternsystems** wie z. B. des Milchstraßensystems ist die zu berücksichtigende Zentralmasse jedoch nicht immer gleich. Ihre Größe bestimmt sich aus der Gesamtmasse der Materie innerhalb der jeweils betrachteten Umlaufbahn eines Sterns. Für die Umlaufgeschwindigkeit eines Sterns in einer Galaxie gilt also M = M(r) (Siehe Tabelle 2!)

Tabelle 2

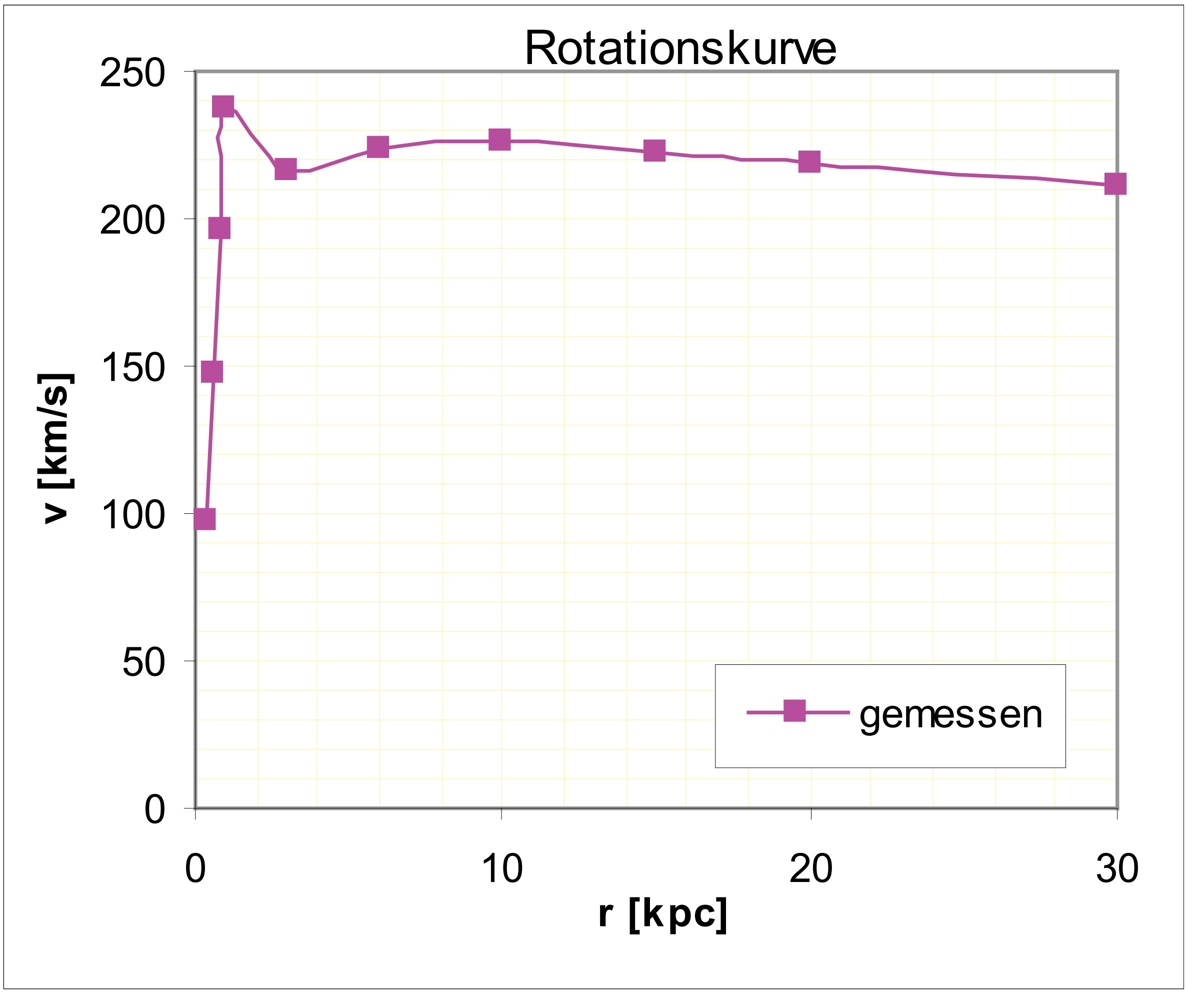
r [kpc]	$M(r)$ [kg]	berechnet $v(r)$ [km/s]	gemessen $v(r)$ [km/s]
0,4	$1{,}8 \cdot 10^{39}$		98
0,6	$6{,}0 \cdot 10^{39}$		147
0,8	$14{,}2 \cdot 10^{39}$		196
1	$27{,}8 \cdot 10^{39}$		238
3	$58{,}3 \cdot 10^{39}$		216
6	$89{,}9 \cdot 10^{39}$		224
10	$111{,}1 \cdot 10^{39}$		226
15	$132{,}7 \cdot 10^{39}$		223
20	$137{,}7 \cdot 10^{39}$		219
30	$138{,}7 \cdot 10^{39}$		211

Für ein Sternsystem wurde aus der Helligkeitsverteilung auf die Verteilung der beobachtbaren Masse geschlossen. (Dazu fand ein gegebenes Verhältnis zwischen Leuchtkraft und Masse Anwendung.) In der nebenstehenden Tabelle sind die Massen $M(r)$, auf die jeweils innerhalb der Radien r im Sternsystem geschlossen wurde, aufgeführt.

a) Berechne die theoretischen Umlaufgeschwindigkeiten $v(r)$, die bei den entsprechenden Massen und Radien nötig wären, damit die Sterne stabil auf Kreisbahnen im Sternsystem umlaufen.

b) Die theoretische Rotationskurve ist in das unten gegebene Diagramm mit der gemessenen Rotationskurve einzuzeichnen und zu kommentieren. Man diskutiere die Diskrepanz zwischen den Kurven.

c) Zusatzaufgabe: Das Verhältnis der Gesamtmasse (sichtbare + Dunkle Materie) zur alleinigen Masse der Dunklen Materie ist zu bestimmen und mit dem in Abb. 1 gezeigten Wert zu vergleichen.



Arbeitsblatt: Rotationsverhalten kosmischer Objekte - Ergebnisse

1. Ein einfacher Vergleich

a) v = H· r, v Fluchtgeschwindigkeit, r Abstand

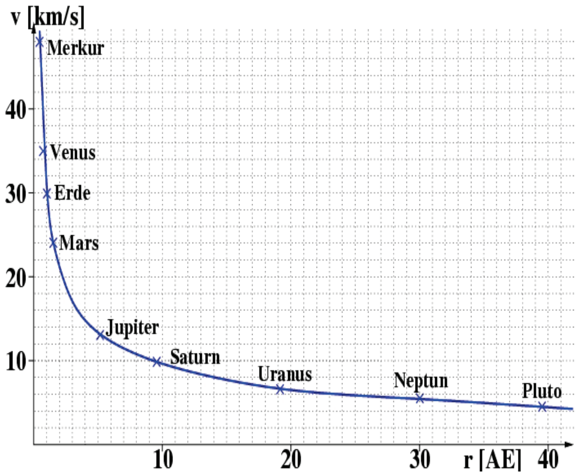
b) $\frac{T_1^{\,2}}{T_2^{\,2}} = \frac{r_1^{\,3}}{r_2^{\,3}}$; $v = \frac{2\pi r}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi r}{v}$;

c) einsetzen, kürzen $\Rightarrow$ Behauptung

d) in Teilaufgabe a) ist v die Fluchtgeschwindigkeit, in Teilaufgabe b) die Rotationsgeschwindigkeit.

2. Rotation des Planetensystems

Planet	r [AE]	T [a]	v [km/s]
Merkur	0,39	0,241	47,9
Venus	0,72	0,615	35,0
Erde	1	1	29,8
Mars	1,52	1,881	24,1
Jupiter	5,20	11,86	13,1
Saturn	9,54	29,44	9,7
Uranus	19,19	84,02	6,8
Neptun	30,07	164,79	5,5
Pluto	39,48	247,92	4,7
r…mittlerer Abstand zur Sonne, T…siderische Umlaufzeit (360°-Umlauf), 1a=365,2425 d			



Im Falle des Planetensystems ergibt sich eine Rotationskurve, deren Aussehen durch die Gravitation bestimmt wird. Für die Kreisbahn gilt (vereinfacht im Mittelpunktssystem der Sonne):

$$F_{\text{Grav}} = F_{\text{Zentri}} \quad \rightarrow \quad \gamma \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} = \frac{m \cdot v^2}{r}.$$

$$v = \sqrt{\frac{\gamma \cdot M}{r}} \quad \rightarrow \quad v \sim r^{-0,5}.$$

Dieses Rotationsverhalten, das auch im 3. keplerschen Gesetz seinen Niederschlag findet, nennt man **Keplerrotation**.

Die Formel zeigt, dass mit Kenntnis der Bahngeschwindigkeit eines Planeten die Masse M der Sonne berechnet werden kann.

Der Werteverlauf im v-r-Diagramm erinnert an eine Hyperbel (***$v \sim 1/r^m$***).

3. Rotierende Milchstraße

Geg.: Radius Sonnenbahn $r = 8{,}5$ kpc
Bahngeschwindigkeit der Sonne (beobachtet) $v_{\text{beob}} = 200\ \text{km s}^{-1}$
Sichtbare Masse innerhalb der Sonnenbahn $M = 50 \cdot 10^9\ M_S$
Gravitationskonstante $\gamma = 6{,}6726 \cdot 10^{-11}\ \text{kg}^{-1}\ \text{m}^3\ \text{s}^{-2}$
Umrechnung $1\ \text{pc} = 3{,}086 \cdot 10^{16}\ \text{m}$
Umrechnung $1\ \text{a} = 3{,}1557 \cdot 10^7\ \text{s}$
Sonnenmasse $M_S = 1{,}9896 \cdot 10^{30}\ \text{kg}$

Ges.: Bahngeschwindigkeit der Sonne (theoretisch entsprechend der sichtbaren Masse) v_{theo}

Lös.: Annahmen: Kreisbahnumlauf der Sonne

$$v_{\text{theo}} = \sqrt{\frac{\gamma \cdot M}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}6726 \cdot 10^{-11}\,\text{kg}^{-1}\text{m}^3\text{s}^{-2} \cdot 50 \cdot 10^9 \cdot 1{,}989 \cdot 10^{30}\,\text{kg}}{8{,}5 \cdot 10^3 \cdot 3{,}086 \cdot 10^{16}\,\text{m}}} \approx \underline{\underline{160\ \text{km/s}}}.$$

Wenn allein die sichtbare Masse vorhanden wäre, so müsste die Sonne mit einer Bahngeschwindigkeit von ca.160 km/s umlaufen. Die höher beobachtete Bahngeschwindigkeit von etwa 200 km/s lässt darauf schließen, dass außer der sichtbaren Materie noch unsichtbare Dunkle Materie vorhanden sein muss.

$$v_{\text{beob}} = \frac{2\pi \cdot r}{T}$$

$$\rightarrow \quad T = \frac{2\pi \cdot r}{v_{\text{beob}}} = \frac{2\pi \cdot 8{,}5 \cdot 10^3 \cdot 3{,}086 \cdot 10^{16}\,\text{m}}{2 \cdot 10^5\,\text{m s}^{-1}} \approx 8{,}24 \cdot 10^{15}\,\text{s} \approx \underline{\underline{260 \cdot 10^6\,\text{a}}}.$$

Die Sonne benötigt für einen Umlauf um das galaktische Zentrum etwa 260 Mio Jahre.

Im Falle der **Rotation eines Sternsystems** wie z. B. des Milchstraßensystems ist die zu berücksichtigende Zentralmasse jedoch nicht immer gleich. Ihre Größe bestimmt sich aus der Gesamtmasse der Materie innerhalb der jeweils betrachteten Umlaufbahn eines Sterns. Für die Umlaufgeschwindigkeit eines Sterns in einer Galaxie gilt also

$$v = \sqrt{\frac{\gamma \cdot M}{r}}, \quad M = M(r) \qquad \rightarrow \qquad v \sim \left(\frac{M(r)}{\text{r}}\right)^{0,5}.$$

Während die den Formeln zugrunde liegende **Punktmassenannahme** für das Planetensystem sehr gut angenähert ist, so scheint sie für das Sternsystem nicht zu gelten. Auf Grundlage einer ersten Aussage, die dem Schüler zunächst ohne Beweis mitgeteilt wird, lässt sich zeigen, dass die Punktmassenannahme auch für das Sternsystem in guter Näherung möglich ist (Masse innerhalb der Umlaufbahn als Punktmasse und umlaufender Stern als Punktmasse). Eine zweite Aussage ist dann noch nötig, um Klarheit über die Größe dieser Punktmasse und den Einfluss der übrigen Masse zu erlangen.

Es gilt:

1. Die Kraftwirkung einer kugelsymmetrischen Masseverteilung ist dieselbe wie die eines Massenpunktes der Masse *M*, d. h. die innerhalb der Umlaufbahn eines Sterns befindliche Massekugel kann man sich im Zentrum des Sternsystems konzentriert denken.
2. Im Innern einer Hohlkugel wirken keine Kräfte, d. h. die außerhalb der Umlaufbahn eines Sterns befindliche Masse im Sternsystem bleibt ohne Einfluss.

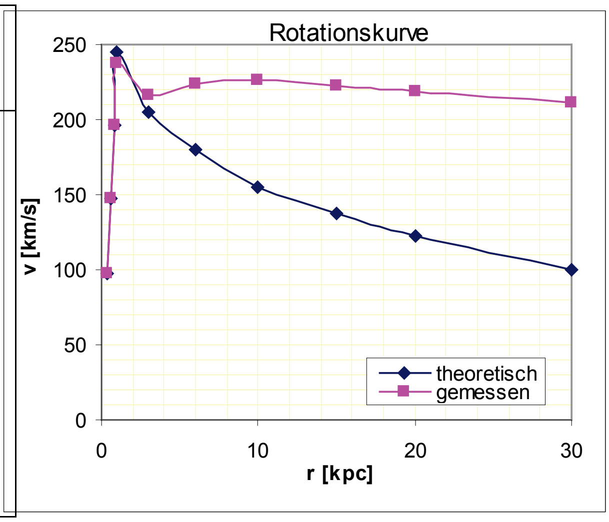
4. Rotierende Galaxie

Geg.: Gravitationskonstante $\gamma = 6{,}6726 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{kg^{-1}\,m^3\,s^{-2}}$
Umrechnung $1\,\mathrm{pc} = 3{,}086 \cdot 10^{16}\,\mathrm{m}$
Sonnenmasse $M_S = 1{,}9896 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$

Ges.: theoretische Bahngeschwindigkeiten $v(r)$ der Sterne bei r

Lös.: $v(r) = \sqrt{\dfrac{\gamma \cdot M(r)}{r}}$.

r [kpc]	$M(r)$ [kg]	berechnet $v(r)$ [km/s]	gemessen $v(r)$ [km/s]
0,4	$1{,}8 \cdot 10^{39}$	98	98
0,6	$6{,}0 \cdot 10^{39}$	147	147
0,8	$14{,}2 \cdot 10^{39}$	196	196
1	$27{,}8 \cdot 10^{39}$	245	238
3	$58{,}3 \cdot 10^{39}$	205	216
6	$89{,}9 \cdot 10^{39}$	180	224
10	$111{,}1 \cdot 10^{39}$	155	226
15	$132{,}7 \cdot 10^{39}$	138	223
20	$137{,}7 \cdot 10^{39}$	122	219
30	$138{,}7 \cdot 10^{39}$	100	211



Es ergibt sich theoretisch ein Geschwindigkeitsabfall, der jedoch nicht gemessen wird. Die gemessene Rotationsgeschwindigkeit bleibt nahezu konstant, wegen

$v(r) = \sqrt{\dfrac{\gamma \cdot M(r)}{r}}$. ***muss also*** das Verhältnis $M(r)/r$ nahezu konstant bleiben.

Daraus ergibt sich die Notwendigkeit einer zusätzlich in der Galaxie vorhandenen Masse M_{Dunkel}, die (bisher) unsichtbar bleibt (Dunkle Materie).

$$v(r) = \sqrt{\frac{\gamma \cdot \left[M_{\mathrm{sichtbar}}(r) + M_{\mathrm{dunkel}}(r)\right]}{r}}.$$

Das Verhältnis der Gesamtmasse (sichtbare und Dunkle Materie) zur Masse der Dunklen Materie soll speziell für r = 30kpc bestimmt und mit dem in Abb. 1 gezeigten Diagrammwert verglichen werden.

$$M_{\mathrm{sichtbar}}(r) + M_{\mathrm{dunkel}}(r) = v^2 \cdot \frac{r}{\gamma} =$$

$$\left(211 \cdot 10^3\,\mathrm{m\,s^{-1}}\right)^2 \cdot \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 3{,}086 \cdot 10^{16}\,\mathrm{m}}{6{,}6726 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{kg^{-1}m^3s^{-2}}} \approx 6{,}2 \cdot 10^{41}\,\mathrm{kg}.$$

$$\frac{M_{\mathrm{sichtbar}}(r)}{M_{\mathrm{sichtbar}}(r) + M_{\mathrm{dunkel}}(r)} = \frac{138{,}7 \cdot 10^{39}\,\mathrm{kg}}{6{,}2 \cdot 10^{41}\,\mathrm{kg}} \approx \underline{\underline{0{,}22}}.$$

Aus Abb. 1 lässt sich für das Massenverhältnis ein Wert von 4/21≈0,19 ablesen.