

Die Zeit – Widerspiegelung himmlischer Periodizität

Himmlische Periodizitäten, augenscheinlich und spürbar im irdischen Leben, sind es, die uns die Zeitmaße Tag, Monat und Jahr liefern. Die physikalische Grundeinheit Sekunde basierte bis 1960 auf dem 86400sten Teil des mittleren Sonnentags. Seit uns hochgenaue Uhren zur Verfügung stehen wissen wir, dass die Erdrotation zur Festlegung der Dauer einer Sekunde ungeeignet ist, weil die Erde infolge von Veränderungen ihres Trägheitsmoments ungleichmäßig rotiert. Langfristig gesehen werden die Tage länger, weil der Erde Rotationsenergie durch die Reibung der „Gezeitenbremse“ entzogen wird. Die Erdrotation ermöglicht damit interessante Anwendungen der Physik des starren Körpers, die in Form von [Aufgaben](#) verpackt sind. Dabei kann auch in Fächer verknüpfender Weise gearbeitet werden. Ein kleines Experiment sorgt für den nötigen „Naturkontakt“.

In einer Reihe anderer himmlischer periodischer Erscheinungen soll das Augenmerk auf den Umlauf der großen Jupitermonde und dabei speziell auf Io gelenkt werden. Den Einstieg in ein [Beobachtungsprojekt „Jupitermonduhr“](#) bietet eine Astroatmosphäre von Jupiter und einigen seiner großen Monde, die herausfordert, „gelesen“ zu werden. Dann geht es darum, Io und die anderen Galileischen Monde als Zeiger einer himmlischen Uhr zu verstehen. Das Ablesen dieser Uhr bedeutet die Feststellung markanter Mondpositionen (z. B. wenn Io in den Jupiterschatten wandert), die als Referenzpunkte des Umlaufs dienen können. Von diesen Mondpositionen gilt es durch eine grafische Übung (Arbeitsblatt) eine Vorstellung zu entwickeln. Abschließend soll die „Jupitermonduhr“ im Fernrohr beobachtet werden. Diese „Uhr“ war es übrigens, die historisch erstmals zur Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit verwendet wurde. So kann die Beobachtung als Vorübung dienen, um Verständnis für Ole Rømers Versuch und Lust auf dessen Nachahmung zu entwickeln.

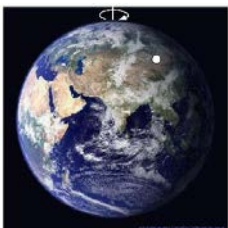
Physik des starren Erdkörpers in Aufgaben

In Aufgabe 1 geht es darum, Formalismen der Physik des starren Körpers anzuwenden, wobei eine vereinfachende und doch genügende Modellannahme zur Form der Erde gemacht werden muss. Mit Hilfe von Aufgabe 2 wird das Problem der Tageslängenschwankung bewusst gemacht. Dabei wird eine Brücke zur Geografie gebaut. Ab Aufgabe 3 gesellt sich der Mond zur Erde. Zunächst geht es wieder darum, ein einfaches Modell zu finden, um die bekannten Formalismen anzuwenden. Neben dem Drehimpuls eines rotierenden Himmelskörpers tritt der Drehimpuls eines umlaufenden Himmelskörpers (Bahndrehimpuls) in Erscheinung. Die interessante Tatsache, dass sich der Mond langsam von der Erde entfernt, wird im Rahmen von Aufgabe 4 aufgegriffen. Auch hier hilft die Physik des starren Körpers.



Aufgabe 1: Die rotierende Erde

Man berechne das Massenträgheitsmoment und den Drehimpuls der Erde unter der Annahme, dass die Erde kugelförmig ist und eine homogene Massenverteilung besitzt. Für den Radius ist der Einfachheit halber der Äquatorradius zu verwenden. Die Modellannahmen sind abschließend zu diskutieren.



Aufgabe 2: Der Drei-Schluchten-Stausee und die Schwankung der Tageslänge

Die jahreszeitliche Variation der Grundwassermassen sowie der Schnee- und Eisbedeckungen führt zu Schwankungen der Rotationsdauer der Erde. Neben diesen natürlichen Verlagerungen von Wassermassen existieren aber auch solche, die auf menschliche Aktivität zurückzuführen sind. So werden durch den Bau von Staudämmen große Wassermengen im Abfluss in die Meere und der Verteilung über die Erdoberfläche gehindert und an ihren Standorten konzentriert. Eine Abschätzung der Auswirkungen der zehn größten Stauseen auf die Rotation der Erde erbrachte, dass diese im Laufe der letzten 20-30 Jahre zu einer globalen Meeresspiegelsenkung von 7 mm pro Jahr führten, was sich langfristig auf die Rotation der Erde auswirkt. Kurzfristig beeinflussen die Stauseen die Erdrotation durch ihre saisonal schwankenden Wasserinhalte. So wird die Wassermenge im Drei-Schluchten-Stausee bedingt durch die jährliche Flutregulierung um ca. $25 \cdot 10^9 \text{ m}^3$ schwanken. Der Drei-Schluchten-Stausee soll die Wasserführung des drittgrößten Stroms der Erde, des Jangtsekiang regulieren. Am oberen Ende des 600 km langen Stausees liegt bei ca. 30° nördlicher Breite und $106,5^\circ$ westlicher Länge Chongqing, die derzeit größte Stadt der Welt (30 Mio Einwohner).

Es ist die jährliche Veränderung der Tageslänge zu berechnen, die auf die schwankende Wassermenge (Flutregulierungsmasse) des Drei-Schluchten-Stausees zurückzuführen ist. Als Grundlage für die Rechnung soll das in Abb. 1 dargestellte Modell dienen.

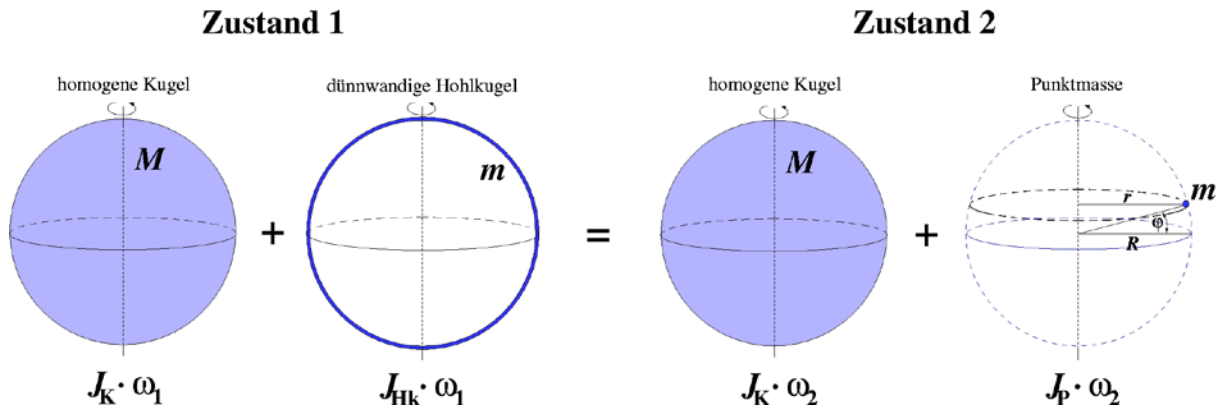
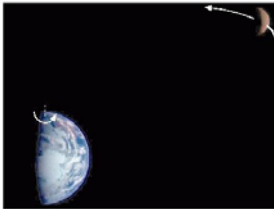


Abbildung 1: Modell zur Abschätzung der Tageslängenvariation bedingt durch die Wassermassenschwankung im Drei-Schluchten-Stausee. Die Erde wird als homogene Kugel der Masse M betrachtet. Im Zustand 1 wird angenommen, dass die Flutregulierungsmasse m des Stausees gleichmäßig über die Erde (in den Weltmeeren) verteilt ist. Im Zustand 2 befindet sich die Flutregulierungsmasse im Stausee. Diese Masse wird als Punktmasse auf der Erdoberfläche bei der geografischen Breite ϕ angenommen (Bild für Folie unter: [erde.jpg](#)). ©: Olaf Fischer.



**Aufgabe 3:
Systemkomponente Erdmond**

Man berechne das Massenträgheitsmoment und den Drehimpuls der umlaufenden Mondes, d. h. der Mondbahn unter der Annahme, dass diese kreisförmig. Die Ergebnisse sind abschließend mit den Werten für der Erdkörper zu vergleichen.



**Aufgabe 4:
Gezeitenreibung und Mondumlauf – Veränderung von
Tages- und Monatslänge**

Die Erde dreht sich unter den Flutbergen der Gezeiten hindurch. Die dabei auftretende Reibung der bewegten Wassermassen entzieht der Erde Rotationsenergie. Man berechne den neuen Abstand und die neue Umlaufzeit des Mondes, wenn die gesamte Rotationsenergie der Erde aufgebraucht ist. Unter welchem Winkel wird dann der Mond am Himmel erscheinen?

Drehimpulserhaltung im Experiment – Rotationsschwankungen erleben

Rotationsschwankungen der Erde aufgrund von Schwankungen ihres Trägheitsmoments (Aufgabe 2) finden im Drehstuhlversuch (siehe Abb. 2) eine Analogie. Im Gegensatz zur oft gebrauchten Analogie mit der Eistanzerin, die zum Zwecke einer Pirouette Arme und Beine nahe an ihre Drehachse bringt, ermöglicht der Drehstuhlversuch eigene Erfahrungen mit dem Naturgesetz der Drehimpulserhaltung. Das reale Experiment ist einer noch so perfekten medialen Demonstration unbedingt vorzuziehen. Sollte kein Drehschemel zur Verfügung stehen, so kann man sich auch mit einem Freihandexperiment wie z. B. in Abb. 2 gezeigt behelfen.

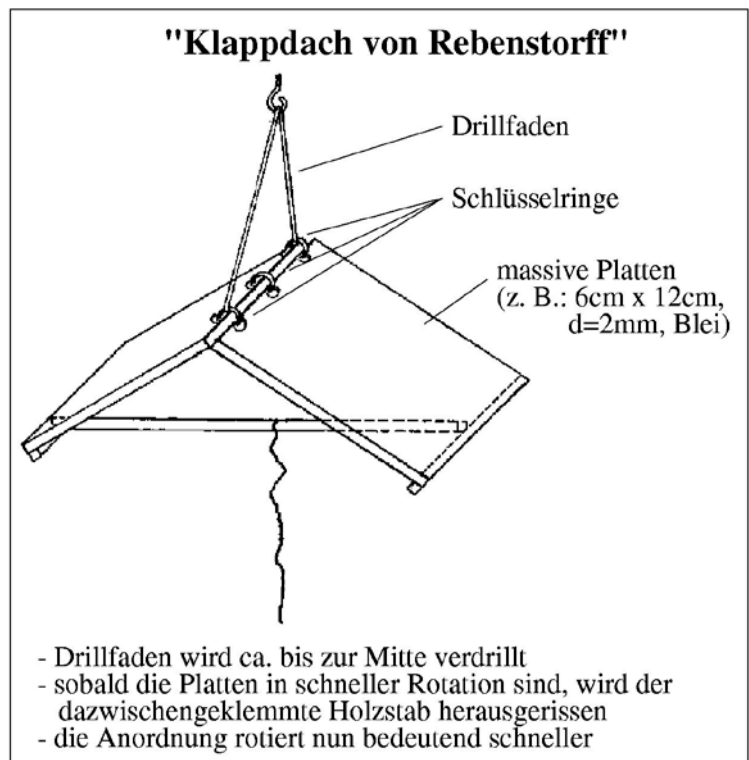


Abbildung 2: Drehstuhlversuch (links) und Freihandversuch (rechts) zur Demonstration der Drehimpulserhaltung (Bild rechts abrufbar unter: [DRALL.JPG](#)). Zum Drehstuhlversuch kann unter [drehstuhl.avi](#) ein Videoclip abgerufen werden.

Lösungen zu den Aufgaben zur Physik des starren Erdkörpers



Aufgabe 1: Die rotierende Erde

Man berechne das Massenträgheitsmoment und den Drehimpuls der Erde unter der Annahme, dass die Erde kugelförmig ist und eine homogene Massenverteilung besitzt. Für den Radius ist der Einfachheit halber der Äquatorradius zu verwenden. Die Modellannahmen sind abschließend zu diskutieren.

Geg.: Erdradius (Äquator) $R_E = 6,378 \cdot 10^6 \text{ m}$
Erdbmasse $M_E = 5,979 \cdot 10^{24} \text{ kg}$
siderischer Tag $T \approx 23^{\text{h}} 56^{\text{min}} 4^{\text{s}} = 86164 \text{ s}$

Ges.: a) Trägheitsmoment der Erde J_E
b) Drehimpuls der Erde L_E

Lös.:

a) Annahme: Erde als Kugel mit homogener Masseverteilung

$$J_E = \frac{2}{5} \cdot M_E \cdot R_E^2 = \frac{2}{5} \cdot 5,979 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot (6,378 \cdot 10^6 \text{ m})^2 = 9,7287 \cdot 10^{37} \text{ kg m}^2.$$

b) Aufgepasst: 360°-Drehung innerhalb eines siderischen Tages

$$L_E = J_E \cdot \omega_E = J_E \cdot \frac{2\pi}{T} = 9,7287 \cdot 10^{37} \text{ kg m}^2 \cdot \frac{2\pi}{86164 \text{ s}} = 7,0943 \cdot 10^{33} \text{ kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}.$$

Ein genaueres Modell des Erdkörpers zeigt diesen als Rotationsellipsoid. Noch genauer ist das Modell vom Geoid. Das Trägheitsmoment eines Rotationsellipsoids ist wegen dessen Abflachung etwas größer als das der Kugel (der Mittelwert der Trägheitsmomente aller Punktmassen ist größer).

Bei exakterer Betrachtung der Masseverteilung erhält man das Modell von der schalenförmig aufgebauten Erde, wobei die Dichte zum Zentrum hin zunimmt. Dies führt zu einer Verkleinerung des Massenträgheitsmoments gegenüber dem der homogenen Kugel.



Aufgabe 2: Der Drei-Schluchten-Stausee und die Schwankung der Tageslänge

Es ist die jährliche Veränderung der Tageslänge zu berechnen, die auf die schwankende Wassermenge (Flutregulierungsmasse) des Drei-Schluchten-Stausees zurückzuführen ist. Als Grundlage für die Rechnung soll das in Abb. 1 dargestellte Modell dienen.

Geg.: Erdradius (Äquator)	$R_E = 6,378 \cdot 10^6 \text{ m}$
Erdmasse	$M_E = 5,979 \cdot 10^{24} \text{ kg}$
Flutregulierungsmasse	$m = 25 \cdot 10^{12} \text{ kg}$
geografische Breite der Punktmasse	$\varphi = 30^\circ$
siderischer Tag	$T \approx 23^{\text{h}} 56^{\text{min}} 4^{\text{s}} = 86164 \text{ s}$

Ges.: Tageslängendifferenz ΔT

Lös.:

Siehe Abb. 1: Drehimpulserhaltung beim Übergang vom Zustand 1 (Trägheitsmoment Kugel + Trägheitsmoment Hohlkugel) zum Zustand 2 (Trägheitsmoment Kugel + Trägheitsmoment Punktmasse).

$$L_1 = L_2 \quad \Rightarrow \quad (J_K + J_{\text{Hk}}) \cdot \omega_1 = (J_K + J_P) \cdot \omega_2.$$

$$\text{Mit } \omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}, \quad \omega_2 = \frac{2\pi}{T_2}, \quad T_2 = T_1 + \Delta T,$$

Erhält man

$$J_K \cdot T_1 + J_K \cdot \Delta T + J_{\text{Hk}} \cdot T_1 + J_{\text{Hk}} \cdot \Delta T = J_K \cdot T_1 + J_P \cdot T_1,$$

$$\Delta T = \frac{(J_P - J_{\text{Hk}})}{(J_K + J_{\text{Hk}})} \cdot T_1.$$

Unter Nutzung von

$$J_K = \frac{2}{5} \cdot M \cdot R^2, \quad J_{\text{Hk}} = \frac{2}{3} \cdot m \cdot R^2, \quad J_P = m \cdot r^2$$

und

$$r = \sin(90^\circ - \varphi) \cdot R$$

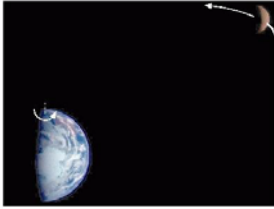
ergibt sich schließlich

$$\Delta T = \frac{\left(m \cdot (\sin(90^\circ - \varphi) \cdot R)^2 - \frac{2}{3} \cdot m \cdot R^2 \right)}{\left(\frac{2}{5} \cdot M \cdot R^2 + \frac{2}{3} \cdot m \cdot R^2 \right)} \cdot T_1 = \frac{\left(\sin(90^\circ - \varphi)^2 - \frac{2}{3} \right) \cdot m}{\left(\frac{2}{5} \cdot M + \frac{2}{3} \cdot m \right)} \cdot T_1.$$

Mit $T_1 = T$, $M = M_E$ erhält man

$$\Delta T = \frac{\left(\sin(90^\circ - 30^\circ)^2 - \frac{2}{3} \right) \cdot 25 \cdot 10^{12} \text{ kg}}{\left(\frac{2}{5} \cdot 5,979 \cdot 10^{24} \text{ kg} + \frac{2}{3} \cdot 25 \cdot 10^{12} \text{ kg} \right)} \cdot 86164 \text{ s} \approx 7,5 \cdot 10^{-8} = 0,000075 \text{ ms.}$$

Dieses mit einfachen Modellannahmen erzielte Ergebnis liegt in der Größenordnung des im Rahmen einer wissenschaftlichen Arbeit (Dill, R.: Der Einfluss von Sekundäreffekten auf die Rotation der Erde, DGK, Reihe C, Heft 550, 2002) erzielten Wertes von 0,0002 ms.



Aufgabe 3: Systemkomponente Erdmond

Man berechne das Massenträgheitsmoment und den Drehimpuls der umlaufenden Mondes, d. h. der Mondbahn unter der Annahme, dass diese kreisförmig. Die Ergebnisse sind abschließend mit den Werten für der Erdkörper zu vergleichen.

Geg.: mittlerer Abstand Erde-Mond $r = 3,844 \cdot 10^8 \text{ m}$
 Mondmasse $M_M = 7,347 \cdot 10^{22} \text{ kg}$
 siderischer Monat $T \approx 27,32166 \text{ d} \approx 2.360.591 \text{ s}$

Ges.: a) (Bahn-)Trägheitsmoment des Mondes J_M
 b) (Bahn-)Drehimpuls des Mondes L_M

Lös.:

a) Annahme: Mond als Punktmasse auf Kreisbahnnumlauf

$$J_M = M_M \cdot r^2 = 7,347 \cdot 10^{22} \text{ kg} \cdot (3,844 \cdot 10^8 \text{ m})^2 = 1,0856 \cdot 10^{40} \text{ kg m}^2.$$

b) 360°-Umlauf in siderischer Umlaufzeit

$$L_M = J_M \cdot \omega_M = J_M \cdot \frac{2\pi}{T} = 1,0856 \cdot 10^{40} \text{ kg m}^2 \cdot \frac{2\pi}{2360591 \text{ s}} = 2,8895 \cdot 10^{34} \text{ kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}.$$

Vergleich des (Bahn-)Trägheitsmoments des Mondes mit dem (Körper-)Trägheitsmoment der Erde

$$\frac{J_M}{J_E} = \frac{1,0856 \cdot 10^{40} \text{ kg m}^2}{9,7287 \cdot 10^{37} \text{ kg m}^2} \approx 112.$$

Vergleich des (Bahn-)Drehimpulses des Mondes mit dem (Körper-)Drehimpuls der Erde

$$\frac{L_M}{L_E} = \frac{2,8895 \cdot 10^{34} \text{ kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}}{7,0943 \cdot 10^{33} \text{ kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}} \approx 4.$$



Aufgabe 4: Gezeitenreibung und Mondumlauf – Veränderung von Tages- und Monatslänge

Die Erde dreht sich unter den Flutbergen der Gezeiten hindurch. Die dabei auftretende Reibung der bewegten Wassermassen entzieht der Erde Rotationsenergie. Man berechne den neuen Abstand und die neue Umlaufzeit des Mondes, wenn die gesamte Rotationsenergie der Erde aufgebraucht ist. Unter welchem Winkel wird dann der Mond am Himmel erscheinen?

Geg.: Trägheitsmoment des Mondes	$J_M = 1,0856 \cdot 10^{40} \text{ kg m}^2$
Drehimpuls des Mondes	$L_M = 2,8895 \cdot 10^{34} \text{ kg m}^2/\text{s}$
Trägheitsmoment der Erde	$J_E = 9,7287 \cdot 10^{37} \text{ kg m}^2$
Gravitationskonstante	$\gamma = 6,6726 \cdot 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$
mittlerer Abstand Erde-Mond	$r = 3,844 \cdot 10^8 \text{ m}$
siderischer Monat	$T \approx 27,32166 \text{ d} \approx 2.360.591 \text{ s}$
Durchmesser Mond	$D_M = 3476 \cdot 10^3 \text{ m}$

Ges.:

- neuer Bahnradius r_2 des Mondes, wenn Körperdrehimpuls der Erde ganz in Bahndrehimpuls des Mondes eingeht
- neue Umlaufzeit T_2 für r_2

Lös.: Drehimpulserhaltung, Rotationsenergie

- Der Drehimpuls des Mondes kann sich etwa um ein Viertel seines Wertes (aus dem Drehimpuls der Erde) von L_{M1} zu L_{M2} erhöhen. Zur Bestimmung des neuen (maximalen) Bahnradius r_2 für L_{M2} wird nun eine Beziehung gesucht, bei der der Drehimpuls allein vom Bahnradius r_2 (Kreisbahn) abhängt. Dazu gilt es, auch die Kreisbahngeschwindigkeit auf r_2 zurückzuführen.

$$L_M = J_M \cdot \omega_M = M_M \cdot r^2 \cdot \frac{v_M}{r}$$

$$v_M = \sqrt{\frac{\gamma \cdot M_E}{r}} \quad \Rightarrow \quad L_M = M_M \cdot \sqrt{\gamma \cdot M_E} \cdot \sqrt{r} \quad \Rightarrow \quad L_M \propto \sqrt{r}.$$

$$\frac{L_{M2}}{L_{M1}} = \frac{\sqrt{r_2}}{\sqrt{r_1}} \quad \Rightarrow \quad r_2 = \left(\frac{L_{M2}}{L_{M1}} \right)^2 \cdot r_1 \quad \text{mit} \quad L_{M2} = L_{M1} + L_E.$$

$$r_2 = \left(\frac{2,8895 \cdot 10^{34} \text{ kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} + 7,0943 \cdot 10^{33} \text{ kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}}{2,8895 \cdot 10^{34} \text{ kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}} \right)^2 \cdot 3,844 \cdot 10^8 \text{ m} \approx 5,9633 \cdot 10^8 \text{ m}.$$

Bei diesem Abstand hätte der Mond einen scheinbaren Durchmesser von etwa $0,33^\circ$, eine totale Sonnenfinsternis ist dann nicht mehr möglich. Bei der Lösung wurde die Tatsache, dass die „Gezeitenbremse“ nicht mehr wirkt, wenn die Erde synchron mit dem Mondumlauf rotiert, vereinfachend vernachlässigt.

- Nun kann auch die neue siderische Monatslänge T_2 berechnet werden. Dazu wird das 3. keplersche Gesetz herangezogen.

$$\frac{T_2^2}{r_2^3} = \frac{T_1^2}{r_1^3} \quad \Rightarrow \quad T_2 = \sqrt{\left(\frac{r_2}{r_1} \right)^3} \cdot T_1,$$

$$T_2 = \sqrt{\left(\frac{5,9633 \cdot 10^8 \text{ m}}{3,844 \cdot 10^8 \text{ m}} \right)^3} \cdot 2360591 \text{ s} \approx 4561166 \text{ s}.$$

In ferner Zukunft wird die siderische Umlaufzeit des Mondes mit etwa 53 Tagen beinahe doppelt so lange sein.

Beobachtungsprojekt „Jupitermonduhr“

[\(→zurück zum Anfang\)](#)

Überall am Himmel „hängen kosmische Uhren“ - Körper und Systeme, die wie Uhrwerke laufen. Zu nennen sind die Rotation und die Revolution der Erde, die wir in Form des scheinbaren täglichen und jährlichen Umlaufs der Sonne erleben, der sich mit seinem Phasenzyklus bemerkbar machende Erdmond, die periodisch in den Tierkreissternbildern wiederkehrenden Planeten sowie deren Satellitensysteme aber auch Doppelsternsysteme, die im speziellen Fall ihrer gegenseitigen Bedeckung zudem noch in Form eines periodischen Helligkeitseinbruches beobachtet werden können und rotierende Sterne, unter denen die Pulsare die wohl exotischsten sind. Zur Regelmäßigkeit der genannten Objekte verhilft dabei ganz einfach die Trägheit oder das Trägheitsmoment der Himmelskörper. Der Kosmos bietet uns einen Idealfall für das Trägheitsgesetz: Ein auf einer Kreisbahn umlaufender Himmelskörper behält seine Geschwindigkeit bei, weil in seiner Bewegungsrichtung keine Kraft wirkt. Die Reibung ist dabei vernachlässigbar gering.

Die Beobachtung der Jupitermonde zeigt eindrucksvoll den Gang einer „kosmischen Uhr“. Sie erbringt aber auch eine Erfahrung, die für das tiefere Verständnis für den geschichtlich relevanten Fakt wichtig ist, dass der Anblick der Galileischen Monde den Geozentrismus in Frage gestellt hat. Des weiteren war es die „Jupitermonduhr“, die historisch erstmals zur Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit verwendet wurde. Die Beobachtung der Jupitermonde kann als Vorübung zu diesem Versuch dienen und das Verständnis wie auch das Interesse für Ole Römers Idee reifen lassen.

Astrobilder lesen lernen - Sonnenfinsternis auf Jupiter

Für das Beobachtungsprojekt sind u. a. Sonnenfinsternisse auf Jupiter von Bedeutung. Die Interpretation der in Abb. 3 gezeigten Jupiteraufnahme ermöglicht im Sinne einer Vorbetrachtung einen geistigen Einstieg ins Beobachtungsprojekt. Wichtig ist Klarheit über die räumlichen Verhältnisse.

Im Rahmen der Bildinterpretation sind folgende Aufgaben zu bearbeiten. Daten, die dazu wichtig sind, finden sich in der folgenden Tabelle.

1. Das Erscheinungsbild der Monde und Ihrer Schatten ist hinsichtlich der zu Grunde liegenden räumlichen Anordnung der Objekte zu diskutieren.
2. Die Größe des Kernschattens von Io ist mit Hilfe der Aufnahme zu ermitteln und mit dem rechnerisch bestimmten Wert zu vergleichen. Jupiter hatte zum Aufnahmezeitpunkt (28. 3. 2004) einen Abstand von ca. $676 \cdot 10^6$ km zur Erde (geozentrischer Abstand).
3. Aus der Aufnahme, die eine Art Seitenansicht darstellt, ist das (maßstäbliche) Draufsichtbild auf das System der großen Jupitermonde zu entwickeln. Aus diesem Bild kann der Winkel zwischen den Richtungen zur Erde und zur Sonne ermittelt werden. Mit Hilfe dieses Winkels ist dann die Draufsicht auf das System Sonne-Erde-Jupiter zu erstellen.

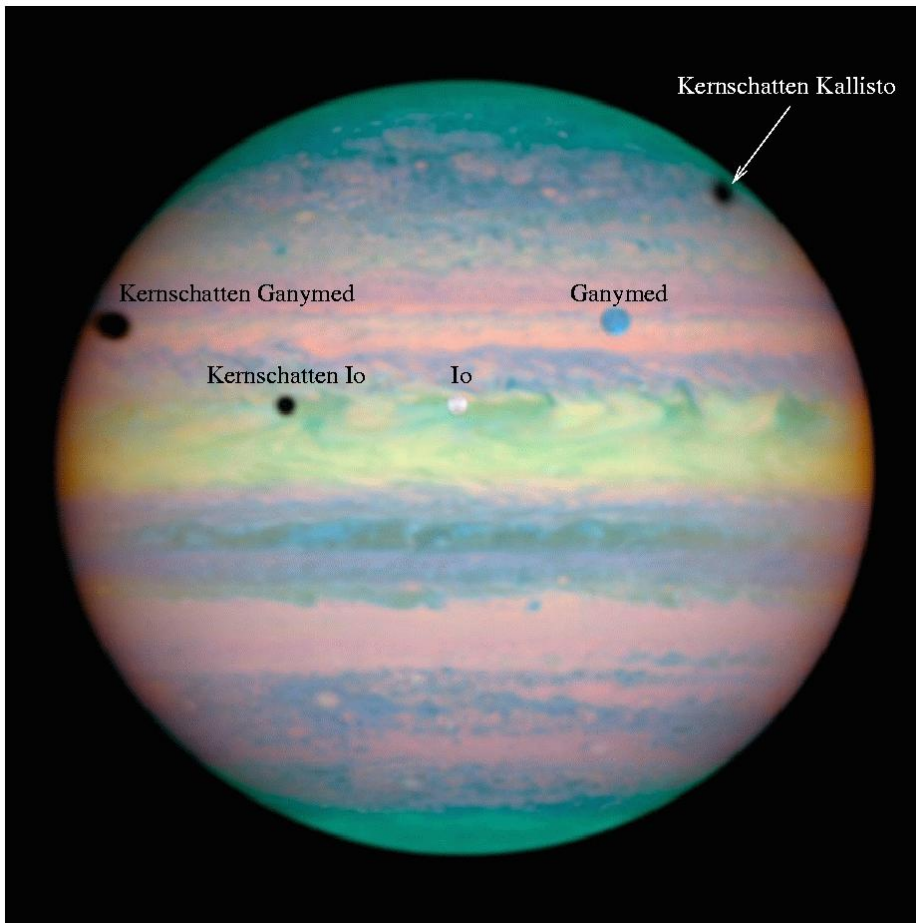


Abbildung 3: Diese Aufnahme von Jupiter, die aus dem Erdborbit heraus mit dem HST gewonnen wurde, erschien in SuW 3/2005. Abgesehen davon, dass es sich um ein in Falschfarben sichtbar gemachtes Infrarotkomposit handelt, zeigt das Bild in bemerkenswerter Weise Bedeckungen von der und Schattenwürfe auf die Jupiterscheibe durch die Galileischen Monde Io, Ganymed und Kallisto. Das Bild, aus dem sich verschiedene Informationen „herauslesen“ lassen, kann unter [full.jpg](#) abgerufen werden.

Datenbox: Jupiter und seine großen Monde

	Jupiter	Io	Europa	Ganymed	Kallisto
Radius (Äquator)	71800 km	1820 km	1570 km	2640 km	2410 km
Radius der Umlaufbahn	778,3·10 ⁶ km	421300 km	678300 km	1078100 km	1899200 km
siderische Umlaufzeit synodische Umlaufzeit	11,86 a	1,769 d 1,7699 d	3,551 d	7,155 d	16,689 d
Neigung der Bahnebene zur Ekliptikebene	1,3°				
Neigung der Rotations- achse zur Bahnebene	3,1°				
Neigung der Bahnebene zur Äquatorebene		0,04°	0,47°	0,21°	0,5°

Ergebnisse der Bildinterpretation

1. Wie aus der Tabelle ersichtlich wird, laufen die Galileischen Monde nahezu auf Bahnen in der Äquatorebene von Jupiter um. Beim Blick in diese Ebene würden die Monde genau vor dem äquatorialen Wolkenband Jupiters zu sehen sein. Die Monde erscheinen auf dem Bild aber in Projektion vor der oberen Hälfte der Planetenscheibe, d. h. die Sichtlinie des Beobachters zur Äquatorebene ist leicht geneigt. Diese Neigung entsteht zum einen durch die Verkippung der Jupiterachse bzw. seiner Äquatorebene zu seiner Bahnebene ($3,1^\circ$) und zum anderen durch die Verkippung der Bahnebenen von Jupiter und Erde zueinander ($1,3^\circ$). Je größer die Entfernung eines Mondes zu Jupiter ist, desto größer ist sein Abstand vom Jupiteräquator im Bild. Aus dem Abstand kann man auf den Winkel zwischen Sichtlinie und Äquatorebene schließen (ca. $1,5^\circ$). Während der Schatten von Io beinahe rund erscheint, ist der von Ganymed länglich, weil dieser sehr schräg auftrifft. Beim Schatten von Kallisto ist der sich an den Kernschatten anschließende Halbschatten zu erkennen.
2. Der scheinbare Durchmesser der Jupiterscheibe δ_J betrug zum Aufnahmezeitpunkt ca. $44''$ (D_J ...Durchmesser Jupiter, r ...geozentrischer Abstand von Jupiter).

$$\delta_J = \arctan\left(\frac{D_J}{r}\right) = \frac{143600 \text{ km}}{676 \cdot 10^6 \text{ km}} \approx 44''.$$

Durch Messung im Bild ergibt sich, dass der von Io erzeugte Kernschattenkreis etwa das 0,021fache des Durchmessers der Jupiterscheibe einnimmt. Der scheinbare Durchmesser des Kernschattens von Io beträgt folglich $\delta = 0,035 \cdot \delta_J \approx 0,9''$.

Theoretisch ergibt sich der scheinbare Kernschattendurchmesser aus folgenden Rechnungen (siehe auch Abb. 4):

$$\frac{0,5 \cdot (D_{Io} - d)}{0,5 \cdot (D_S - D_{Io})} = \frac{r_{Io} - R_J}{r_J - r_{Io}},$$

$$d = \frac{r_{Io} - R_J}{r_J - r_{Io}} \cdot (D_{Io} - D_S) + D_{Io},$$

$$d = \frac{421300 \text{ km} - 71800 \text{ km}}{778,3 \cdot 10^6 \text{ km} - 421300 \text{ km}} \cdot (3640 \text{ km} - 1392000 \text{ km}) + 3640 \text{ km},$$

$$d \approx 3000 \text{ km}.$$

$$\delta = \arctan\left(\frac{d}{r - R_J}\right) = \arctan\left(\frac{3000 \text{ km}}{676 \cdot 10^6 \text{ km} - 71800 \text{ km}}\right) \approx 0,9''.$$

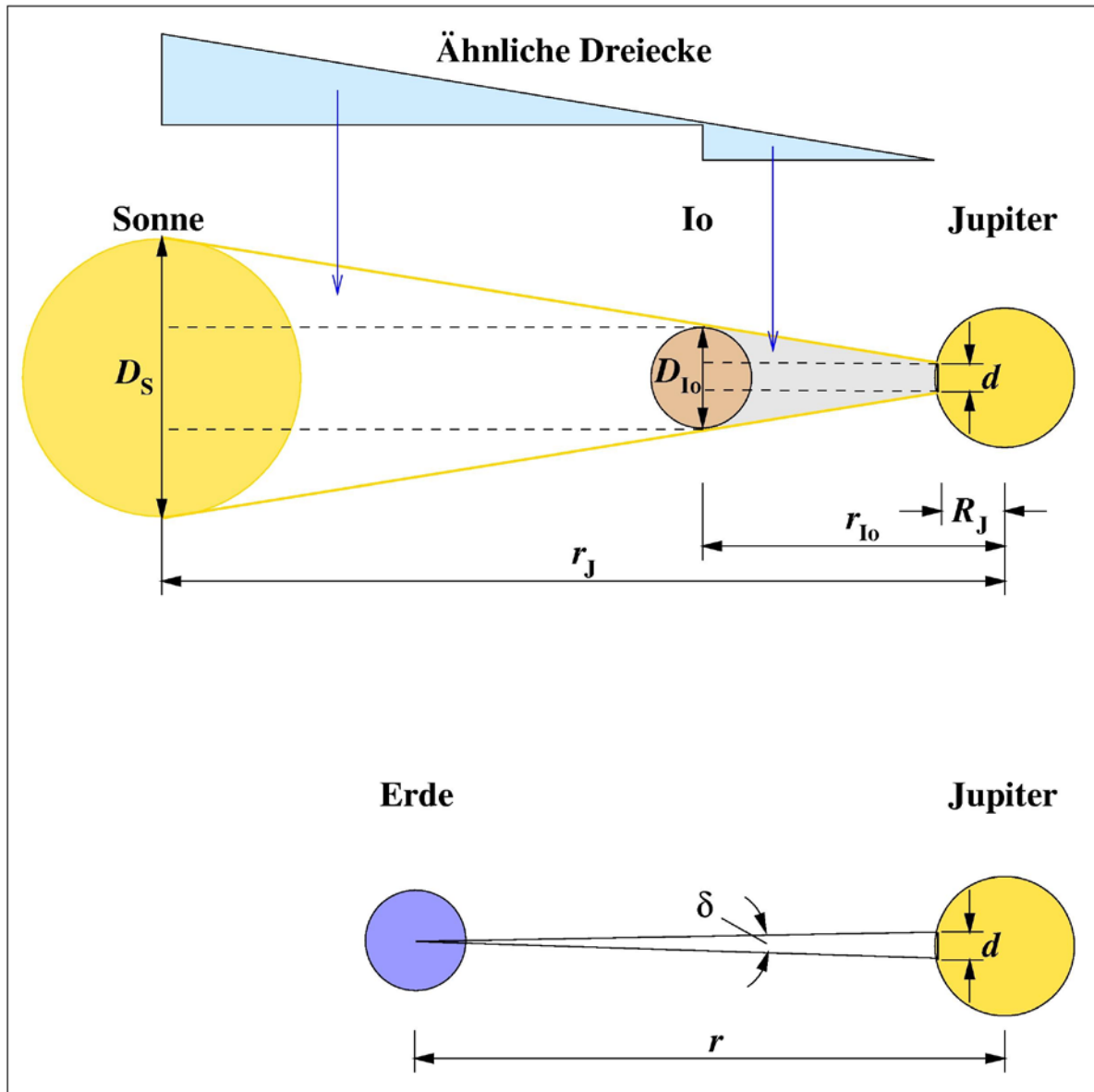


Abbildung 4: Grafisches Modell (nicht maßstabgerecht) als Grundlage der Berechnung der Kernschattengröße von Io auf Jupiter (als Folienvorlage unter [SKIZZE1.JPG](#)). ©: Olaf Fischer.

3. Abb. 5 zeigt die geforderte Rekonstruktion der Planetenpositionen, die mit den im Sternkalender angegebenen Positionen gut übereinstimmt. Laut Sternkalender hat Jupiter am 28. 3. 2004 die heliozentrische ekliptikale Länge von $165,5^\circ$ und die Sonne die geozentrische ekliptikale Länge von $5,7^\circ$. Die Erde hat dann die heliozentrische ekliptikale Länge von $180^\circ + 5,7^\circ = 185,7^\circ$. Die Leitstrahlen Sonne-Erde und Sonne-Jupiter schließen also einen Winkel von ca. 20° ein.

Rekonstruktion der Positionen von Jupiter und Erde am 28. 03. 2004

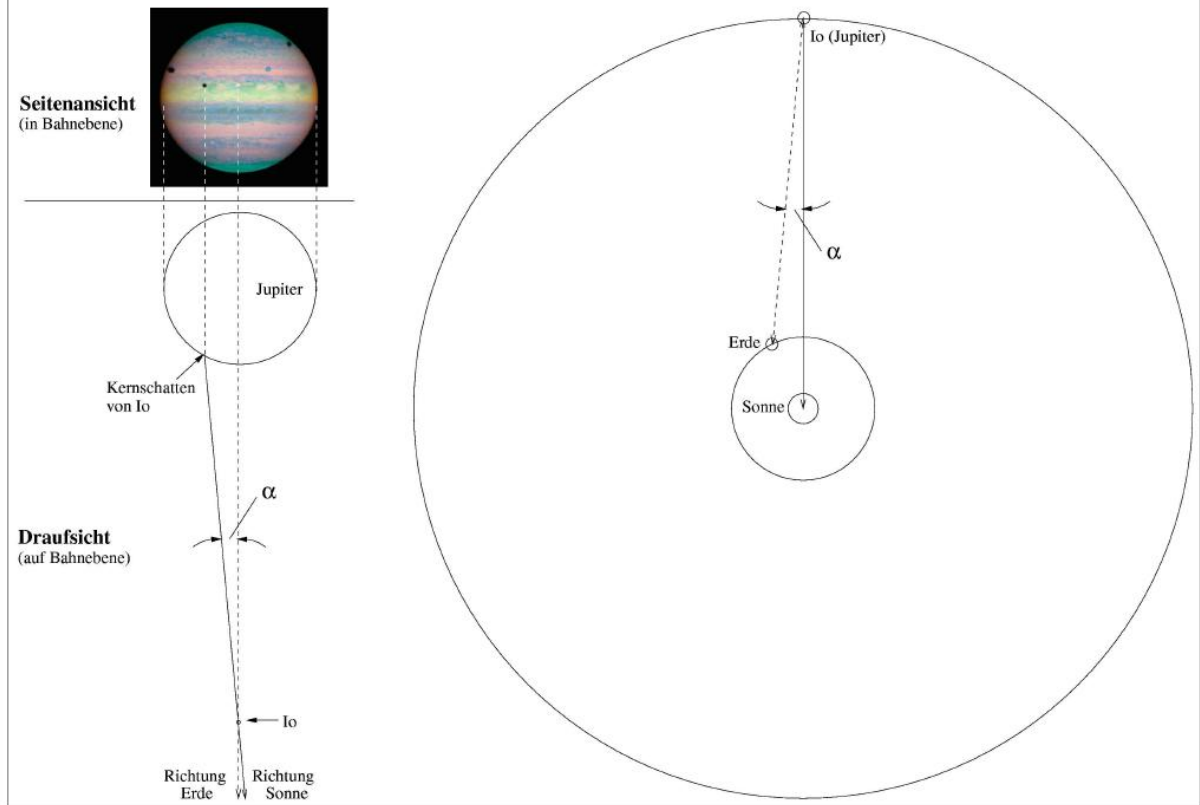


Abbildung 5: Ausgehend von der Aufnahme von Jupiter wird zunächst der Winkel α zwischen den Richtungen Kernschatten-Io-Sonne und Io-Erde in einem maßstäblichen Modell (Durchmesser Jupiter zu Abstand Jupiter-Io) ermittelt (links, erinnert an die Zweitafelprojektion in der Mathematik). Danach wird dieser Winkel in einem zweiten Modell (Abstände Sonne-Jupiter zu Sonne-Erde im richtigen Verhältnis) genutzt, um die Position von Jupiter zur Erde zu konstruieren. Die Konstruktion erlaubt übrigens auch die Abschätzung des geozentrischen Abstands von Jupiter (als Folienvorlage unter [SKIZZE2.JPG](#)). ©: Olaf Fischer.

Arbeitsblatt –

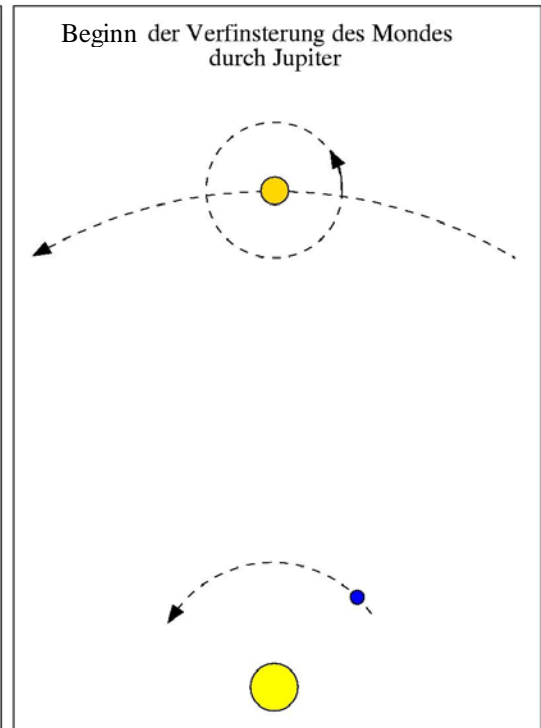
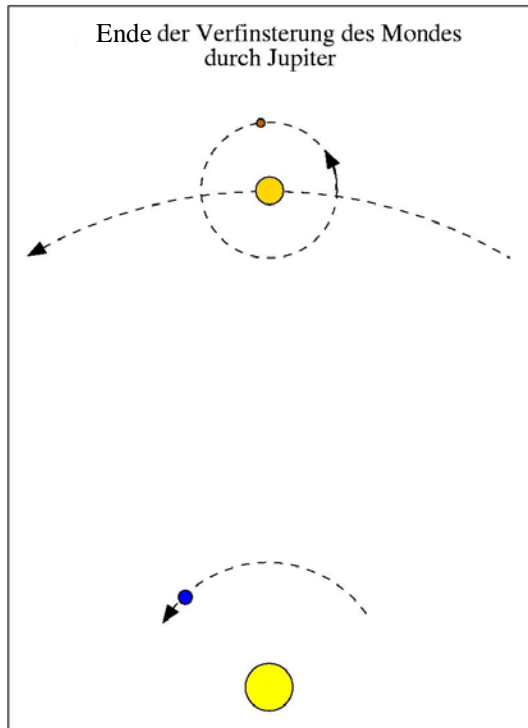
Besondere Konstellationen im System Sonne-Erde-Jupiter-Io im grafischen Modell

Der Umlauf der Monde um Jupiter erfolgt nahezu in der Ekliptikebene, so dass der Erdbeobachter den Umlauf als ein harmonisches Hin- und Herpendeln der Monde um Jupiter beobachten kann. Diese Situation kommt dem Modell gleich, das in der Mathematik zur Herleitung der Sinus-Funktion herangezogen wird. Dabei wird von einem Punkt ausgegangen, der mit konstanter Geschwindigkeit auf einem Einheitskreis umläuft und dessen Auslenkung in Richtung einer durch den Mittelpunkt gelegten Achse dann den Funktionswert der Sinus-Funktion darstellt. Entsprechend der „harmonischen Schwingung“ der Jupitermonde vor der Jupiterscheibe werden ihre Positionen in Sternkalendern durch Sinus-Kurven dargestellt.

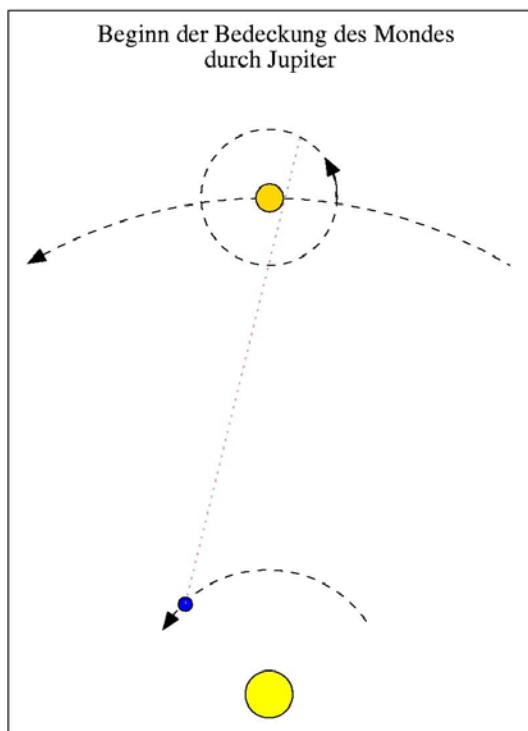
Bei seinem Umlauf gelangt der Jupitermond Io sowohl vor als auch hinter die Jupiterscheibe und kann entweder in den Schatten von Jupiter eintauchen oder seinen Schatten auf Jupiter werfen. All diese Ereignisse können als Referenzpunkte des Umlaufs, d. h. als Zeitmarkengeber dienen. Diese acht besonderen Mondpositionen gilt es kennen zu lernen, bevor einige von ihnen beobachtet werden sollen. Das Kennen lernen soll mit der folgenden grafische Übung auf einem Arbeitsblatt erfolgen. Auf dem Arbeitsplatz sind die acht bezeichneten Konstellationen darzustellen bzw. zu vervollständigen (nicht maßstabsgerecht) und zu beschriften. Kernschattenverläufe und die Sichtlinie Erdbeobachter-(Jupiter)-Io-(Jupiter) sind zu einzuzeichnen, wenn sie von Bedeutung sind.

Beobachtungsprojekt "Jupitermonduhr" Ausgezeichnete Erscheinungen der Galileischen Jupitermonde

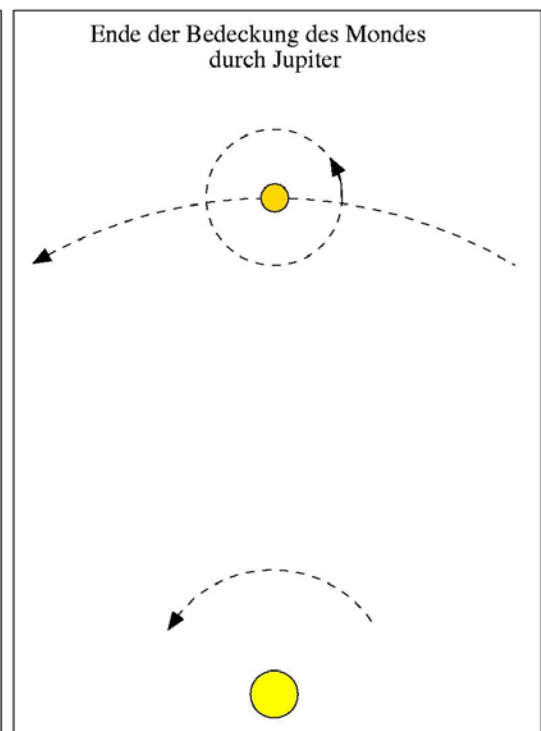
Verfinsterung
des Mondes



Bedeckung
des Mondes



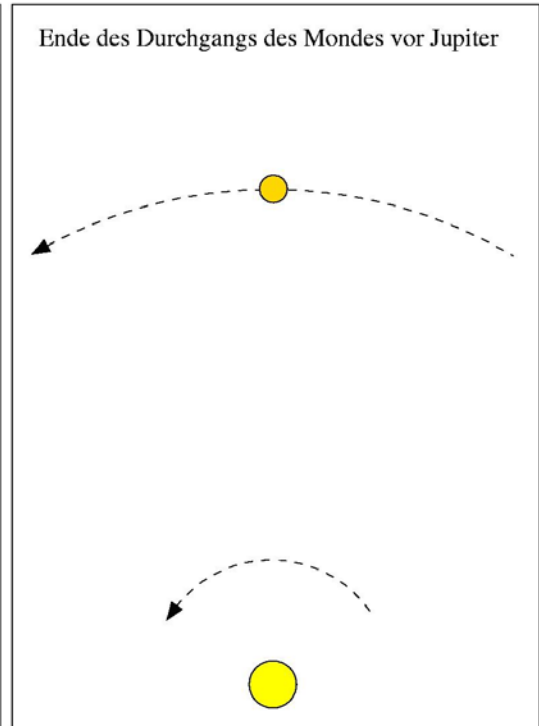
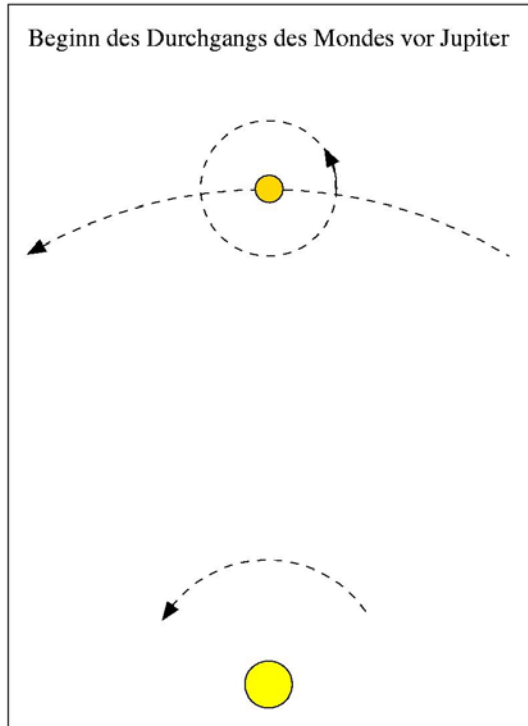
nach der Opposition



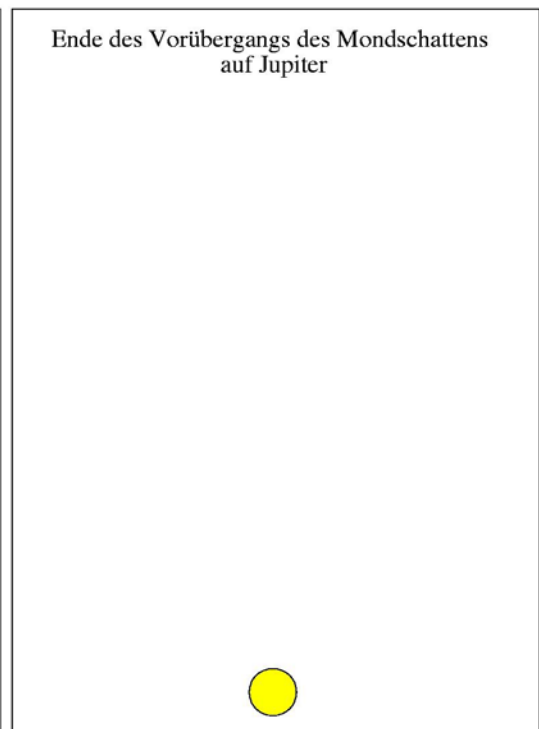
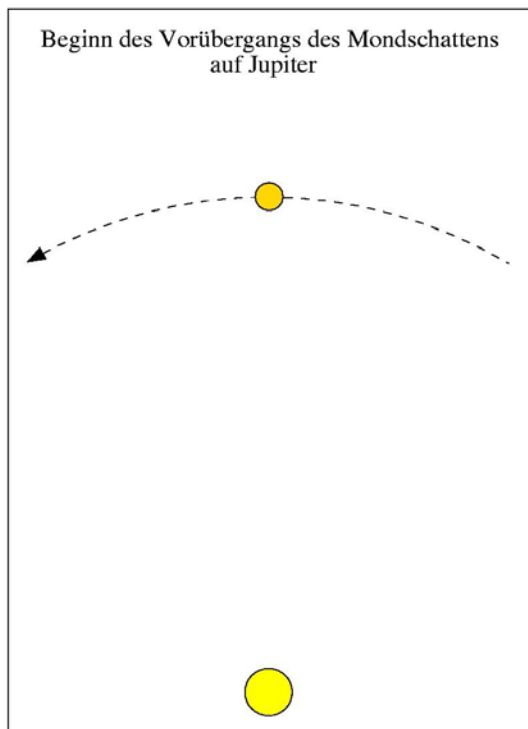
vor der Opposition

Beobachtungsprojekt "Jupitermonduhr" Ausgezeichnete Erscheinungen der Galileischen Jupitermonde

Durchgang
durch Jupiter



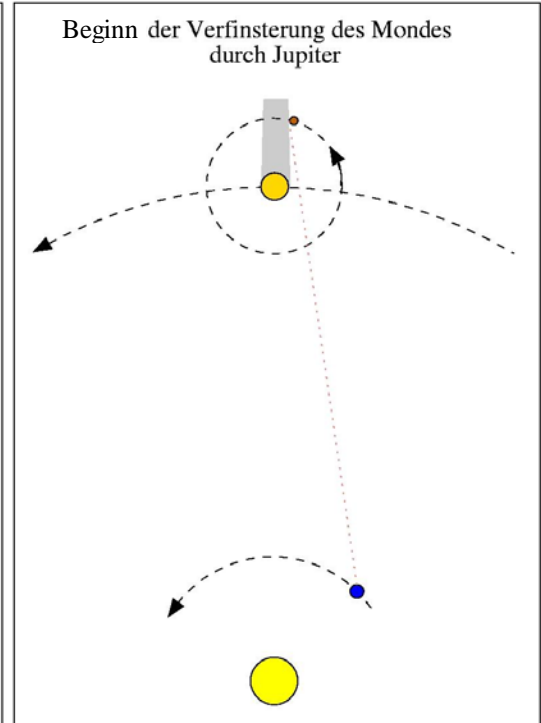
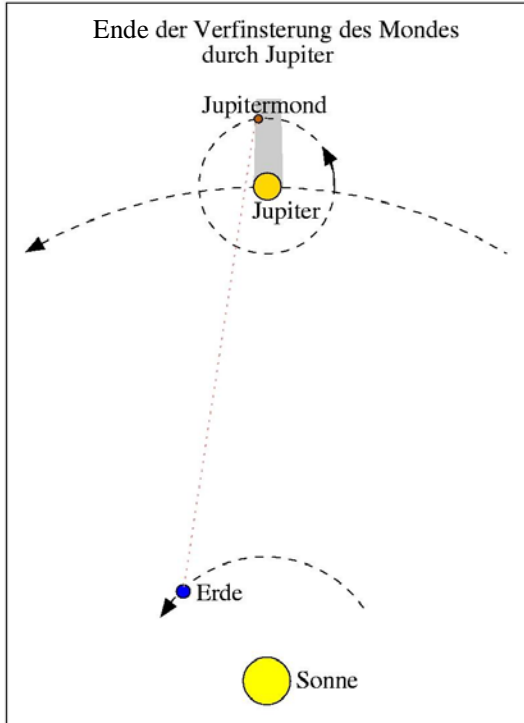
Monschatten
auf Jupiter



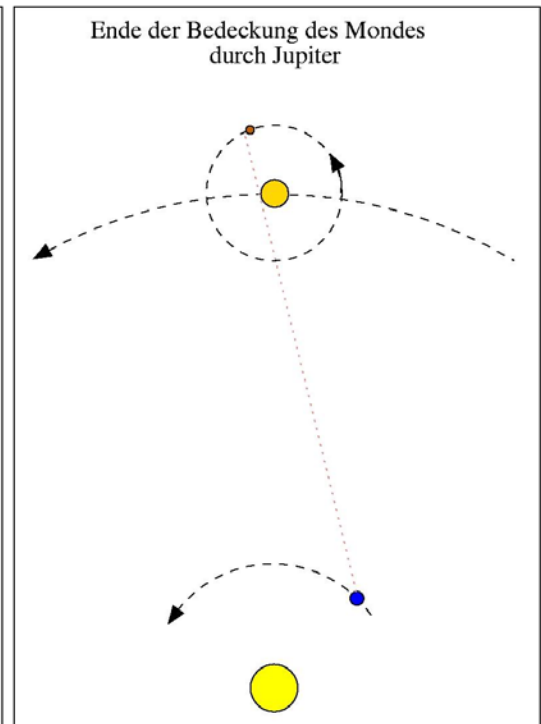
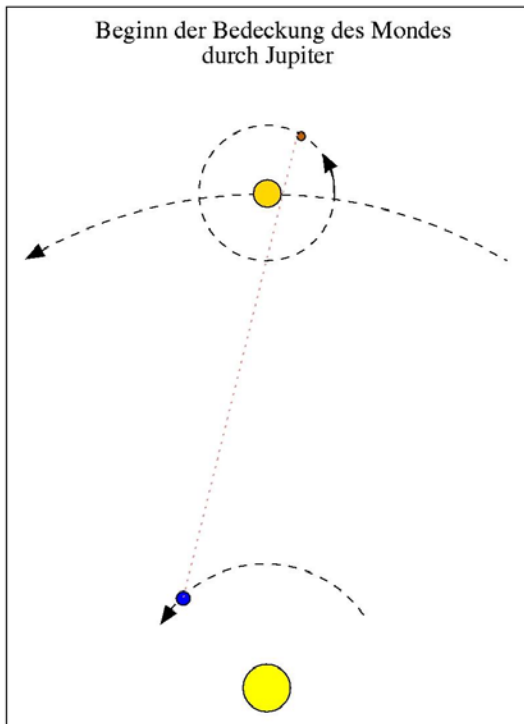
Ergebnisse zum Arbeitsblatt

Beobachtungsprojekt "Jupitermonduhr"
Ausgezeichnete Erscheinungen der Galileischen Jupitermonde

Verfinsterung
des Mondes

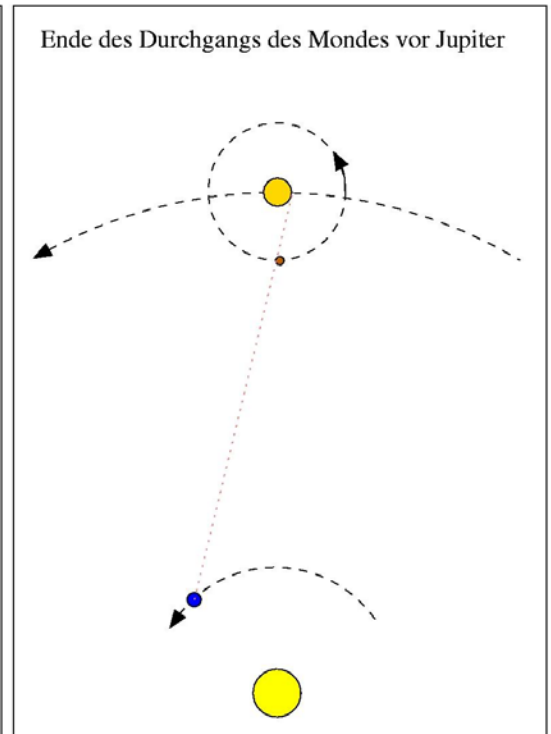
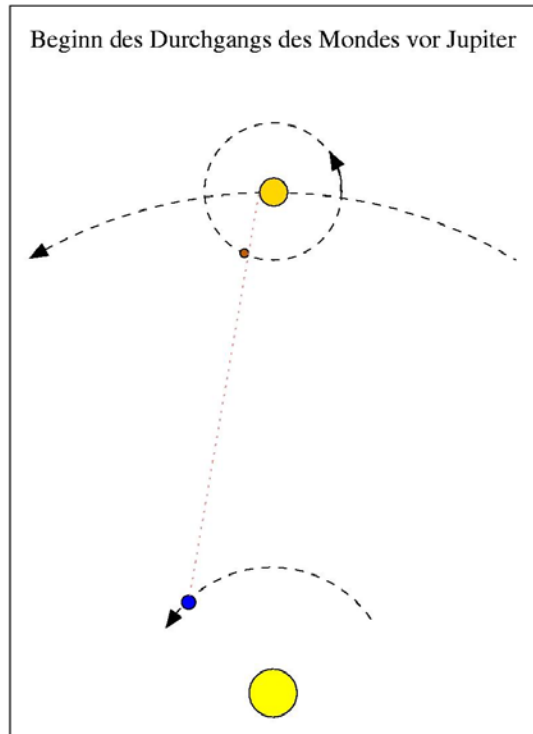


Bedeckung
des Mondes

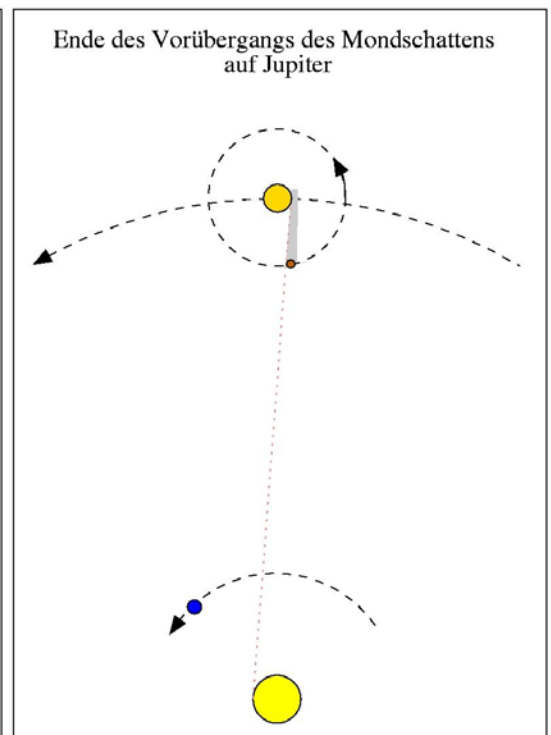
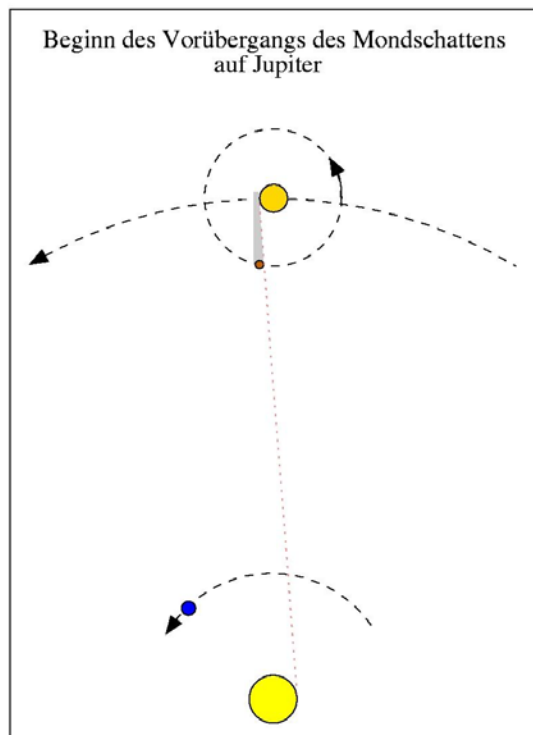


Beobachtungsprojekt "Jupitermonduhr" Ausgezeichnete Erscheinungen der Galileischen Jupitermonde

Durchgang
durch Jupiter



Monschatten
auf Jupiter



Beobachtungsaufgabe - Bestimmung von Ereigniszeiten

Die „Zeitablesung“ an der „Jupitermonduhr“, d. h. die exakte Feststellung von Zeitpunkten, an denen die mit Hilfe der Arbeitsblätter zuvor kennen gelernten Ereignisse eintreten, stellt die eigentliche Beobachtungsaufgabe dar. In einem Sternkalender (z. B. Ahnerts Kalender für Sternfreunde) findet man die vorausberechneten Zeiten und kann danach die Beobachtung planen.

Voraussetzung für die Beobachtung ist ein stabil montiertes Fernrohr, welches mit starker Vergrößerung (etwa das Doppelte der in Millimetern angegebenen Objektivöffnung) genutzt wird und eine Funkuhr. Die Beobachtung sollte aufgezeichnet werden. Dazu gehört sowohl die Darstellung des im Fernrohr sichtbaren Himmelsausschnittes (Sehfeld) mit der Jupiterscheibe und den Monden im Moment des Ereignisses als auch die Beschreibung der Umstände der Beobachtung, wobei die exakte Zeit die wesentliche Information darstellt.

Der krönende Abschluss besteht darin, das Folgeereignis vorauszuberechnen und dann erneut zu beobachten. Zur Berechnung der Zeit t_n eines Folgeereignisses muss die folgende Formel benutzt werden, wobei n die Anzahl der synodischen (auf die Achse Erde-Sonne bezogenen) Umläufe von Io und T dessen synodische Umlaufzeit darstellen.

$$t_n = t_0 + n \cdot T.$$

Im Falle von Io können die nächsten Ereignisse also nach $n \cdot 1,7699$ d beobachtet werden, wenn die Entfernung zwischen Erde und Jupiter gleichbliebe. Da sich der geozentrische Abstand von Jupiter verändert, wird es aber zu einer Zeitdifferenz zwischen den vorausberechneten und den beobachteten Ereigniszeitpunkten kommen. Mit einer Vielzahl von Beobachtungen kann dann die Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit erfolgen, wie es der Ole Roemer 1676 als erster praktizierte.

Anmerkung zur Wissenschaftsgeschichte

Die Idee zur Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit erwuchs im Rahmen von Messungen, die der dänische Astronom Ole Roemer (1644-1710) für den französischen Astronom Giovanni Domenico Cassini (1625-1712) an der Pariser Sternwarte durchführte. Cassini hatte eine Idee von Galileo Galilei (1564-1642) aufgegriffen, nach der die Verfinsterungen der Jupitermonde eine himmlische Uhr darstellen, die weltweit abgelesen werden kann und damit für die Lösung des Längengradproblems geeignet ist. Er (Cassini) veröffentlichte 1668 umfangreiche Zeittafeln von den Verfinsterungen und bot damit eine Möglichkeit, Ortszeitdifferenzen und damit Längengrade genauer als bisher zu bestimmen. Das Problem zu damaliger Zeit war die große Ungenauigkeit der Uhren. Es war für Reisende praktisch nicht möglich, die genaue Zeit ihres Heimatortes mitzunehmen, um aus der Differenz zwischen Ortszeit und „mitgenommener Zeit“ den bei der Reise bewältigten Längengradunterschied zum Heimatort zu ermitteln.

Als Ole Roemer zur Verbesserung der Zeittafeln die Verfinsterungen der Monde des Jupiter erneut beobachtete, bemerkte er eine jährliche Schwankung in den Zeiten zwischen den Ereignissen. Er brachte diese Schwankung in Zusammenhang mit der jährlich variierenden Entfernung zwischen Erde und Jupiter und schloss folgerichtig auf die Endlichkeit der Lichtgeschwindigkeit.

Dies führte jedoch zu Differenzen mit Cassini, der ein Verfechter der von René Descartes (1596-1650) aufgestellten und in Europa stark verbreiteten Kosmologie war, nach der sich das Licht ohne zeitliche Verzögerung von einem Ort zum anderen fortpflanzt.