Zurück zum Mond

Zurück zum Mond – aber warum? Natürlich sind es hauptsächlich die physikalischen Eigenschaften des Erdtrabanten, die Astronomen und Raumfahrer zu einer Rückkehr auf seine Oberfläche einladen. Einige dieser Eigenschaften haben – gewissermaßen als physikalische Paradebeispiele – auch im Schulunterricht schon den Status von (manchmal etwas einfallslosen) Klassikern erlangt.
Wie oft wird und wurde wohl im Unterricht zur Akustik gefragt, ob man auf dem Mond etwas hören kann? Welche Stoffeinheit zum Thema Schwerkraft nimmt nicht wenigstens einmal Bezug auf den Mond und thematisiert die Tatsache, dass die Astronauten dort so erstaunlich weit „hüpfen“ konnten?
Will man eine Raumstation auf dem Mond betreiben und dort auch Himmelsbeobachtungen durchführen, dann gilt es einerseits eine Fülle von physikalisch-technischen Schwierigkeiten zu lösen, die aufgrund der dortigen Umgebungsbedingungen erwachsen, andererseits sind einige dieser Bedingungen für verschiedene Himmelsbeobachtungen und wissenschaftliche Experimente äußerst attraktiv. Nachfolgend wollen wir, quasi spielerisch, mit den Mitteln der Schulphysik den Bau eines fiktiven Mondobservatoriums teilweise „projektieren“ (Bild 1). Die Hoffnung für den Unterricht besteht darin, dass durch die Wahl dieses Themas physikalische Inhalte für Schüler ansprechend und motivierend verpackt werden – es müssen ja nicht immer die oben erwähnten Klassiker zur Mondphysik sein.

Übersicht der Bezüge im WiS!-Beitrag		
Physik	Mechanik Thermodynamik Optik	Druck, Gravitationskraft, Trägheitskraft Wärme, Wärmekapazität, thermodynamisches Gleichgewicht, Stefan-Boltzmann-Gesetz, Parabolspiegel
Astronomie	Astropraxis Kleinkörper	Spiegelteleskop, Radioteleskop Mond, Mondbewegung, physikalische Eigenschaften des Mondes
Fächerverknüpfung	Astro-Ma	Parabelgleichung, Analysis

Abbildung 1: Vision von einer Mondstation,
©: NASA, Artwork done for NASA by Pat Rawlings, of SAIC.
https://spaceflight.nasa.gov/gallery/images/exploration/lunarexploration/hires/s95_01563.jpg.

Wichtige Daten zum Mond

Für die nun folgenden Überlegungen werden einige physikalische Daten des Mondes benötigt.

Radius des Mondes: 1738 km
Masse des Mondes: $7{,}35 \times 10^{22}$ kg
Mondbewegung um die Erde (gebunden):
syn. Umlaufzeit: 29,5 d
Solarkonstante (für die Erde): 1360 W m^{-2}
Ortsfaktor für den Mond: a=1,62 m s^{-2}
Material am Boden der Maria: basaltartiges Gestein

Obwohl der Vollmond vergleichsweise hell am Nachthimmel leuchtet, reflektiert er mit (im Mittel) 7% eigentlich nur einen recht kleinen Anteil an der Sonnenstrahlung. In erster Näherung ist die Mondoberfläche schwarz.
Das Gestein in den Maria des Mondes ist dem irdischen Basalt sehr ähnlich. Die Terrae bestehen aus lockerem Material. Basalt hat mit $c \cong 1$ kJ kg^{-1} K^{-1} eine recht hohe Wärmekapazität, kann also Wärme gut speichern.

Eine Mondstation muss Atemluft und flüssiges Wasser in ausreichender Menge aufnehmen, da beides auf dem Mond nicht verfügbar ist. Aber was muss sie eigentlich noch können?

Frage 1: *(→zurück zum Anfang)*

Welche maximale Temperatur wirkt eigentlich auf die Außenhaut der Station ein?

Zur Beantwortung dieser Frage schätzen wir die höchstmögliche Temperatur der Mondoberfläche auf der sonnenzugewandten Seite. Diese wird dort erreicht, wo die Sonnenstrahlen senkrecht auf die Oberfläche treffen.
Der Mond dreht sich infolge seiner gebundenen Rotation relativ langsam um die eigene Achse. Im Mittel wird jede Stelle auf der Oberfläche ca. 15 Tage hinweg beleuchtet und hält sich anschließend für die gleiche Zeitdauer auf der Schattenseite des Mondes auf. Wir nehmen an, dass diese recht lange Zeitspanne reicht, damit sich auf der sonnenzugewandten Seite des Mondes ein thermodynamisches Gleichgewicht ausbildet. Dann muss die Energie, welche ein Quadratmeter Mondoberfläche je Sekunde abstrahlt (P_A) gleich der Energie sein, welche dieser pro Sekunde und Quadratmeter von der Sonne erhält (P_E). Die Solarkonstante S des Mondes, dessen Aufenthaltsort ja periodisch um die Erdbahn schwankt, stimmt im Mittel mit der für die Erde überein.
Der Mond empfängt je Quadratmeter und Sekunde bei senkrechtem Strahlungseinfall also die Strahlungsenergie

$$P_E = S \qquad (1)$$

und emittiert je Sekunde und Quadratmeter näherungsweise von der auf die Temperatur T_M erwärmten Oberfläche die Energie

$$P_A = \sigma T_M^{\ 4} \text{ (Stefan-Boltzmann-Konstante, } \sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8} \text{W m}^{-2} \text{K}^{-4}\text{).} \qquad (2)$$

Gleichsetzen von (1) und (2) und Umstellen nach T_M liefert:

$$T_M = \sqrt[4]{\frac{S}{\sigma}} = 394K = 121°C\,, \tag{3}$$

(Literaturwert für max. Oberflächentemperatur auf dem Mond: $T_M \cong 130°C$).
Unter thermodynamischen Gesichtspunkten empfiehlt es sich also, die Raumstation aus gut wärmeisolierenden und strahlungsreflektierenden Materialien in möglichst höheren Mondbreiten zu errichten, weil dort das Sonnenlicht nicht senkrecht auf die Oberfläche trifft.

Vielleicht will man aber aus verschiedenen Gründen gerade in der Nähe des Mondäquators eine Station bauen?

Frage 2: *(→zurück zum Anfang)*

Gibt es vielleicht eine einfache Möglichkeit, die Raumstation vor Überhitzung zu bewahren?

Steckt man selbst an einem heißen Tag seine Hand nur wenig in den Erdboden, dann merkt man, dass selbst in geringen Tiefen die Erde relativ kühl ist. Diese Beobachtung bringt uns auf die Idee, die Station einfach ein wenig unter den Mondboden zu bauen. Um die von der Oberfläche in das Innere des Mondes strömende Wärme zu berechnen, benötigt man eigentlich die Differentialgleichung der Wärmeleitung. Für eine grobe Schätzung gehen wir davon aus, dass

1. der Wärmefluss im Mondboden einen stationären Zustand erreicht (eine sehr großzügige Annahme, denn dann müsste der Boden eine sehr, sehr lange Zeit bestrahlt werden) und
2. die gesamte an der Oberfläche auftreffende Strahlung in das Innere abgeleitet wird (was eine ganz offensichtlich viel zu großzügige Annahme ist, siehe die Antwort zu Frage 1, wo wir annahmen, die Sonnenstrahlung würde wieder reemittiert).

Betrachtet man unter diesen Annahmen irgend einen Körper, dann wird die durch ihn hindurchgehende Wärme proportional zur Zeit t, zur Querschnittsfläche A und zum Temperaturunterschied ΔT zwischen der Innen- und der Außenfläche des Körpers sein, indirekt proportional natürlich zu seiner Dicke l. Mit dem Proportionalitätsfaktor λ (Wärmeleitfähigkeit) wird aus diesen Proportionalitätsüberlegungen die Gleichung:

$$Q = \lambda \cdot \frac{A \cdot t \cdot \Delta T}{l}. \tag{4}$$

Die pro Zeit- und Flächeneinheit an der Oberfläche ankommende Wärme ist aber gerade die Solarkonstante:

$$S = \lambda \cdot \frac{Q}{A \cdot t}. \tag{5}$$

Aus (4) wird somit die Gleichung

$$S = \lambda \frac{\Delta T}{l}. \tag{6}$$

In unserer Modellannahme wird die gesamte Sonnenwärme nach innen weitergeleitet. Es kommt also die gleiche Wärme, die am Mondboden anlangt auch in die Raumstation hinein. Die Frage ist jedoch, ob dies bei erträglichen Temperaturen geschieht. Wir nehmen $\Delta T = 100K$ an, was mit der Lösung aus Frage 1 für die Stationstemperatur etwa 20°C bedeutet und berechnen, welche Dicke l das basaltartige Gestein ($\lambda \cong 1$ W m^{-1} K^{-1}) über der Station haben muss:

$$l = \lambda \cdot \frac{\Delta T}{S} = 7 \text{ cm}. \qquad (7)$$

Eine vergleichsweise dünne Gesteinsschicht genügt also, um die Station vor allzu hoher thermischer Einwirkung zu schützen. Auch um dem ständigen Bombardement von Kleinstmeteoriten zu entgehen, empfiehlt es sich, eine Mondstation etwas in den Mondboden hinein zu bauen.
Aus unserer Abschätzung können wir noch eine weitere Aussage ableiten. Örter auf dem Mond, die nie vom Sonnenlicht erhellt werden und die tief am Boden von Mondkratern liegen, können ihre Temperatur weder durch direkte Wärmeeinstrahlung, noch durch Wärmeleitung von heißeren Mondregionen erhöhen. Ihre Temperatur liegt deshalb nur wenig über der thermischen Gleichgewichtstemperatur zum Wärmehintergrund des Kosmos (3K).

Die geringe Schwerkraft des Mondes gestattet eine relativ großzügige Behandlung der Baustatik. Ein Gebäudefundament etwa, das auf der Erde gerade so die Belastung durch das Bauwerk tragen könnte, wäre auf dem Mond schon deutlich überdimensioniert. Auch die Astronomen kennen Statikprobleme, beispielsweise bei der Realisierung sehr großer frei beweglicher Radioparabolantennen. Für die nun folgende Frage sehen wir einmal von den Möglichkeiten interferometrischer Anordnungen ab.

Frage 3 *(→zurück zum Anfang)*

Angenommen, man würde die Antennenmontierung eines Radioteleskops mit einer gegebenen Empfangsfläche, welche auf der Erde gerade noch das Teleskop zu stützen vermag, auf den Mond transportieren und dort eine neue Parabolantenne aufsetzen. Schätze ab, um welchen Faktor sich die Empfangsfläche erhöhen könnte, wenn man die neue Mondantenne so groß baut, dass auch sie gerade noch von der Montierung getragen werden kann.

Hier sollen natürlich keine komplexen Berechnungen durchgeführt werden! Vielmehr beruht die schnellste Lösung auf einer Skalen- und Dimensionsanalyse. Jedoch lässt sich das Problem für Schüler etwas leichter handhaben, wenn man es an einem konkreten Beispiel erörtert. Unser Modellradioteleskop der Masse m ruhe auf einer quaderförmigen Konstruktion (Abb. 2) der Querschnittsfläche Q. Der maximale Druck, dem diese Querschnittfläche gerade noch auf der Erde Stand halten kann, sei dann

$$p_{\max} = \frac{m \cdot g}{Q}, \quad (g = 9{,}81 \text{ms}^{-2}). \qquad (8)$$

Die Montierung muss auf dem Mond mit dem dortigen Ortsfaktor von a=0,165g lediglich den Druck

$$p = 0{,}165 \cdot p_{\max} \qquad (9)$$

aushalten. Geht man wieder bis an die Belastungsgrenze, so könnte man die Masse der Mondantenne um den Faktor 1/0,165=6 vergrößern. Gleiches Material (=gleiche Dichten) vorausgesetzt, könnte die Antenne auf dem Mond also das 6-faches Volumen der Erdantenne besitzen, mithin eine um den Faktor $\sqrt[3]{6}^{\,2} = 3.3$ größere Oberfläche. Der Mond ist ein guter Platz zum Bau von Großteleskopen. Lediglich der freie Weltraum ermöglicht wegen a=0m s^{-2} – jedenfalls aus Sicht der Statik – noch größere Empfangsflächen.

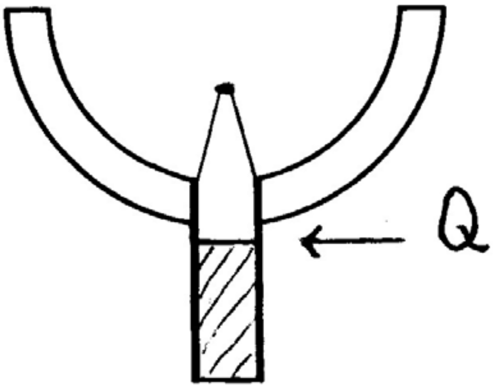

Abbildung 2: „Teleskopschüssel" schematisch.

Erfahrungsgemäß ist vielen Schülern relativ häufig nicht klar, um welche Faktoren sich beispielsweise Oberflächen oder Volumina ändern, wenn man alle Abmessungen eines Körpers in gleicher Weise linear korrigiert. Hier empfiehlt es sich, zunächst einen konkreten Körper (im vorliegenden Beispiel etwa eine Kugelschale als Annäherung an die Parabelform) zu betrachten.

Rotierende Flüssigkeitsteleskope im optischen Bereich stellen auf dem Mond vielleicht eine Alternative dar, um sehr große Empfangsflächen zu realisieren.

Frage 4 *(→zurück zum Anfang)*

Weshalb besitzt eine rotierende Flüssigkeit unter Einwirkung einer homogenen Schwerkraft überhaupt eine parabolisch gekrümmte Oberfläche? Wie groß ist die Brennweite eines solchen Flüssigkeitsspiegels?

Vielerorts wird die klassisch-geometrische Definition der Parabel im Schulunterricht nicht mehr gelehrt, die Lernenden kennen aber Parabelgleichungen der Form $y=px^2$. Deshalb wird hier keine geometrische, sondern eine stark an die Analysis angelehnte Antwort auf die Frage 4 gegeben, die man auch in einem mathematischen Abiturgrundkurs so behandeln könnte. Ausgangspunkt für die weiteren Betrachtungen sind die Abb. 3a, b. Wie man durch ein Experiment recht leicht bestätigen kann, krümmt sich jede Flüssigkeit in einem Gefäß, wenn man dieses in der in Abb. 3a gezeigten Weise in Rotation versetzt.

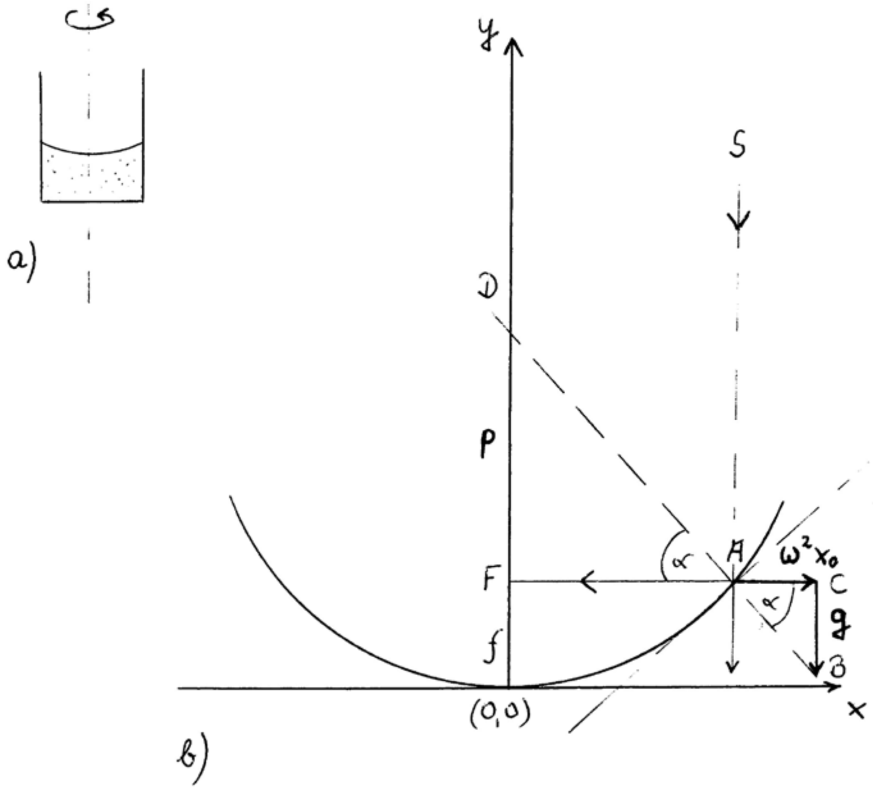

Abbildung 3: Krümmung einer rotierenden Flüssigkeitsoberfläche und die dabei wirkenden Beschleunigungen.

Grundsätzlich richtet sich die Oberfläche einer Flüssigkeit an jeder Stelle so aus, dass sie senkrecht zur resultierenden Beschleunigung verläuft. Die Senkrechte zur Flüssigkeitsoberfläche im Punkt A verläuft in der Abb. 3b durch die Punkte D und B. Ihre Richtung folgt aus der vektoriellen Addition der Fallbeschleunigung g mit der in A wirksamen Zentrifugalbeschleunigung $\omega^2 x_0$. Wie man leicht erkennt, sind die Dreiecke ADF und ABC ähnlich und es gilt daher die Beziehung

$$\frac{p}{x_0} = \frac{g}{\omega^2 x_0}. \tag{10}$$

Aus der Gleichung (10) ergibt sich das bemerkenswerte Resultat, dass p unabhängig von der Lage des Punktes A auf der Flüssigkeitsoberfläche stets den (bei einer festen Drehzahl) konstanten Wert $p = g \cdot \omega^{-2}$ besitzt. Diese Tatsache können wir nutzen, um die Funktionsgleichung der „Flüssigkeits“-Kurve zu ermitteln. Die Gerade durch D und A besitzt für irgendeinen Punkt A den Anstieg

$$m = \tan\alpha = -\frac{p}{x}. \tag{11}$$

Die dazu senkrecht verlaufende Tangente an die Kurve in A hat somit den Anstieg

$$m_s = -\frac{1}{m} = \frac{x}{p} = y'. \tag{12}$$

Integriert man die Gleichung (12) so erhält man als Kurvengleichung mit

$$y = \frac{x^2}{2p} \tag{13}$$

eine Parabelgleichung (Die Integrationskonstante c erhält bei dem in Abb. 3b gezeigten Kurvenverlauf durch den Koordinatenursprung den Wert c=0.). Um den Brennpunkt der Parabel zu bestimmen, wähle man einen speziellen Lichteinfall aus Richtung S so, dass der Winkel α=45° beträgt. In diesem Fall haben wir für die Tangente an die Parabel als Anstieg $\tan\alpha$=1 und aus

$$y' = \frac{x}{p} = 1 \tag{14}$$

folgt x=p und mit Gleichung (13) ergibt sich y=p/2. Der Schnittpunkt des reflektierten Lichtstrahls mit der Symmetrieachse ist aber gerade der Brennpunkt F der parabelförmigen Flüssigkeitsoberfläche. Die Brennweite f des rotierenden Spiegels ist somit

$$f = \frac{p}{2} = \frac{g}{2\omega^2}\,. \tag{15}$$

Da die Winkelgeschwindigkeit quadratisch in die Gleichung (15) eingeht, kann man bei einem Flüssigkeitsteleskop bereits durch relativ geringfügige Variationen der Drehzahl eine merkliche Änderung der Brennweite bewirken.

Experiment

Man untersuche, ob eine rotierende und reflektierende Flüssigkeitsanordnung bei senkrechtem Lichteinfall die Strahlung in einem Brennpunkt vereinigt.

Diese Aufgabenstellung hat im Grunde den Charakter eines Vorversuchs, den man später wahlweise zu experimentellen Messungen der Fallbeschleunigung, der Brennweite oder der Winkelgeschwindigkeit (siehe Gl. (15)) erweitern kann.

Geräte:
Elektromotor mit variabler Drehzahlregulierung (so, wie er von allen größeren Lehrmittelherstellern angeboten wird), eine möglichst leichte Schale aus nicht reflektierendem Kunststoff, die man auf einer Drehscheibe festklebt (kein Glasgefäß, kein Stativmaterial zur Fixierung des rotierenden Gefäßes, Verletzungsgefahr!), Wasser (oder besser Silberfarbe, keinesfalls aber das im WiS!-Artikel erwähnte Quecksilber), optische Leuchte mit Kondensor und Netzgerät, Mattglas- (oder Kunststoff-) Schirm, Stativmaterial.

Aufbau und Durchführung:
Den Versuchsaufbau zeigt die Abbildung 4. Das Experiment läuft darauf hinaus, die Flüssigkeitsoberfläche in einem verdunkelten Raum mit einem parallelen Lichtbündel durch eine Mattscheibe hindurch zu bestrahlen, den vom reflektierten Licht erzeugten Brennpunkt auf der Mattscheibe zu registrieren und eventuell die Verkleinerung der Brennweite bei Erhöhung der Drehzahl zu untersuchen. Es empfiehlt sich, die Art der Mattscheibe zunächst auszuprobieren. Zu stark streuende Scheiben schwächen das einfallende Licht eventuell zu sehr und der Brennpunkt ist nicht mehr aufzufinden. In der Abb. 5 wird gezeigt, wie man in einem solchen Fall dennoch ein brauchbares Ergebnis erzielen kann. Man justiert die Scheibe so, dass etwa 75% des Lichtes direkt zur Flüssigkeit gelangen, der Brennpunkt befindet sich dann an einer Scheibenecke. Übrigens entstand das Foto bei der Verwendung von Wasser.

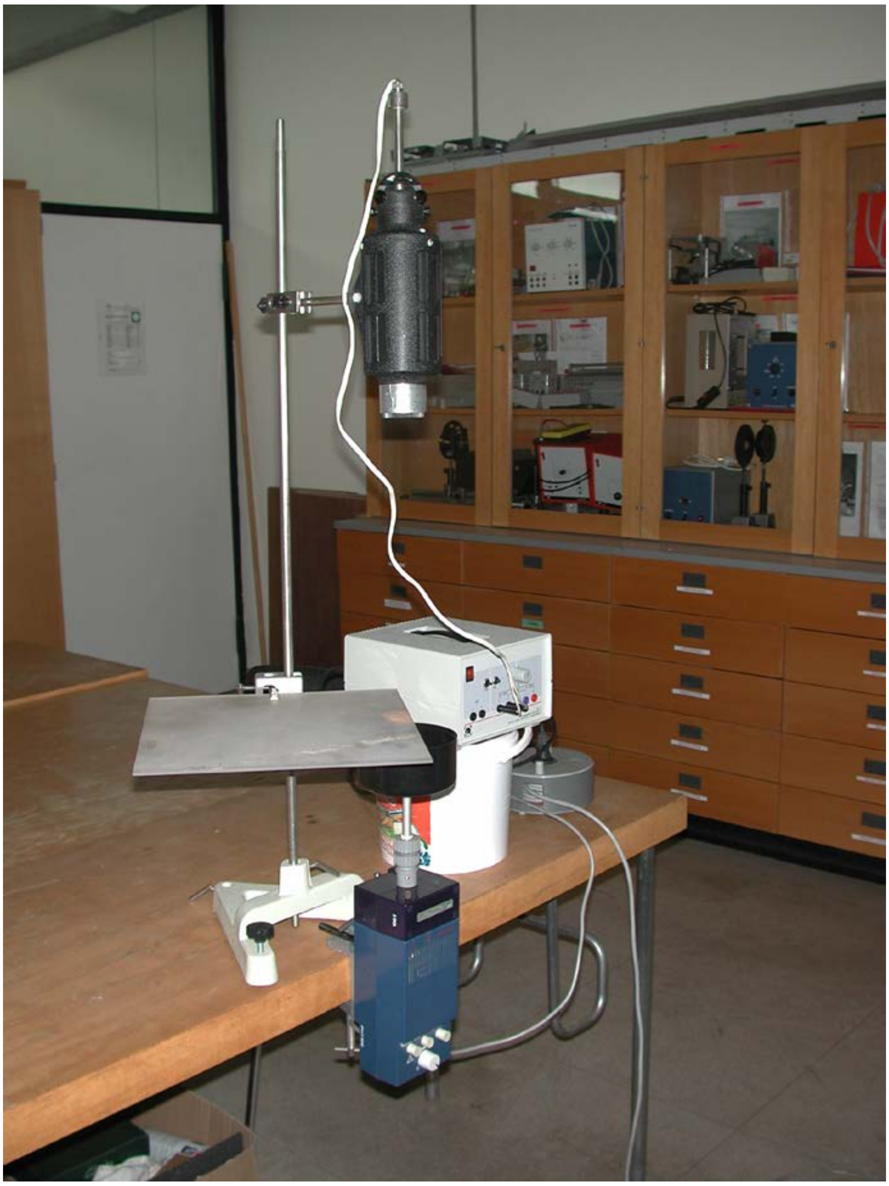

Abbildung 4: Versuchsaufbau zur Erzeugung einer rotierenden Flüssigkeitsoberfläche.

Abbildung 5: Brennpunkt des durch die rotierende Flüssigkeitsoberfläche gesammelten Lichts.