

Im Banne der Dunklen Materie - die rätselhafte Rotation der Galaxien

Die im Kosmos vorhandene Dunkle Materie erinnert an den Träger der zuweilen in Märchen und Sagen vorkommenden Tarnkappe. So wie der Tarnkappenträger (man denke z. B. an Siegfried im Nibelungenlied) unsichtbar ist und dennoch agieren kann, so bleibt die Dunkle Materie unseren Teleskopen verborgen und wirkt trotzdem durch ihre Gravitation. Das Agieren der Dunklen Materie in den Galaxien wird u. a. erkennbar, wenn man die Rotation der Galaxien untersucht. Dabei stellt man fest, dass diese bei den gemessenen Umlaufgeschwindigkeiten der Sterne nicht im Gleichgewicht sein können, sondern auseinander fliegen müssten. Rotierende Galaxien und Dunkle Materie bieten für den Physikunterricht spannende Anknüpfungspunkte für das Thema Rotation und 3. keplersches Gesetz. Der folgende Beitrag beginnt mit der Gegenüberstellung von starrer Rotation und Keplerrotation, wobei das Rotationsverhalten anschaulich durch die Rotationskurven unterscheidbar wird ([Arbeitsblatt](#)). In einer [Abfolge von Aufgaben zur Keplerrotation](#) werden die Schüler dann auf den Zusammenhang von Zentralmasse und Rotationsdauer orientiert. In der vorletzten Aufgabe wird die Diskrepanz zwischen der Masse, die für die Keplerrotation nötig ist und einer anderweitig ermittelten Masse thematisiert, um dann in der letzten Aufgabe im gleichen Sinne an die Problematik der Dunklen Materie heranzuführen. Nach einem Einschub von [fachlich Grundlegendem](#) zum Rotationsverhalten eines Sternsystems folgt eine weitere [Aufgabe zu einer rotierenden Galaxie](#). Im Abschnitt [„Spiralarmbildung – vom Astrobild über ein Freihandexperiment hin zu Theorien“](#) wird Anschauliches und Praktisches, ergänzt durch Zusatzinformation, geboten. Abschließend wird die interessante Frage nach der durch die galaktische Rotation bedingten Veränderung der Sternbilder aufgeworfen. Dazu werden neben einer [Animation](#) und einem [Arbeitsblatt](#) Möglichkeiten der [Fächerverknüpfung](#) aufgezeigt.

Übersicht der Bezüge im WiS!-Beitrag		
Physik	Mechanik	Rotationsverhalten, Keplerrotation, 3. keplersches Gesetz
Astronomie	Planeten, Galaxien	wahre Planetenbewegung, Dunkle Materie, Rotation des MSS, Eigenbewegung der Sterne
Fächer- verknüpfung	Astro-Ma, Astro-Info, Astro-Sprachen	Logarithmengesetze, lineare Darstellung exponentieller Zusammenhänge, Vektoren, Hörübung (Englisch), Programmieraufgabe

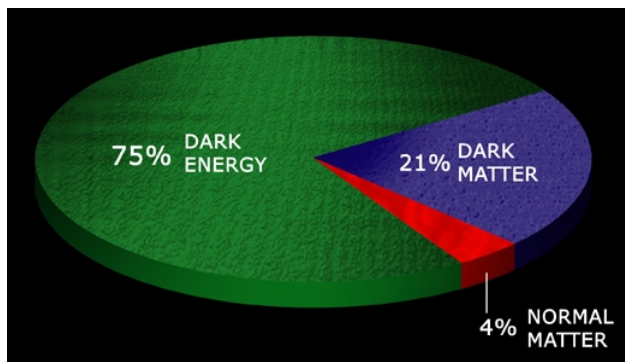


Abbildung 1: Es ist überraschend zu erfahren, dass die uns vertraute Materie (baryonische Materie) nur etwa 4% des Materieinhalts im Universum ausmachen soll. Manche Wissenschaftler bezeichnen daher die baryonische Materie als sichtbare Schaumkrone auf dem Meer der übrigen unsichtbaren Materie. Schüler vom Cuthbert's College in Epsom, Auckland (Australien) treten als „Dark matter performers“ auf. Die von ihnen gehaltenen farbigen Stifte sollen die strahlende baryonische Materie inmitten der nicht strahlenden Dunklen Materie verdeutlichen (Bildquellen: links: <http://chandra.harvard.edu/photo/2004/darkenergy/pie.jpg>, rechts: <http://transit.ofvenus.auckland.ac.nz/schools/29%20St%20Cuthbert's%20College/Faye's%20Site/acknowledgements.htm#>).

Arbeitsblatt: Rotationsverhalten kosmischer Objekte

(→ zurück zum Anfang)

Berechnen Sie die Bahngeschwindigkeiten v für Beobachter, die auf Kreisbahnen umlaufen:

1. an verschiedenen Orten auf der rotierenden Erde (**Rotation der Erde**),
2. auf den solaren Planeten bei ihrem Lauf um die Sonne (**Rotation des Planetensystems**).

Zeichnen Sie die **Rotationskurven**, d. h. den jeweiligen Verlauf der Bahngeschwindigkeit v (Kreisbahn) der Beobachter mit zunehmendem Abstand r von der Rotationsachse (v - r -Diagramm, siehe unten)!

Vergleichen und diskutieren Sie ausführlich die erhaltenen Rotationskurven. Arbeiten Sie insbesondere die Formelzusammenhänge zwischen v und r heraus (für Planetensystem Kräfteansatz nutzen). Als Zusatzaufgabe kann der Formelzusammenhang $v(r)$ für das Planetensystem durch Auswertung der Tabellendaten ermittelt werden. Hinweis dazu: Zwischen $\lg(v)$ und $\lg(r)$ besteht ein linearer Zusammenhang, der zur Bestimmung des Exponenten in $v(r)$ genutzt werden kann.

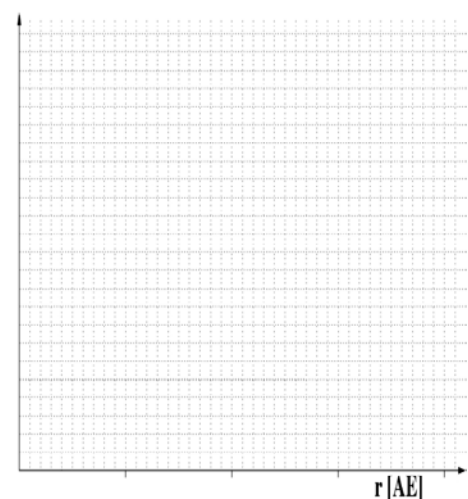
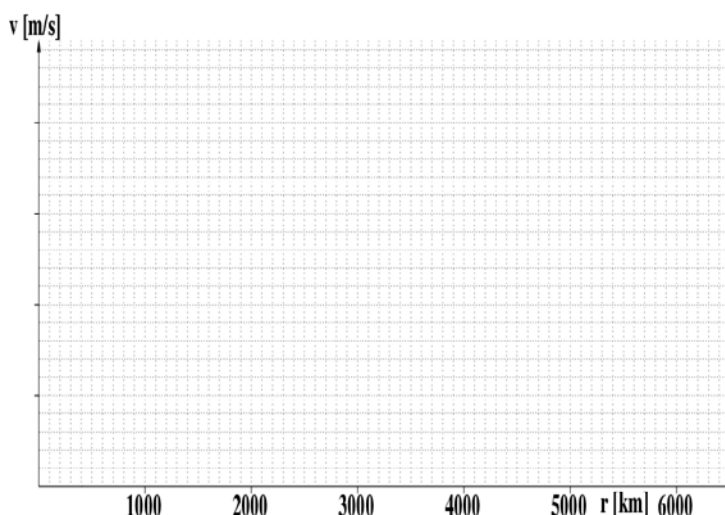


Ort	φ [° ']	r [km]	v [m/s]
Singapur	1 18		
Caracas	10 30		
Havanna	23 08		
Bagdad	33 20		
Rom	41 48		
Stuttgart	48 47		
Oslo	59 55		

φ ...Breitengrad, r ...Abstand zur Rotationsachse (Erde als Kugel mit dem Radius von 6371 km), siderischer Tag (360°-Drehung der Erde): 23 h 56 min 4,1 s

Planet	r [AE]	T [a]	v [km/s]
Merkur	0,39	0,241	
Venus	0,72	0,615	
Erde	1	1	
Mars	1,52	1,881	
Jupiter	5,20	11,86	
Saturn	9,54	29,44	
Uranus	19,19	84,02	
Neptun	30,07	164,79	
Pluto	39,48	247,92	

r ...mittlerer Abstand zur Sonne, T ...siderische Umlaufzeit (360°-Umlauf), 1a=365,2425 d



Arbeitsblatt: Rotationsverhalten kosmischer Objekte - Ergebnisse [\(←zurück zum Anfang\)](#)

Berechnen Sie die Bahngeschwindigkeiten v für Beobachter, die auf Kreisbahnen umlaufen:

1. an verschiedenen Orten auf der rotierenden Erde (**Rotation der Erde**),
2. auf den solaren Planeten bei ihrem Lauf um die Sonne (**Rotation des Planetensystems**).

Zeichnen Sie die **Rotationskurven**, d. h. den jeweiligen Verlauf der Bahngeschwindigkeit v (Kreisbahn) der Beobachter mit zunehmendem Abstand r von der Rotationsachse (v - r -Diagramm, siehe unten)!

Vergleichen und diskutieren Sie ausführlich die erhaltenen Rotationskurven. Arbeiten Sie insbesondere die Formelzusammenhänge zwischen v und r heraus (für Planetensystem Kräfteansatz nutzen). Als Zusatzaufgabe kann der Formelzusammenhang $v(r)$ für das Planetensystem durch Auswertung der Tabellendaten ermittelt werden. Hinweis dazu: Zwischen $\lg(v)$ und $\lg(r)$ besteht ein linearer Zusammenhang, der zur Bestimmung des Exponenten in $v(r)$ genutzt werden kann.

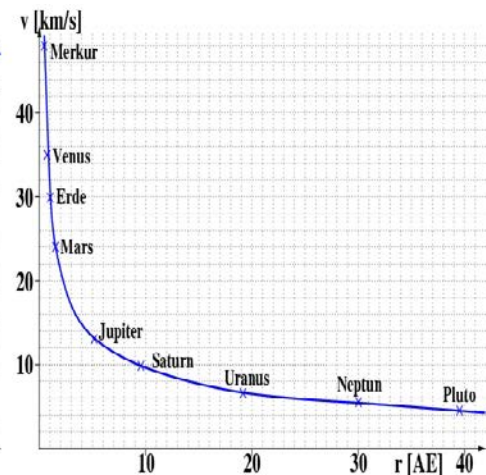
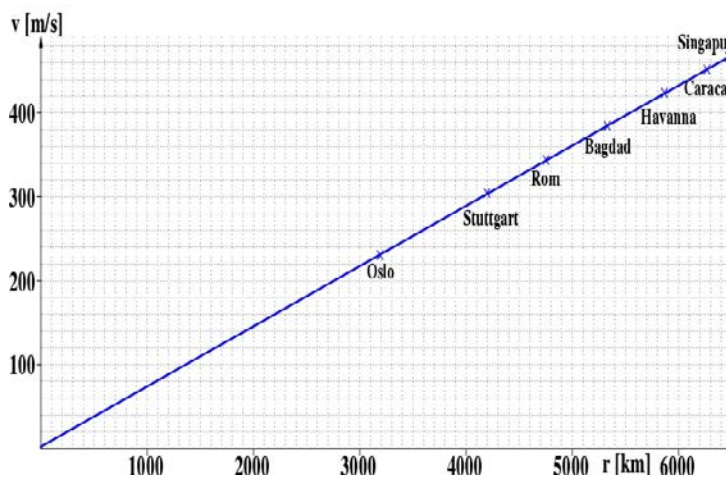


Ort	φ [° ']	r [km]	v [m/s]
Singapur	1 18	6369	464
Caracas	10 30	6264	457
Havanna	23 08	5859	427
Bagdad	33 20	5323	388
Rom	41 48	4749	346
Stuttgart	48 47	4198	306
Oslo	59 55	3193	233

φ ...Breitengrad, r ...Abstand zur Rotationsachse (Erde als Kugel mit dem Radius von 6371 km), siderischer Tag (360°-Drehung der Erde): 23 h 56 min 4,1 s

Planet	r [AE]	T [a]	v [km/s]
Merkur	0,39	0,241	47,9
Venus	0,72	0,615	35,0
Erde	1	1	29,8
Mars	1,52	1,881	24,1
Jupiter	5,20	11,86	13,1
Saturn	9,54	29,44	9,7
Uranus	19,19	84,02	6,8
Neptun	30,07	164,79	5,5
Pluto	39,48	247,92	4,7

r ...mittlerer Abstand zur Sonne, T ...siderische Umlaufzeit (360°-Umlauf), $1a=365,2425$ d



Diskussion der Ergebnisse

[\(→ zurück zum Anfang\)](#)

- Im Falle der rotierenden Erde wächst die Kreisbahngeschwindigkeit v proportional zum Bahnradius ($v \sim r$). Alle Bahnlangen (Kreisumfänge) $u = 2\pi \cdot r$ werden in der gleichen Umlaufzeit T bewältigt.

$$v = \frac{u}{T} = \frac{2\pi \cdot r}{T}$$

Die Proportionalitätskonstante $2\pi/T$ stellt die Winkelgeschwindigkeit dar. Wenn alle Punkte eines rotierenden Objektes die gleiche Winkelgeschwindigkeit haben, spricht man von **starrer Rotation**.

- Im Falle des Planetensystems ergibt sich eine ganz andere Rotationskurve. Ihr Aussehen wird durch die Gravitation bestimmt. Für die Kreisbahn gilt (vereinfacht im Mittelpunktssystem der Sonne):

$$F_{\text{Grav}} = F_{\text{Zentri}} \rightarrow \gamma \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} = \frac{m \cdot v^2}{r}$$

$$v = \sqrt{\frac{\gamma \cdot M}{r}} \rightarrow v \sim r^{-0,5}$$

Dieses Rotationsverhalten, das auch im 3. keplerschen Gesetz seinen Niederschlag findet, nennt man **Keplerrotation**.

Die Formel zeigt, dass mit Kenntnis der Bahngeschwindigkeit eines Planeten die Masse M der Sonne berechnet werden kann.

- **Zusatzaufgabe:**

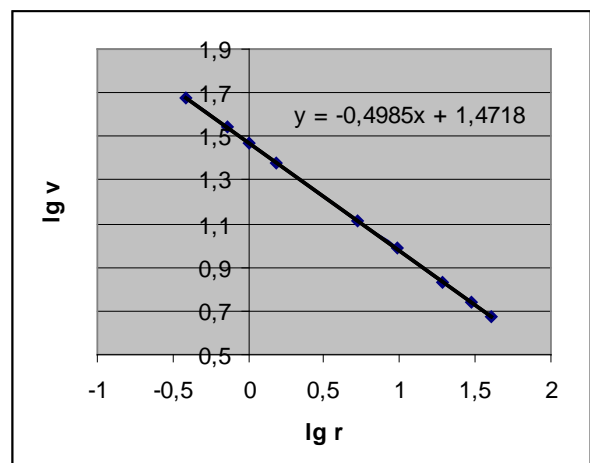
Der Werteverlauf im v - r -Diagramm erinnert an eine Hyperbel ($v \sim 1/r^m$).

Den Exponenten m kann man aus den Ergebnissen ermitteln, indem man durch Logarithmieren von v und r einen linearen Zusammenhang zwischen $\lg(v)$ und $\lg(r)$ herstellt. Der Exponent m entspricht dem Anstieg der linearen Funktion im $\lg(v)$ - $\lg(r)$ -Diagramm (nur die Zahlenwerte der physikalischen Größen finden Beachtung).

$$v \sim 1/r^m \rightarrow v = c \cdot 1/r^m \rightarrow \lg v = \lg(c \cdot 1/r^m) \rightarrow \lg v = \lg c - \lg r^m \rightarrow \lg v = -m \cdot \lg r + \lg c$$

Die erhaltene Struktur entspricht der aus der Mathematik bekannten linearen Funktion $y = -m \cdot x + n$ mit $y = \lg v$, $x = \lg r$ und $n = \lg c$.

Planet	r [AE]	$\lg r$	v [km/s]	$\lg v$
Merkur	0,39	-0,41	47,9	1,68
Venus	0,72	-0,14	35,0	1,54
Erde	1	0	29,8	1,47
Mars	1,52	0,18	24,1	1,38
Jupiter	5,20	0,72	13,1	1,11
Saturn	9,54	0,98	9,7	0,99
Uranus	19,19	1,28	6,8	0,83
Neptun	30,07	1,48	5,5	0,74
Pluto	39,48	1,60	4,7	0,67



Die dargestellte Auswertung der Planetendaten (Programm Exel, Datei **Mappe1.xls**) erbringt für den Exponenten m einen Wert von etwa -0,5 (also $v \sim 1/r^{0,5}$!!!) Die Abweichung vom Wert 0,5 ist auf die Rundung der verwendeten Daten zurückzuführen.

Aufgaben zur Keplerrotation

[\(→zurück zum Anfang\)](#)

- 1.) Wie lang wäre ein Jahr, wenn die Sonne die vierfache Masse hätte? Welche Abstände müssten die Erde und die anderen solaren Planeten haben, wenn sie bei unveränderten Umlaufzeiten um eine Sonne von vierfacher Masse kreisen würden?



- 2.) Gegeben sind die Umlaufzeit des Jupitermonds Io ($T = 1,769$ d) und der mittlere Abstand Jupiter-Io ($r = 421300$ km). Diesen Werten kann man sich übrigens durch eigene Beobachtungen mit einem Fernrohr gut annähern. Man bestimme aus dem Umlauf von Io die Masse von Jupiter.



- 3.) Aus dem Durchmesser von Saturn (ca. 120.000 km) und der Kenntnis der Dichte von Jupiter ($1,326 \text{ kg/m}^3$) könnte man die Masse von Saturn bestimmen, wenn man davon ausgehen würde, dass beide Planeten ähnlich zusammengesetzt sind. Man bestimme die Masse von Saturn auf diese Weise und vergleiche sie mit der Masse, die sich aus dem Keplerumlauf des Saturnmondes Titan (Umlaufzeit $T = 15,945$ d, mittlerer Abstand Saturn-Titan $r = 1.221.850$ km) ergibt. Das Ergebnis ist zu diskutieren!

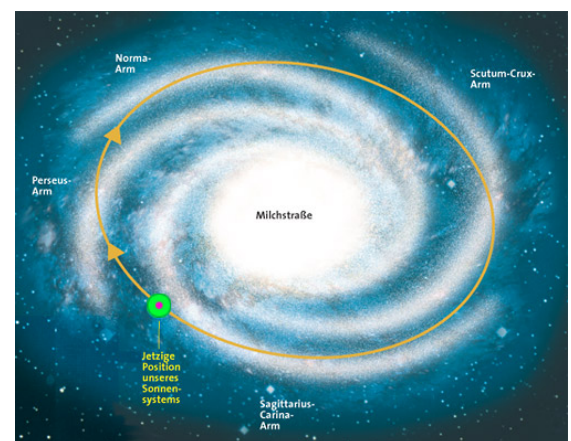


- 4.) Die Sonne läuft mit einer aus Beobachtungen abgeleiteten Geschwindigkeit von etwa 200 km/s in 8,5 kpc Entfernung um das Zentrum des Milchstraßensystems. Beobachtungen der sichtbaren Materie erbrachten, dass sich innerhalb der Sonnenbahn etwa 50 Mrd Sonnenmassen befinden.

Vergleichen Sie die aus Beobachtungen abgeleitete Umlaufgeschwindigkeit mit der, die notwendig ist, damit die Sonne auf einer Kreisbahn um die eingeschlossene Masse umläuft.

Wie lange dauert ein „galaktisches Jahr“?

Bemerkungen: Die innerhalb der Sonnenbahn eingeschlossene Masse kann als zentrale Punktmasse betrachtet werden. Die außerhalb der Sonnenbahn befindliche Masse bleibt ohne Wirkung.



Aufgaben zur Keplerrotation - Lösungen

[\(→ zurück zum Anfang\)](#)

- 1.) Wie lang wäre ein Jahr, wenn die Sonne die vierfache Masse hätte? Welche Abstände müssten die Erde und die anderen solaren Planeten haben, wenn sie bei unveränderten Umlaufzeiten um eine Sonne von vierfacher Masse kreisen würden?



Geg.: Sonnenmasse	$M_S = 1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg}$
Gravitationskonstante	$\gamma = 6,6726 \cdot 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$
siderisches Jahr (360° -Umlauf)	$T_S = 3,1558 \cdot 10^7 \text{ s}$
mittlerer Abstand Sonne-Erde	$r_S = 1 \text{ AE} = 1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}$

Ges.: andere siderische Jahreslänge T in „normalen“ siderischen Jahren

Lös.: Annahmen: Betrachtung im Mittelpunktssystem der Sonne, d. h. Vernachlässigung der Erdmasse (im 3. keplerschen Gesetz erscheint dann nur die Zentralkörpermasse), Kreisbahnlauf der Erde

$$F_{\text{Grav}} = F_{\text{Zentri}} \rightarrow \gamma \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} = \frac{m \cdot v^2}{r}$$

$$\text{Mit } v = \frac{2\pi \cdot r}{T} \text{ und } M = 4 \cdot M_S : \quad \frac{2\pi \cdot r}{T} = \sqrt{\frac{\gamma \cdot 4 \cdot M_S}{r}}$$

$$\text{Mit } r = r_S : \quad T = \sqrt{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot r_S^3}{\gamma \cdot M_S}}$$

$$T = \sqrt{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot (1,496 \cdot 10^{11} \text{ m})^3}{6,6726 \cdot 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \cdot 1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg}}} = \frac{1}{2} \cdot 3,1558 \cdot 10^7 \text{ s} = \underline{\underline{\frac{1}{2} \cdot T_S}}$$

Wenn die Sonne die vierfache Masse hätte, würde sich die Umlaufzeit der Erde halbieren.

$$\text{Mit } T = T_S : \quad r = \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{\frac{\gamma \cdot M_S \cdot T_S^2}{4\pi^2}}$$

$$r = \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{\frac{6,6726 \cdot 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \cdot 1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg} \cdot (3,1558 \cdot 10^7 \text{ s})^2}{4\pi^2}}$$

$$\approx \sqrt[3]{4} \cdot 1,4959 \cdot 10^{11} \text{ m} \approx \underline{\underline{1,6 \cdot r_S}}$$

Bei gleich bleibenden Umlaufzeiten müssten sich die Abstände der Planeten um den Faktor von ca. 1,6 vergrößern.

- 2.) Gegeben sind die Umlaufzeit des Jupitermonds Io ($T=1,769 \text{ d}$) und der mittlere Abstand Jupiter-Io ($r=21300 \text{ km}$). Diesen Werten kann man sich übrigens durch eigene Beobachtungen mit einem Fernrohr gut annähern. Man bestimme aus dem Umlauf von Io die Masse von Jupiter.



Geg.: Siderische Umlaufzeit von Io (360°-Umlauf) $T = 1,769 \text{ d}$
 mittlerer Abstand Jupiter-Io $r = 421300 \text{ km}$
 Gravitationskonstante $\gamma = 6,6726 \cdot 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$

Ges.: Jupitermasse M

Lös.: Annahmen: Betrachtung im Mittelpunktssystem von Jupiter,
 d. h. Vernachlässigung der Masse von Io, Kreisbahnlauf von Io

$$F_{\text{Grav}} = F_{\text{Zentri}} \rightarrow \gamma \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} = \frac{m \cdot v^2}{r}$$

Mit $v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$ erhält man das 3. keplersche Gesetz $\frac{\gamma}{4\pi^2} \cdot M = \frac{r^3}{T^2}$.

$$M = \frac{r^3}{T^2} \cdot \frac{4\pi^2}{\gamma} = \frac{(4,213 \cdot 10^8 \text{ m})^3}{(1,769 \cdot 86400 \text{ s})^2} \cdot \frac{4\pi^2}{6,6726 \cdot 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}} \approx \underline{\underline{1,9 \cdot 10^{27} \text{ kg}}}$$

3.) Aus dem Durchmesser von Saturn (ca. 120.000 km) und der Kenntnis der Dichte von Jupiter (1,326 kg/m³) könnte man die Masse von Saturn bestimmen, wenn man davon ausgehen würde, dass beide Planeten ähnlich zusammengesetzt sind. Man bestimme die Masse von Saturn auf diese Weise und vergleiche sie mit der Masse, die sich aus dem Keplerumlauf des Saturnmondes Titan (Umlaufzeit $T=15,945\text{d}$, mittlerer Abstand Saturn-Titan $r=1.221.850 \text{ km}$) ergibt. Das Ergebnis ist zu diskutieren!



Geg.: mittlere Dichte von Jupiter $\rho = 1,326 \text{ kg m}^{-3}$
 Radius von Saturn $R = 60.000 \text{ km}$
 Siderische Umlaufzeit von Titan $T = 15,945 \text{ d}$
 mittlerer Abstand Saturn-Titan $r = 1.221.850 \text{ km}$
 Gravitationskonstante $\gamma = 6,6726 \cdot 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$

Ges.: Saturnmassen M_{Dichte} und M_{Kepler}

Lös.: Annahmen: Saturn als Kugel, Betrachtung im Mittelpunktssystem von Saturn,
 d. h. Vernachlässigung der Masse von Titan, Kreisbahnlauf von Titan

$$M_{\text{Dichte}} = \frac{4}{3} \pi \cdot R^3 \cdot \rho = \frac{4}{3} \pi \cdot (60 \cdot 10^6)^3 \cdot 1,326 \text{ kg m}^{-3} \approx \underline{\underline{1,2 \cdot 10^{27} \text{ kg}}}$$

$$M_{\text{Kepler}} = \frac{r^3}{T^2} \cdot \frac{4\pi^2}{\gamma} = \frac{(1,22185 \cdot 10^9 \text{ m})^3}{(15,945 \cdot 86400 \text{ s})^2} \cdot \frac{4\pi^2}{6,6726 \cdot 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}} \approx \underline{\underline{6 \cdot 10^{26} \text{ kg}}}$$

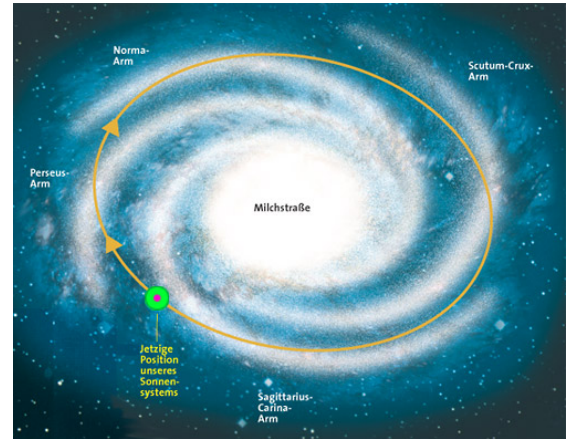
Die Bestimmung der Masse von Saturn, basierend auf der Annahme einer Dichte, die der von Jupiter entspricht, führt zu einem um den Faktor 2 falschen Ergebnis. Die Keplerbewegung von Titan zeigt die wahre Masse an.

4.) Die Sonne läuft mit einer aus Beobachtungen abgeleiteten Geschwindigkeit von etwa 200 km/s in 8,5 kpc Entfernung um das Zentrum des Milchstraßensystems. Beobachtungen der sichtbaren Materie erbrachten, dass sich innerhalb der Sonnenbahn etwa 50 Mrd Sonnenmassen befinden.

Vergleichen Sie die aus Beobachtungen abgeleitete Umlaufgeschwindigkeit mit der, die notwendig ist, damit die Sonne auf einer Kreisbahn um die eingeschlossene Masse umläuft.

Wie lange dauert ein „galaktisches Jahr“?

Bemerkungen: Die innerhalb der Sonnenbahn eingeschlossene Masse kann als zentrale Punktmasse betrachtet werden. Die außerhalb der Sonnenbahn befindliche Masse bleibt ohne Wirkung.



Geg.: Radius Sonnenbahn	$r = 8,5 \text{ kpc}$
Bahngeschwindigkeit der Sonne (beobachtet)	$v_{\text{beob}} = 200 \text{ km s}^{-1}$
Sichtbare Masse innerhalb der Sonnenbahn	$M = 50 \cdot 10^9 M_{\text{S}}$
Gravitationskonstante	$\gamma = 6,6726 \cdot 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$
Umrechnung	$1 \text{ pc} = 3,086 \cdot 10^{16} \text{ m}$
Umrechnung	$1 \text{ a} = 3,1557 \cdot 10^7 \text{ s}$
Sonnenmasse	$M_{\text{S}} = 1,9896 \cdot 10^{30} \text{ kg}$

Ges.: Bahngeschwindigkeit der Sonne (theoretisch entsprechend der sichtbaren Masse) v_{theo}

Lös.: Annahmen: Kreisbahnumlauf der Sonne

$$v_{\text{theo}} = \sqrt{\frac{\gamma \cdot M}{r}} = \sqrt{\frac{6,6726 \cdot 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \cdot 50 \cdot 10^9 \cdot 1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg}}{8,5 \cdot 10^3 \cdot 3,086 \cdot 10^{16} \text{ m}}} \approx \underline{\underline{160 \text{ km/s.}}}$$

Wenn allein die sichtbare Masse vorhanden wäre, so müsste die Sonne mit einer Bahngeschwindigkeit von ca.160 km/s umlaufen. Die höher beobachtete Bahngeschwindigkeit von etwa 200 km/s lässt darauf schließen, dass außer der sichtbaren Materie noch unsichtbare Dunkle Materie vorhanden sein muss.

$$v_{\text{beob}} = \frac{2\pi \cdot r}{T}$$

$$\rightarrow T = \frac{2\pi \cdot r}{v_{\text{beob}}} = \frac{2\pi \cdot 8,5 \cdot 10^3 \cdot 3,086 \cdot 10^{16} \text{ m}}{2 \cdot 10^5 \text{ m s}^{-1}} \approx 8,24 \cdot 10^{15} \text{ s} \approx \underline{\underline{260 \cdot 10^6 \text{ a.}}}$$

Die Sonne benötigt für einen Umlauf um das galaktische Zentrum etwa 260 Mio Jahre.

Von der Rotationskurve des Planetensystems zur Rotationskurve eines Sternsystems

Bei der Betrachtung der **Rotation des Planetensystems** muss für alle umlaufenden Planeten stets nur die Sonne als Zentralmasse angenommen werden (gilt in sehr guter Näherung). Für die Umlaufgeschwindigkeit eines Planeten um die Sonne gilt dann

$$v = \sqrt{\frac{\gamma \cdot M}{r}}, \quad M = \text{konstant} \quad \rightarrow \quad v \sim \left(\frac{1}{r}\right)^{0,5}.$$

Im Falle der **Rotation eines Sternsystems** wie z. B. des Milchstraßensystems ist die zu berücksichtigende Zentralmasse jedoch nicht immer gleich. Ihre Größe bestimmt sich aus der Gesamtmasse der Materie innerhalb der jeweils betrachteten Umlaufbahn eines Sterns. Für die Umlaufgeschwindigkeit eines Sterns in einer Galaxie gilt also

$$v = \sqrt{\frac{\gamma \cdot M}{r}}, \quad M = M(r) \quad \rightarrow \quad v \sim \left(\frac{M(r)}{r}\right)^{0,5}.$$

Während die den Formeln zugrundeliegende **Punktmassenannahme** für das Planetensystem sehr gut angenähert ist, so scheint sie für das Sternsystem nicht zu gelten. Auf Grundlage einer ersten Aussage, die dem Schüler zunächst ohne Beweis mitgeteilt wird, lässt sich zeigen, dass die Punktmassenannahme auch für das Sternsystem in guter Näherung möglich ist (Masse innerhalb der Umlaufbahn als Punktmasse und umlaufender Stern als Punktmasse). Eine zweite Aussage ist dann noch nötig, um Klarheit über die Größe dieser Punktmasse und den Einfluss der übrigen Masse zu erlangen.

Es gilt:

1. Die Kraftwirkung einer kugelsymmetrischen Masseverteilung ist dieselbe wie die eines Massenpunktes der Masse M , d. h. die innerhalb der Umlaufbahn eines Sterns befindliche Massekugel kann man sich im Zentrum des Sternsystems konzentriert denken.
2. Im Innern einer Hohlkugel wirken keine Kräfte, d. h. die außerhalb der Umlaufbahn eines Sterns befindliche Masse im Sternsystem bleibt ohne Einfluss.

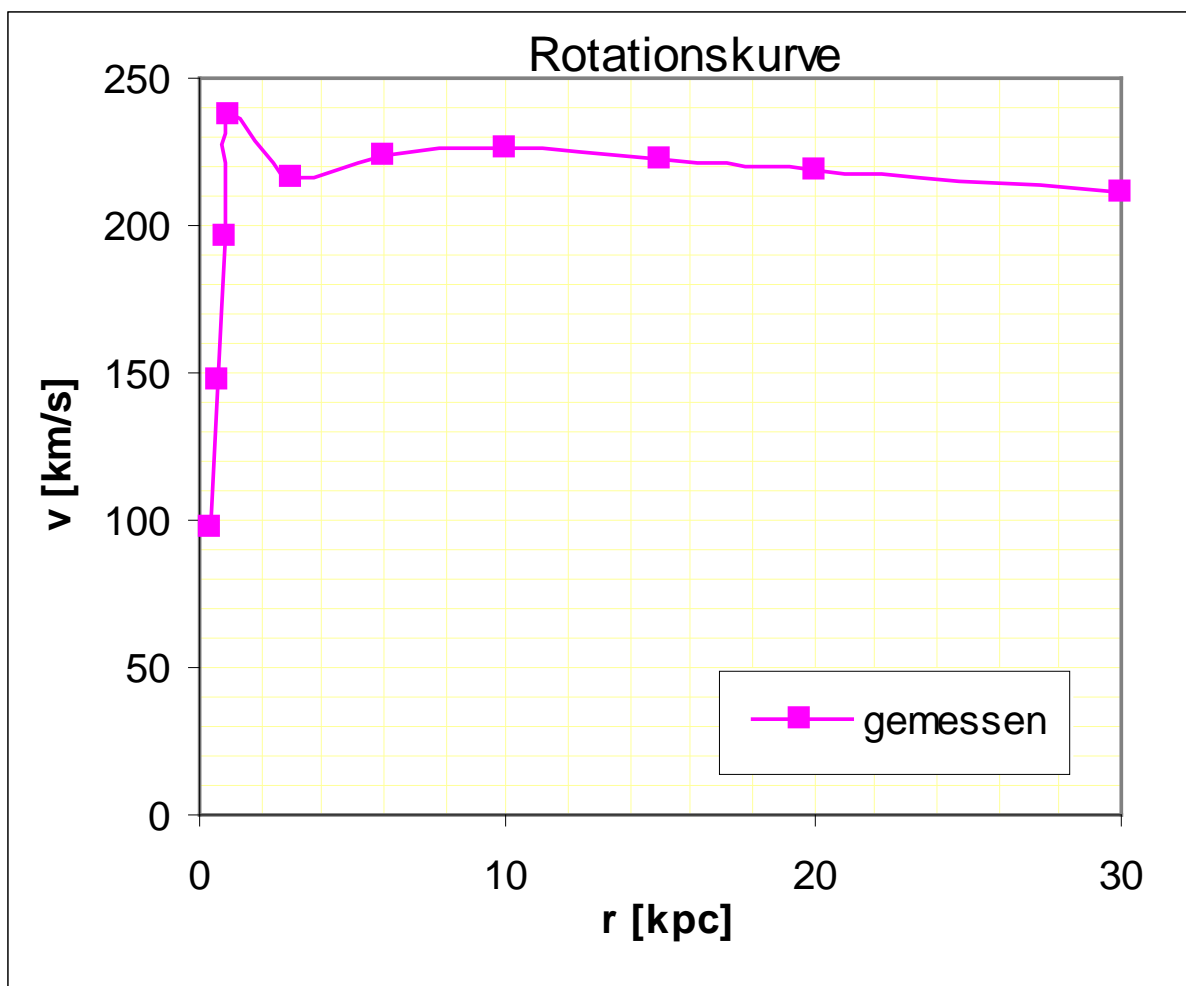
Aufgabe - Rotierende Galaxie

(→ zurück zum Anfang)

Für ein Sternsystem wurde aus der Helligkeitsverteilung auf die Verteilung der beobachtbaren Masse geschlossen. (Dazu fand ein gegebenes Verhältnis zwischen Leuchtkraft und Masse Anwendung.) In der nebenstehenden Tabelle sind die Massen $M(r)$, auf die jeweils innerhalb der Radien r im Sternsystem geschlossen wurde, aufgeführt. Man berechne die theoretischen Umlaufgeschwindigkeiten $v(r)$, die bei den entsprechenden Massen und Radien nötig wären, damit die Sterne stabil auf Kreisbahnen im Sternsystem umlaufen. Die theoretische Rotationskurve ist in das gegebene Diagramm mit der gemessenen Rotationskurve einzuzeichnen und zu kommentieren. Man diskutiere die Diskrepanz zwischen den Kurven.

r [kpc]	$M(r)$ [kg]	berechnet $v(r)$ [km/s]	gemessen $v(r)$ [km/s]
0,4	$1,8 \cdot 10^{39}$		98
0,6	$6,0 \cdot 10^{39}$		147
0,8	$14,2 \cdot 10^{39}$		196
1	$27,8 \cdot 10^{39}$		238
3	$58,3 \cdot 10^{39}$		216
6	$89,9 \cdot 10^{39}$		224
10	$111,1 \cdot 10^{39}$		226
15	$132,7 \cdot 10^{39}$		223
20	$137,7 \cdot 10^{39}$		219
30	$138,7 \cdot 10^{39}$		211

Zusatzaufgabe: Das Verhältnis der Gesamtmasse (sichtbare + Dunkle Materie) zur alleinigen Masse der Dunklen Materie ist zu bestimmen und mit dem in Abb. 1 gezeigten Wert zu vergleichen.



Verschiedene Rotationskurven für Galaxien, die aus Radialgeschwindigkeitsmessungen gewonnen wurden, können unter <http://www.ioa.s.u-tokyo.ac.jp/~sofue/rotation/fig2.htm> abgerufen werden.

Lösung zur Aufgabe - Rotierende Galaxie

(→ zurück zum Anfang)

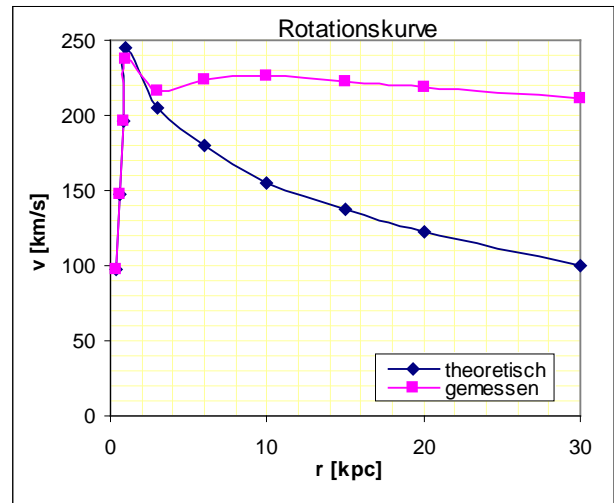
Geg.: Gravitationskonstante
Umrechnung
Sonnenmasse

$$\begin{aligned}\gamma &= 6,6726 \cdot 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \\ 1 \text{ pc} &= 3,086 \cdot 10^{16} \text{ m} \\ M_{\text{S}} &= 1,9896 \cdot 10^{30} \text{ kg}\end{aligned}$$

Ges.: theoretische Bahngeschwindigkeiten $v(r)$ der Sterne bei r

Lös.:
$$v(r) = \sqrt{\frac{\gamma \cdot M(r)}{r}}$$

r [kpc]	$M(r)$ [kg]	berechnet $v(r)$ [km/s]	gemessen $v(r)$ [km/s]
0,4	$1,8 \cdot 10^{39}$	98	98
0,6	$6,0 \cdot 10^{39}$	147	147
0,8	$14,2 \cdot 10^{39}$	196	196
1	$27,8 \cdot 10^{39}$	245	238
3	$58,3 \cdot 10^{39}$	205	216
6	$89,9 \cdot 10^{39}$	180	224
10	$111,1 \cdot 10^{39}$	155	226
15	$132,7 \cdot 10^{39}$	138	223
20	$137,7 \cdot 10^{39}$	122	219
30	$138,7 \cdot 10^{39}$	100	211



Das fertige Diagramm findet sich auch in der Datei **Mappe2.xls** (Programm Exel). Bis zu einem Zentrumsabstand von 1 kpc führt die Galaxie eine starre Rotation durch. Weiter außerhalb ergibt sich theoretisch ein Geschwindigkeitsabfall, der jedoch nicht gemessen wird. Die gemessene Rotationsgeschwindigkeit bleibt nahezu konstant, d. h. das Verhältnis $M(r)/r$ muss nahezu konstant bleiben. Daraus ergibt sich die Notwendigkeit einer zusätzlich in der Galaxie vorhandenen Masse M_{Dunkel} , die (bisher) unsichtbar bleibt (Dunkle Materie).

$$v(r) = \sqrt{\frac{\gamma \cdot [M_{\text{sichtbar}}(r) + M_{\text{dunkel}}(r)]}{r}}$$

Das Verhältnis der Gesamtmasse (sichtbare und Dunkle Materie) zur Masse der Dunklen Materie soll für $r=30\text{kpc}$ bestimmt und mit dem in Abb. 1 gezeigten Diagrammwert verglichen werden.

$$\begin{aligned}M_{\text{sichtbar}}(r) + M_{\text{dunkel}}(r) &= v^2 \cdot \frac{r}{\gamma} = \\ \left(211 \cdot 10^3 \text{ m s}^{-1}\right)^2 \cdot \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 3,086 \cdot 10^{16} \text{ m}}{6,6726 \cdot 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}} &\approx 6,2 \cdot 10^{41} \text{ kg.} \\ \frac{M_{\text{sichtbar}}(r)}{M_{\text{sichtbar}}(r) + M_{\text{dunkel}}(r)} &= \frac{138,7 \cdot 10^{39} \text{ kg}}{6,2 \cdot 10^{41} \text{ kg}} \approx \underline{\underline{0,22.}}\end{aligned}$$

Aus Abb. 1 lässt sich für das Massenverhältnis ein Wert von $4/21 \approx 0,19$ ablesen.

Spiralarmbildung – vom Astrobild über ein Freihandexperiment hin zu Theorien

Etwa 30% aller Galaxien zeigen eine großräumige Spiralstruktur (siehe auch **Astrobild** in Abb. 2, Datei **m51.jpg**). Auch das Milchstraßensystem ist eine Spiralgalaxie.

Galaxien rotieren nicht starr, sondern differentiell, d. h. die Umlaufzeiten der Sterne sind bei verschiedenen Radien unterschiedlich. Die richtige Vorstellung von der Wirkung der differentiellen Rotation in einem zumindest „feinkörnigen“ Medium kann man mit Hilfe eines **Freihandexperiments** vermitteln, welches auch als **Hausexperiment** von jedem Schüler nachvollziehbar ist. Für das Experiment wird eine Schale mit Wasser, welches durch Rühren in Drehung versetzt wird, benötigt (zur Demonstration Glasschale auf Overheadprojektor). Durch die Reibung der Wasserteilchen mit den Wänden der Schale wird der Umlauf der Teilchen von außen her gebremst. Es entsteht ein Gefälle in der Winkelgeschwindigkeit von außen nach innen. Der Schüler bekommt damit ein differentiell rotierendes Objekt zu Gesicht. Zur besseren Veranschaulichung der differentiellen Rotation kann man einen leicht eingefetteten Zwirnfaden gerade und mittig auf die Wasseroberfläche setzen. Der Faden wird spiralförmig verformt werden (siehe Abb. 2).

Das Experiment bietet verschiedene Anknüpfungspunkte. So können Zusammenhänge zu anderen Naturphänomenen, die auch eine differentielle Rotation aufweisen, wie z. B. Wirbelerscheinungen in Wasser und Luft, hergestellt werden. Man könnte dann eine Merkstruktur aufbauen, die vom Wasserwirbel und seiner differentiellen Rotation über das englische Wort für Wasserwirbel (whirlpool) bis zur Galaxie M51 mit dem Trivialnamen „Whirlpool“ reicht. Ebenso ließe sich der Begriff der Hydrodynamik, die ein physikalisches Hilfsmittel zur Untersuchung von Galaxien darstellt, etwas eingängiger einführen.



Abbildung 2: Spiralarme in einer Galaxienscheibe - Beobachtung und Experiment. Links: HST-Aufnahme von der Spiralgalaxie M51, die nahezu in Draufsicht auf die Scheibenebene beobachtet werden kann. Der Trivialname von M51 („Whirlpool“) erinnert an ein irdisches Phänomen mit differentieller Rotation. ©: N. Scoville (Caltech), T. Rector (U. Alaska, NOAO) et al., Hubble Heritage Team, NASA, https://apod.nasa.gov/apod/image/1302/m51dust_hubble_1645.jpg. Die mit den Spiralarmen verbundenen Sternentstehungsgebiete werden deutlich durch Dunkelwolken und die rötlichen HII-Gebiete. Rechts: Modellexperiment zur Spiralbildung durch differentielle Rotation in einer rotierenden Flüssigkeit.

Die differentielle Rotation der galaktischen Scheibe ist der wesentliche Grund für die Bildung spiralförmiger Strukturen aus eher klumpigen Strukturen. In einem Folgeexperiment könnte man dies zeigen, indem man anstatt des Fadens einige Tintentropfen oder Pfefferteilchenansammlungen aufbringt und deren „Spiralisierung“ beobachtet. Beim Experiment lässt sich auch beobachten, dass die Lebensdauer der Spiralstrukturen in der Größenordnung der Umlaufzeit liegt. Damit ist die Motivation zur Einführung zweier Theorien gegeben, die einen Mechanismus zur Wiederherstellung bzw. Neuerzeugung von Spiralstrukturen beschreiben, weil diese ja häufig beobachtbar sind und damit sehr langlebig sein müssen. Der Schüler wird damit an die vorderste Front der Forschung geführt, wobei er erkennen kann, dass wissenschaftliche Erkenntnisse oft aus konkurrierenden Theorien entstehen.

Bei den Theorien handelt es sich um die **Dichtewellentheorie** und um die **Theorie der stochastischen Sternentstehung**.

Nach der Dichtewellentheorie kann in der galaktischen Scheibe eine spiralförmige Dichtewellenstruktur angeregt werden, die starr mit konstanter Winkelgeschwindigkeit umläuft. Der Umlauf der Dichtewelle ist jedoch nicht mit dem der Scheibenmasse gleichzusetzen. Man kann hier an die Kenntnis der Entkopplung von Wellen- und Materialbewegung (z. B. beim Schall) anknüpfen. Die stetige Wiederauffrischung der Spiralstruktur kommt nun dadurch zustande, dass die durch die Dichtewelle (die langsamer als die Sterne umläuft) hindurch laufende Scheibenmasse (Sterne, interstellare Materie: ISM) in dieser verlangsamt wird und sich damit verdichtet. Die Spirale ist also immer an neue Scheibenmaterie gebunden. Die Weiterbewegung der Verdichtung kann man mit derjenigen eines möglichen Staus auf der gut gefüllten Autobahn vergleichen, der dadurch entsteht, dass ein Auto kurzzeitig sehr langsam fährt. Hinterherkommende Autos fahren auf und werden langsamer. Wenn das vordere Auto dann wieder schneller fährt, dann existiert der Stau bei den folgenden Autos.

Durch die Verdichtung der ISM ist eine Anregung der Sternentstehung (so genannte induzierte Sternentstehung) zu erwarten, was durch die Beobachtungen bestätigt wird (siehe Abb. 2).

Auch nach der Theorie der stochastischen Sternentstehung kann ein direkter örtlicher Zusammenhang zwischen Sternentstehungsgebieten und Spiralarmstrukturen hergestellt werden. Nur entstehen diesmal Sternentstehungsfronten aus induzierter Sternentstehung aufgrund der „Schneepflugwirkung“ von Stoßfronten explodierender Sterne in Sternentstehungsgebieten. Die fortschreitenden Sternentstehungsfronten werden durch die differentielle Rotation zu Spiralen auseinandergezogen.

Die beiden Theorien zur dauerhaften Spiralarmentstehung können anknüpfend an die Vorstellung des zuvor beschriebenen Modellexperiments für Schüler etwas nahbarer werden. Dazu beginne man gedanklich mit dem Bild der gleichmäßig mit Pfefferteilchen belegten Wasseroberfläche, welches der gleichmäßigen Verteilung der Scheibenmasse entsprechen soll. Nach der Dichtewellentheorie würden die umlaufenden Pfefferteilchen im Gebiet eines ins Wasser gehaltenen spiralförmigen Kammes, der die Dichtewelle repräsentieren soll, im Umlauf verlangsamt werden und sich verdichten. Nach der Theorie der stochastischen Sternentstehung müssten sich die Pfefferteilchen an zufälligen Positionen konzentrieren. Die Ansammlung würde dann teilweise fortschreitend vor sich gehen, teilweise würden Pfefferteilchen aber auch wieder weggestoßen werden. Gleichzeitig würden die Pfefferteilchenkonzentrationen zu Spiralen auseinander gezogen.

Galaktische Rotation und Fixsternbewegung – Fachliches und Fachübergreifendes

Außerhalb des Kernbereiches des Milchstraßensystems bewegen sich die Sterne nicht wie auf einem starren Rad, wo alle Positionen zueinander gleichbleiben. Ihr Verhalten lässt sich mit dem von Pfefferteilchen vergleichen, die auf der Oberfläche der in einer Tasse rotierenden Flüssigkeit schwimmen. Man spricht dabei von differentieller Rotation (siehe **Versuch** zuvor). Die Sterne verändern dabei langsam ihre Positionen zueinander.

Als irdischer Beobachter nimmt man die Raumbewegung der Sterne in zwei Komponenten wahr. Die eine ist die Radialbewegung und die andere ist die an die Himmelskugel projizierte Tangentialbewegung. Letztere wird als Eigenbewegung bezeichnet, wobei eine Winkelgeschwindigkeit gemeint ist. (Es sei vermerkt, dass die Eigenbewegung der Sterne nicht allein durch ihren Umlauf um das galaktische Zentrum herrührt.) Die Eigenbewegung von Sternen wurde erstmals 1718 von Edmund Halley festgestellt, indem er seine Positionsmessungen mit denen von Hipparcos (ca. 300 v. u. Z.) verglich.

Durch die Feststellung der Eigenbewegung wird der Begriff Fixstern relativiert. Sternbilder haben also nur eine begrenzte „Haltbarkeit“. Es taucht die interessante Frage auf, wie die Sternbilder für unsere frühen Vorfahren erschienen und wie sie für die Nachkommen in ferner Zukunft aussehen werden. Die Antwort kann der Schüler mit Hilfe einer **Sternkarte und etwas Grafik mit Vektoren** selbst erlangen (siehe folgendes **Arbeitsblatt**).

Today + 50,000 years of Proper Motion

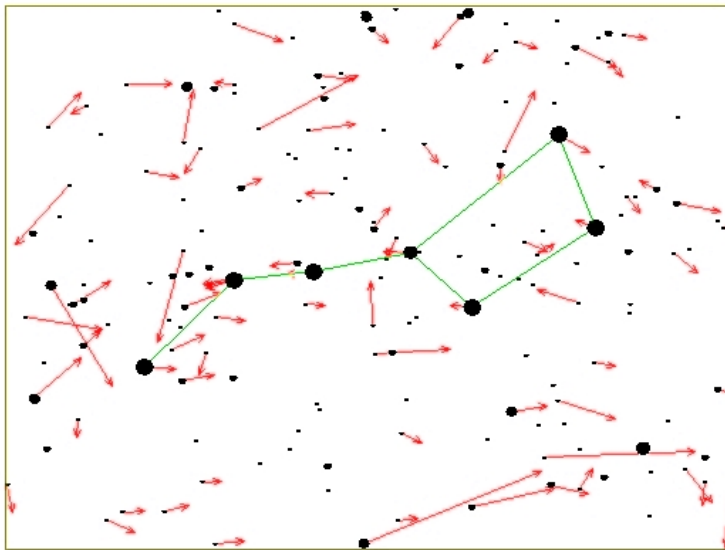


Abbildung 3: Sterne des Großen Wagen mit Pfeilen, die die Eigenbewegung der Sterne in den nächsten 50.000 Jahren andeuten (Quelle: http://www-astronomy.mps.ohio-state.edu/~pogge/Ast162/Unit1/uma_50K.gif).

Abb. 3 (Datei **uma_50K.gif**) zeigt die Region der Sternkonstellation des Großen Wagen mit den aktuellen Sternpositionen und Eigenbewegungspfeilen, die die Ortsveränderung in 50.000 Jahren anzeigen. Bestimmt man die Sternpositionen für die gegebene Region in vielen Zeitschritten, so kann man die für die jeweiligen Schritte erhaltenen Bilder zu einer Animation aneinanderfügen. Dies kann eine **Aufgabe für den Informatikunterricht** sein. Die dazu nötigen Eingabewerte sind in der Datendatei **UMa.txt** (Quelle: Prof. Richard W. Pogge, Department of Astronomy, Ohio State University) beigefügt (die Sternpositionen und die Komponenten der Eigenbewegung sind dabei in kartesischen Koordinaten mit dem

Ursprung im Zentrum des Großen Wagen gegeben).

Eine bereits fertige **Zeitrafferanimation** der Eigenbewegung der Sterne in der Region der Sternkonstellation des Großen Wagen liegt mit der Datei **uma.mpg** für einen Zeitraum von 200.000 Jahren vor (Quelle: <http://www-astronomy.mps.ohio-state.edu/~pogge/Ast162/Unit1/motions.html> , Copyright © Richard W. Pogge).

Mit der Audiodatei **marr9_02.wav** (Quelle: [Do constellations ever break apart or change?](http://spaceplace.nasa.gov/en/kids/phonedrmarc/index.shtml#stars), Space Place outreach program: <http://spaceplace.nasa.gov/en/kids/>) bietet sich eine Möglichkeit, die astronomische Thematik zur Veränderung der Sternbilder mit einer **Hörübung in englischer Sprache** zu verbinden (Internetseite mit geschriebenem Text in Datei **SpacePlace.pdf**).

Arbeitsblatt: Sternbilder im Wandel

[\(→zurück zum Anfang\)](#)

Wie werden der Große Wagen (Teil des Sternbilds Ursa Major) oder das „Himmels-W“ (Teil des Sternbilds Cassiopeia) in 100.000 Jahren erscheinen?

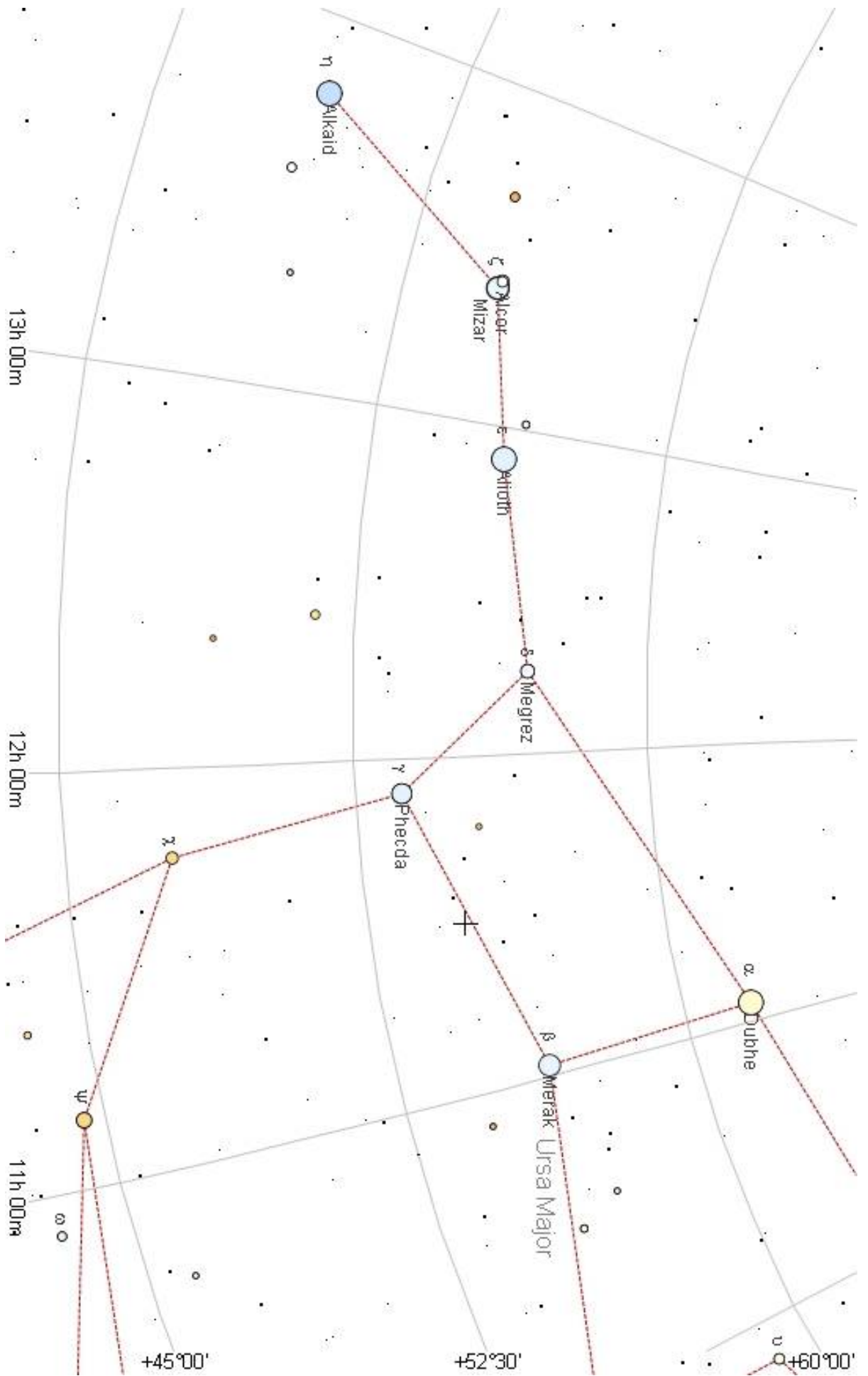
Man bestimme zunächst die Änderungen der Äquatorkoordinaten der Sterne $\Delta\alpha$ und $\Delta\delta$, die sich aufgrund ihrer entsprechenden Eigenbewegungskomponenten μ_α und μ_δ in 100.000 Jahren ergeben (man beachte die Einheiten).

Sterne im Sternbild Ursa Major	μ_α [s/a]	μ_δ ["/a]	$\Delta\alpha$ [h] (in 100.000 a)	$\Delta\delta$ [°] (in 100.000 a)
α UMa / Dubhe (1,8)	-0,0167	-0,066		
β UMa / Merak (2,4)	+0,0099	+0,034		
γ UMa / Phecda (2,4)	+0,0107	+0,012		
δ UMa / Megrez (3,3)	+0,0127	+0,009		
ϵ UMa / Alioth (1,8)	+0,0133	-0,006		
ζ UMa / Mizar (2,3)	+0,0141	-0,020		
η UMa / Alkaid (1,9)	-0,0125	-0,011		
UMa / Alkor (4,2)	+0,0135	-0,009		

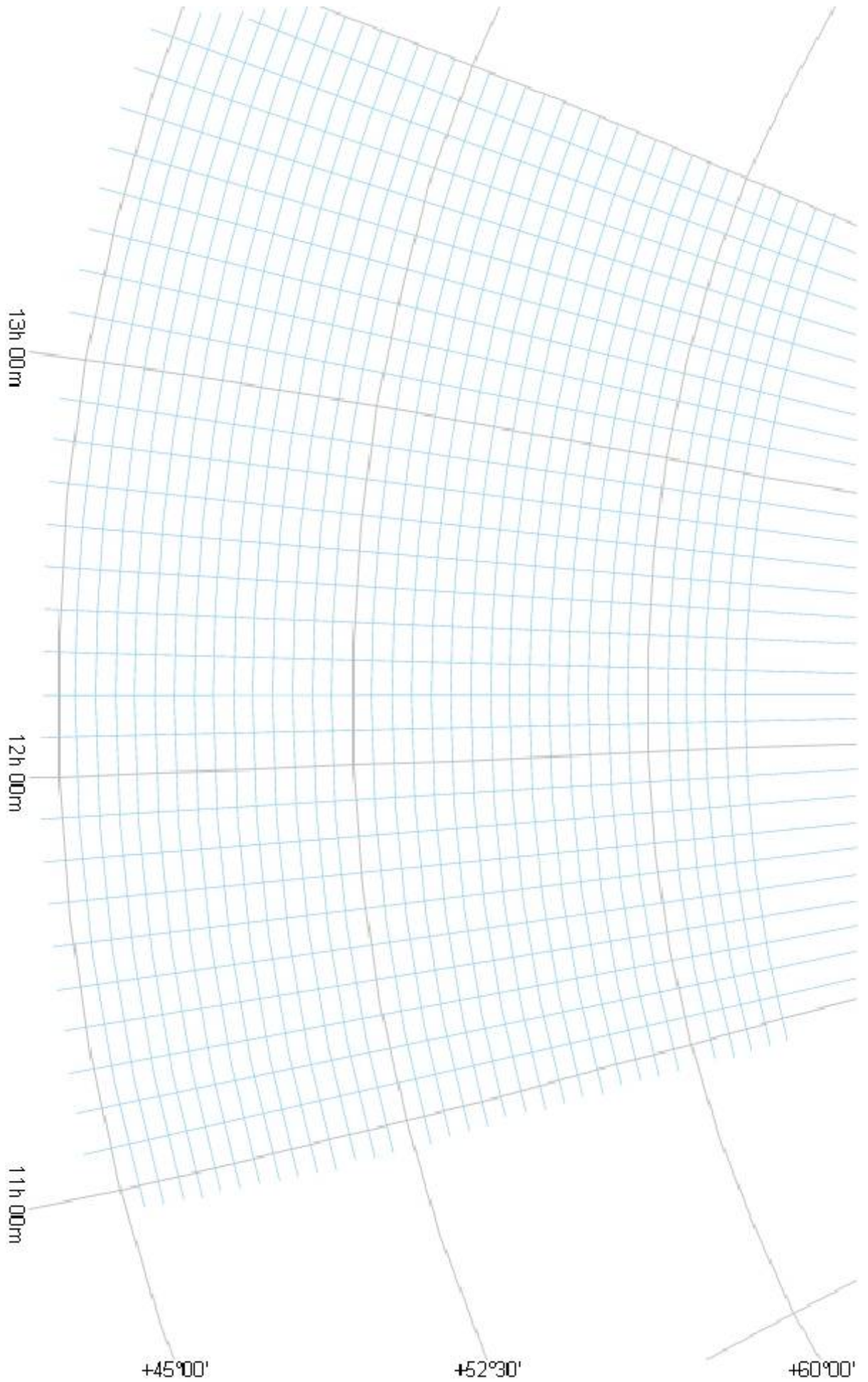
Sterne im Sternbild Cassiopeia	μ_α [s/a]	μ_δ ["/a]	$\Delta\alpha$ [min] (in 100.000 a)	$\Delta\delta$ [°] (in 100.000 a)
α Cas / Schedar (2,2)	+0,0064	-0,032		
β Cas / Caph (2,3)	+0,0683	-0,181		
γ Cas / Navi (1,6)	+0,0035	-0,005		
δ Cas / Ruchbah (2,7)	+0,0399	-0,051		
ϵ Cas (3,4)	+0,0048	-0,021		

Komponenten der Eigenbewegung von markanten Sternen, die die Figürlichkeit der Sternkonfiguration des Großen Wagen im Sternbild Ursa Major und der Sternkonfiguration des „Himmels-W“ im Sternbild Cassiopeia ausmachen. Die in der Tabelle gegebenen Werte stammen aus dem PPM-Katalog (Positions and Proper Motions, Quelle: <http://vizier.cfa.harvard.edu/viz-bin/VizieR?-source=I/146/>).

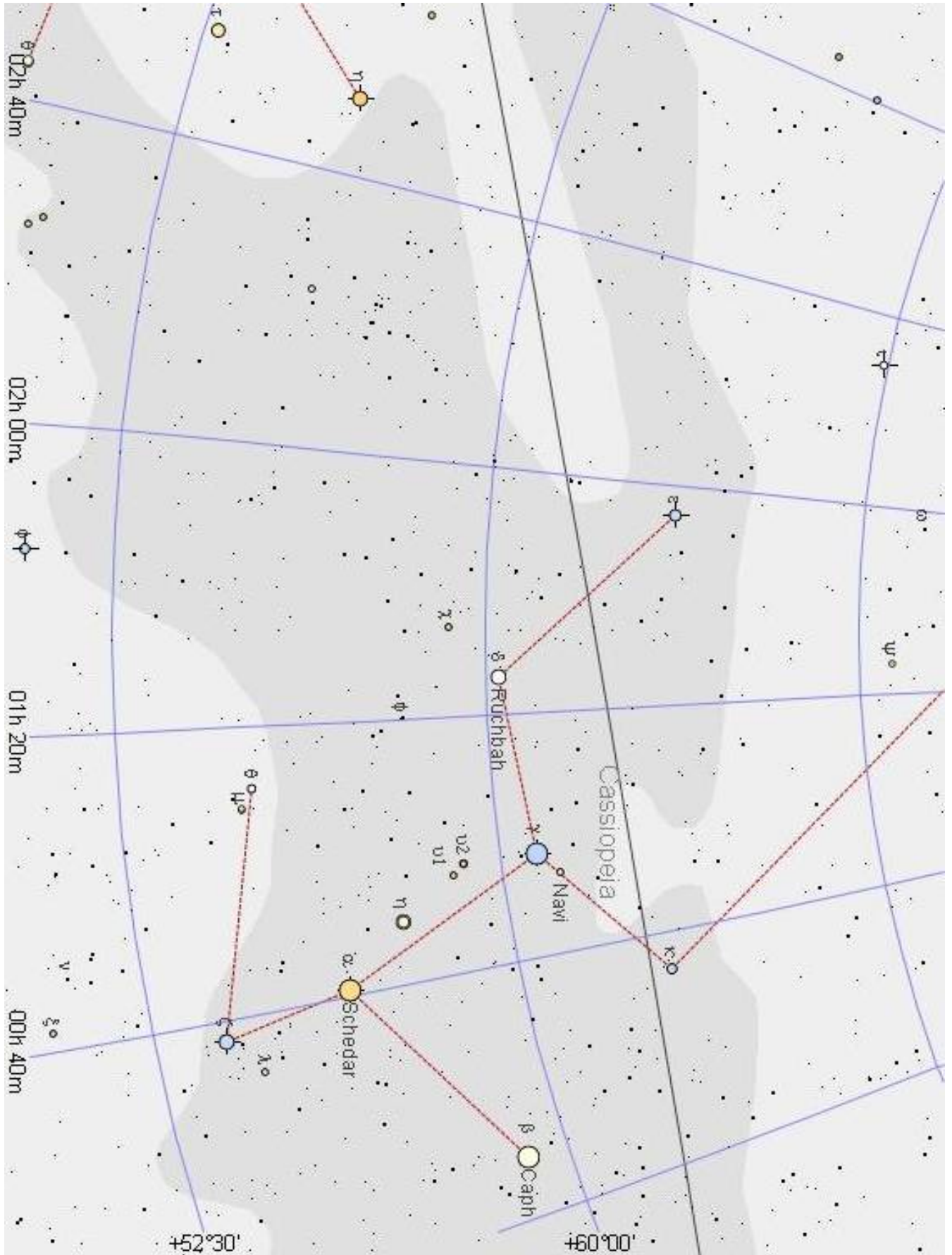
Die erhaltenen Änderungen der Äquatorkoordinaten der Sterne $\Delta\alpha$ und $\Delta\delta$ sind anschließend in die gegebenen Sternkarten in Form von Vektoren einzuzeichnen. Man beachte dabei, dass das Netz der Äquatorkoordinaten durch die Projektion von der Himmelskugel in die Sternkarte verzerrt erscheint. Die Winkelabstände auf der Sternkarte sind deshalb nicht überall gleich. Des Weiteren muss der Vektor in Richtung der α -Koordinaten krummlinig (den Koordinatenlinien folgend) aufgetragen werden. Zur Erleichterung des Einzeichnens der Vektoren können die mitgegebenen Koordinatennetze (z. B. als Folien) genutzt werden. Der Endpunkt der Eigenbewegung nach 100.000 Jahren ergibt sich dann (als Vektor) aus den beiden Vektorkomponenten in Richtung der Rektaszension α und der Deklination δ .



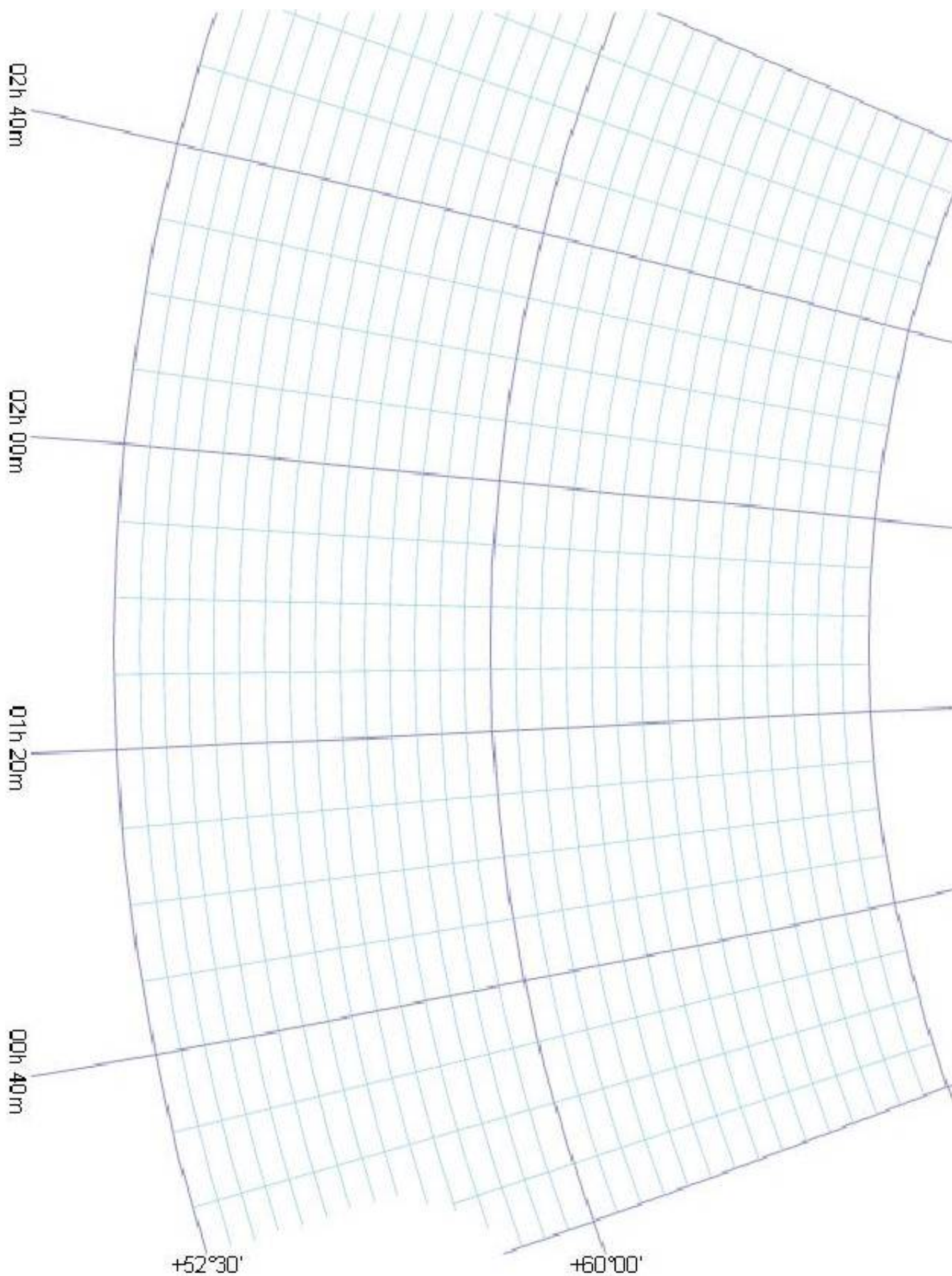
Sternkarte der Sternkonstellation des Großen Wagen im Sternbild Ursa Major (Quelle: TheSky6).



Verfeinertes Äquatorkoordinatennetz zur Sternkarte mit der Sternkonstellation des Großen Wagen.



Sternkarte mit der Sternkonstellation des „Himmels-W“ im Sternbild Cassiopeia (Quelle: TheSky6). Cassiopeia liegt im Gebiet der Milchstraße, die schattiert dargestellt ist. Der galaktische Äquator erscheint als Linie im Milchstraßenband.



Verfeinertes Äquatorkoordinatennetz zur Sternkarte mit der Sternkonstellation des „Himmels-W“.

Arbeitsblatt: Sternbilder im Wandel – Ergebnisse

[\(→zurück zum Anfang\)](#)

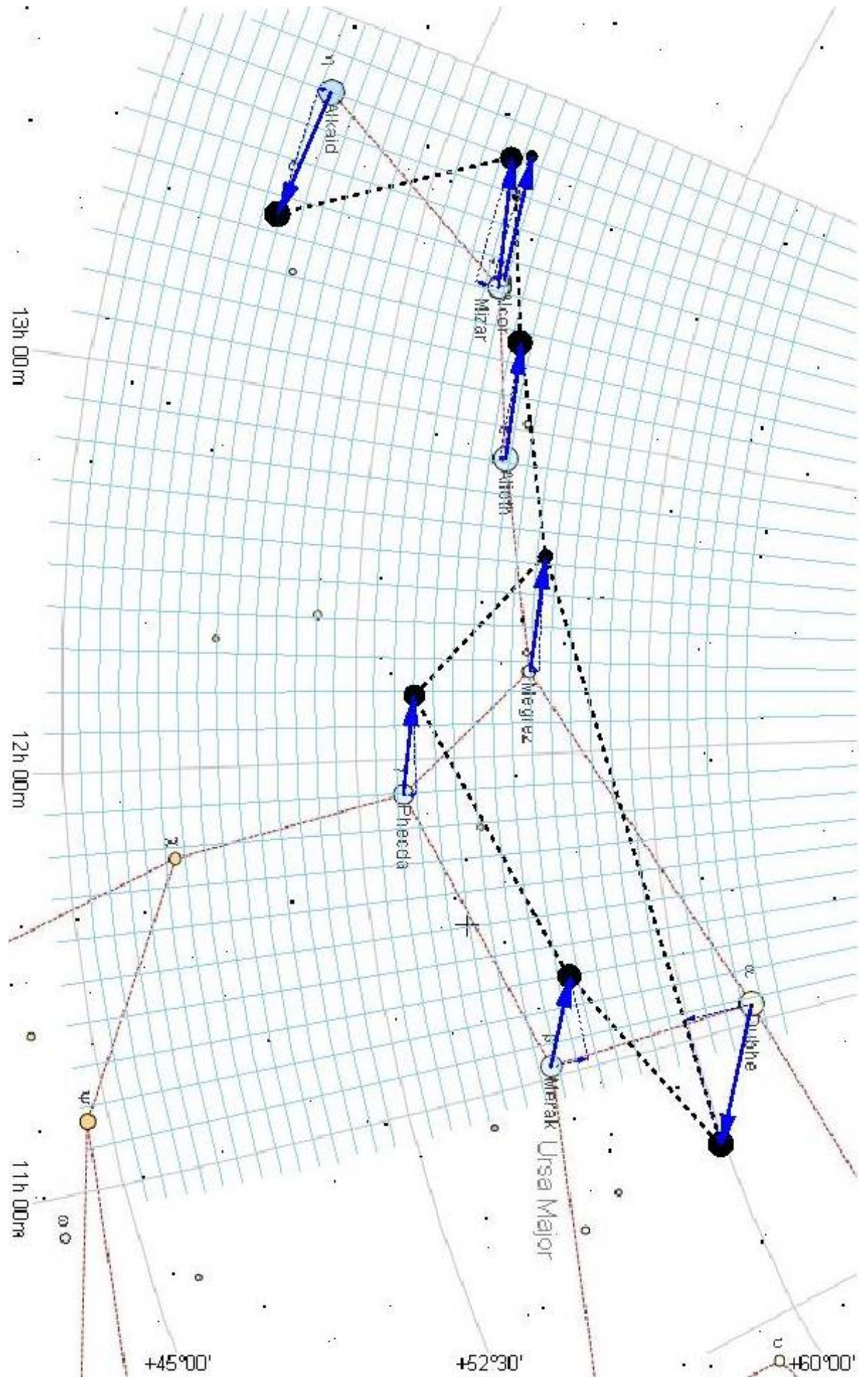
Wie werden der Große Wagen (Teil des Sternbilds Ursa Major) oder das „Himmels-W“ (Teil des Sternbilds Cassiopeia) in 100.000 Jahren erscheinen?

Man bestimme zunächst die Änderungen der Äquatorkoordinaten der Sterne $\Delta\alpha$ und $\Delta\delta$, die sich aufgrund ihrer entsprechenden Eigenbewegungskomponenten μ_α und μ_δ in 100.000 Jahren ergeben (man beachte die Einheiten).

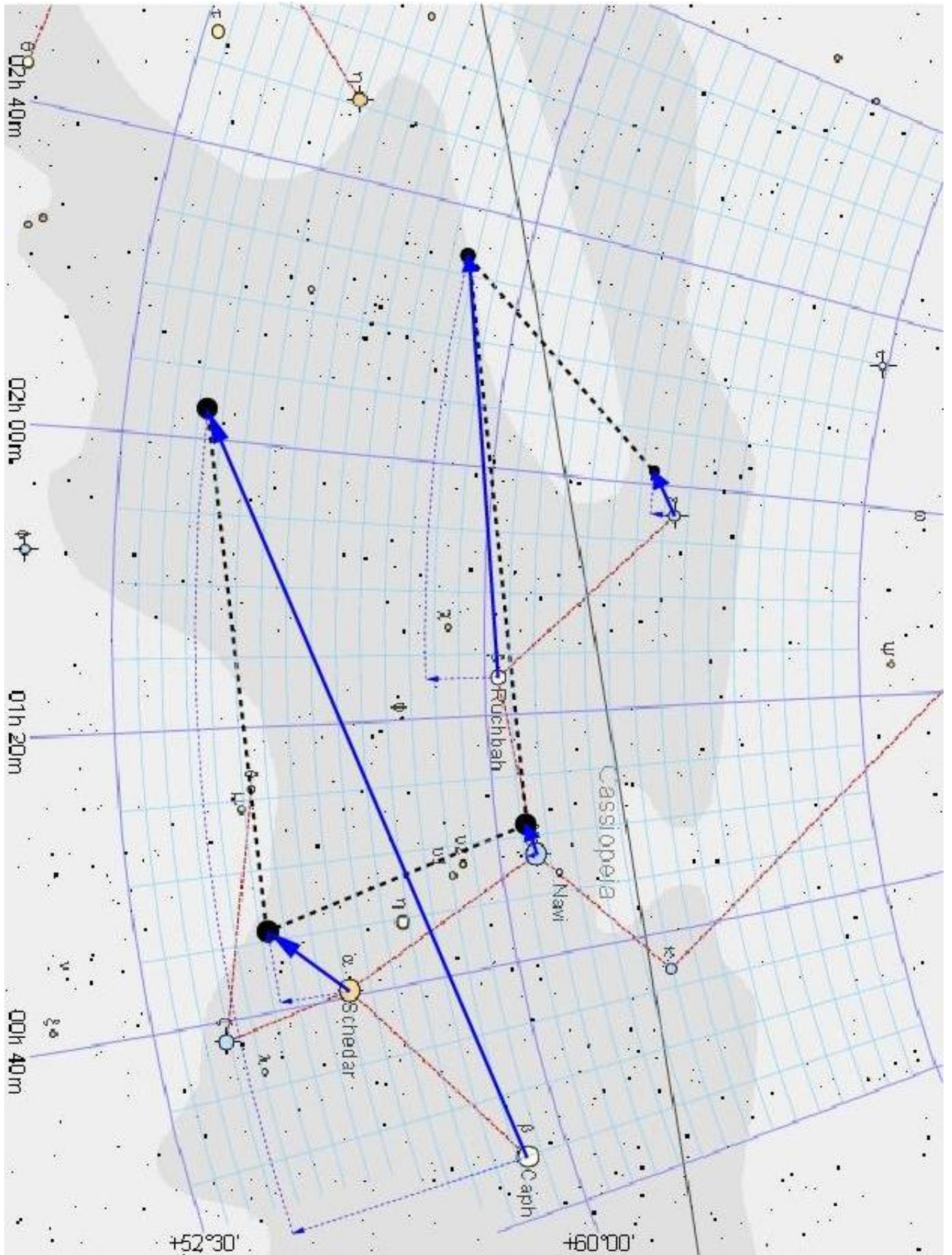
Sterne im Sternbild Ursa Major	μ_α [s/a]	μ_δ ["/a]	$\Delta\alpha$ [h] (in 100.000 a)	$\Delta\delta$ [°] (in 100.000 a)
α UMa / Dubhe (1,8)	-0,0167	-0,066	-0,46	-1,83
β UMa / Merak (2,4)	+0,0099	+0,034	+0,28	+0,94
γ UMa / Phecda (2,4)	+0,0107	+0,012	+0,30	+0,33
δ UMa / Megrez (3,3)	+0,0127	+0,009	+0,35	+0,25
ϵ UMa / Alioth (1,8)	+0,0133	-0,006	+0,37	-0,17
ζ UMa / Mizar (2,3)	+0,0141	-0,020	+0,39	-0,56
η UMa / Alkaid (1,9)	-0,0125	-0,011	-0,35	-0,31
UMa / Alkor (4,2)	+0,0135	-0,009	+0,38	-0,25

Sterne im Sternbild Cassiopeia	μ_α [s/a]	μ_δ ["/a]	$\Delta\alpha$ [min] (in 100.000 a)	$\Delta\delta$ [°] (in 100.000 a)
α Cas / Schedar (2,2)	+0,0064	-0,032	+10,7	-0,89
β Cas / Caph (2,3)	+0,0683	-0,181	+113,8	-5,03
γ Cas / Navi (1,6)	+0,0035	-0,005	+5,8	-0,14
δ Cas / Ruchbah (2,7)	+0,0399	-0,051	+66,5	-1,42
ϵ Cas (3,4)	+0,0048	-0,021	+8,0	-0,58

Komponenten der Eigenbewegung von markanten Sternen, die die Figürlichkeit der Sternkonfiguration des Großen Wagen im Sternbild Ursa Major und der Sternkonfiguration des „Himmels-W“ im Sternbild Cassiopeia ausmachen. Die in der Tabelle gegebenen Werte stammen aus dem PPM-Katalog (Positions and Proper Motions, Quelle: <http://vizier.cfa.harvard.edu/viz-bin/VizieR?-source=I/146/>).



Sternkonstellation des Großen Wagen im Sternbild Ursa Major heute und nach 100.000 Jahren.



Sternkonstellation des „Himmels-W“ im Sternbild Cassiopeia heute und nach 100.000 Jahren.