

Wie man Exoplaneten entdecken kann – Modellexperimente, Modellvorstellungen und Rechnungen

Eine der wohl fundamentalsten Fragen der den Weltraum erforschenden Menschheit ist die, ob wir allein im Weltall sind oder ob außerirdisches Leben existiert. Nachdem wir die solaren Planeten so weit kennen, dass wir höher entwickeltes Leben dort ausschließen, sind wir inzwischen in der Lage, Planeten bei anderen Sternen aufzuspüren. Zukünftige Untersuchungen von einmal nachgewiesenen extrasolaren Planeten (auch Exoplaneten genannt) werden uns erlauben, über deren Bewohnbarkeit Schlüsse zu ziehen.

Derzeitig (Dez. 2005) sind etwa 170 extrasolare Planeten bekannt. Sie wurden fast durchweg auf indirektem Wege gefunden, d. h. über die Beobachtung des Lichts ihrer Muttersterne, weil das Licht der Planeten bisher kaum nachweisbar ist. Die Muttersterne verraten die Anwesenheit eines Planeten auf ganz natürliche (naturgesetzliche) Weise dadurch, dass sie nicht stillstehen dürfen, sondern im Takt des Umlaufs des Planeten den gemeinsamen Schwerpunkt mit diesem umlaufen müssen. Dabei verändern sie sowohl ihre Position als auch ihre Relativgeschwindigkeit in Bezug auf den irdischen Beobachter. Auch können die Umlaufbahnen gerade so liegen, dass ein extrasolarer Planet von der Erde aus gesehen ein kleines Gebiet der Scheibe seines Muttersterns verdeckt und so zu einer Miniaturfinsternis führt.

Im Folgenden werden die indirekten Methoden des Nachweises von Exoplaneten mit Hilfe von kleinen Experimenten und Modellen vorgestellt; wobei schulische Kenntnisse zum Verständnis ausreichend sind. Ausgehend von einem [grundlegenden Modellexperiment](#), das die physikalische und geometrische Situation verdeutlicht, werden nacheinander die [spektroskopische](#), die [photometrische](#) und die [astrometrische](#) Methode eingeführt. Die sich anschließenden [Aufgaben](#) sind dazu geeignet, das Wissen anzuwenden.

Übersicht der Bezüge im WiS!-Beitrag		
Physik	Mechanik, Schwingungen und Wellen	Schwerpunkt, Schwerpunktsatz, Dopplereffekt (akustisch und optisch), Keplerrotation, 3. keplersches Gesetz
Astronomie	Planeten, Astropraxis	Exoplaneten, wahre Planetenbewegung, Astrometrie, Photometrie, Spektroskopie, Lichtkurven
Fächer- verknüpfung	Astro-Ma, Astro-Info, Astro-Kunst, Astro-Bio	Trigonometrie, Wahrscheinlichkeit, Vereinfachung von Winkelfunktionswerten, Programmieraufgabe, Science Fiction-Malerei, Gehör: wahrnehmbare Tonhöhenänderung

Abbildung 1: Künstlerische Darstellung des Anblicks der Doppelsternkomponente 55 Cancri A am Horizont seines Planeten Janssen (55 Cancri e), der sich im Abstand von nur 0,015 AE sehr nahe bei seinem Mutterstern befindet. Das Thema „Exoplaneten“ könnte im Kunstunterricht im Rahmen von Science Fiction-Malerei aufgegriffen werden.

©: By Ron Miller/NASAbleshoot –
<https://www.flickr.com/photos/nasablueshift/387949358/in/photostream/>, CC BY 2.0,
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=27462420>,
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/63/55_Cancri_e_%28Artwork%29.jpg.



Das grundlegende Modellexperiment zum indirekten Nachweis von Exoplaneten

Extrasolare Planeten werden gegenwärtig auf indirektem Wege nachgewiesen. Der indirekte Nachweis eines bislang unsichtbaren Exoplaneten basiert auf dessen Wirkung auf den sichtbaren Stern. **Andere Beispiele für die indirekte Nachweismethodik** liefern im Kleinen die Brownsche Bewegung eines Staubteilchens als Nachweis für die Gasteilchenbewegung oder im Großen der Nachweis des supermassiven Schwarzen Lochs im Zentrum des Milchstraßensystems auf Grundlage der festgestellten Umlaufbewegung zentrumsnaher Sterne. Ausgehend von einem grundlegenden Modellexperiment (siehe Abb. 2, **Videoclip verfügbar**) können die verschiedenen Wirkungen des Planeten auf seinen Stern demonstriert werden.

1. Vermutlich wird die periodische Positionsänderung des Sterns vor dem Himmelshintergrund zuerst ersichtlich. Ihr Nachweis ist das Ziel der **astrometrischen** Planetensuche.
2. Als nächstes fällt vielleicht der Fall auf, dass der Planet für den Beobachter vor dem Stern vorbeilaufen kann und dabei das Sternlicht etwas schwächt. Hier ergibt sich die Möglichkeit, einen Exoplaneten auf **photometrischem** Wege (indirekt) nachzuweisen.
3. Zuletzt kann man zeigen, dass sich die Radialgeschwindigkeit des Sterns (die zum Beobachter weisende Bahngeschwindigkeitskomponente) periodisch ändert. Diese Relativbewegung zwischen Lichtquelle und Empfänger kann auf Grundlage des Dopplereffekts auf **spektroskopischem** Wege nachgewiesen werden.

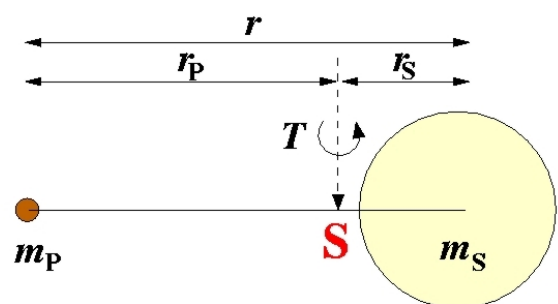
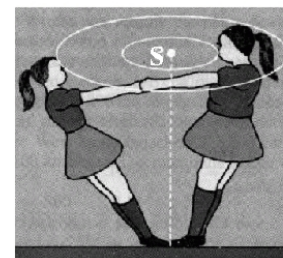
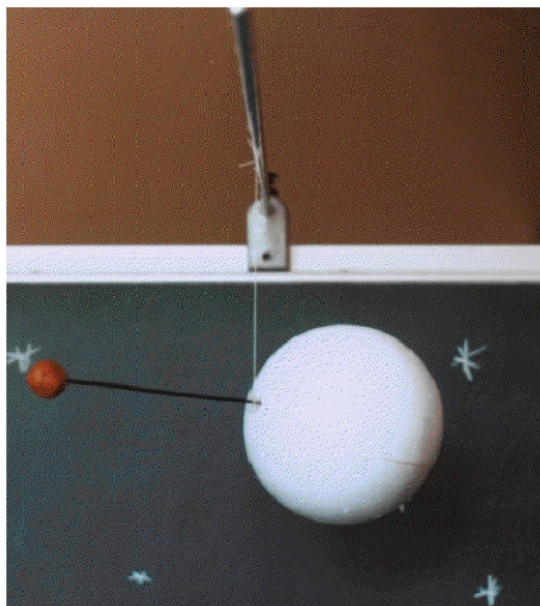


Abbildung 2: Grundlegendes Modellexperiment. Zwei durch einen dünnen Stab verbundene Kugeln (Styroporkugel und Knetekugel) hängen im Gleichgewicht (Aufhängung im Schwerpunkt) vor der als Himmels-hintergrund gedachten Tafel Ebene (Befestigung an Tafel mittels Tischstativklemme und Stativstab). In Drehung versetzt, bewegen sich beide Kugeln (Himmelskörper) um den gemeinsamen Schwerpunkt vor dem Hintergrund von Fixpunkten im Tafelbild. Am Modell kann insbesondere auch die Ausweichbewegung der Sonne als Reaktion auf den Planetenumlauf beobachtet werden. Ausgehend von der Gleichgewichtslage kann man den Betrachter auf die Formulierung der Gleichheit der Drehmomente oder zumindest auf die Anwendung des Hebelgesetzes lenken. Der für die **Modellbildung** kritische Hantelcharakter des Modells könnte augenscheinlich etwas aufgehoben werden, wenn man die Kugeln, anstatt sie mit dem Stab zu verbinden, an diesem aufhängt. Der Ort des Modellexperiments vor der Tafel Ebene erlaubt eine einfache Übertragung des Modellanblicks ins Tafelbild. ©: Olaf Fischer.

Im **Modellexperiment** manifestiert sich die Vorstellung, nach der sich Stern und Planet um einen gemeinsamen Schwerpunkt bewegen. Mit Hilfe einer **Analogie** zu einem kreisenden verbunden tanzenden Paares kann man diese Vorstellung auch alltagsnah einführen. Beide drehen sich um eine Achse, die durch den Schwerpunkt führt. Dabei liegt die Achse näher am schwergewichtigen Tanzpartner (Stern) als am Leichtgewicht (Planet).

Aus physikalischer Sicht handelt es sich beim Schwerpunkt eines starren Körpers zum einen um den Angriffspunkt der Resultierenden aller Teilgewichtskräfte, den es zu unterstützen gilt, will man den Körper im statischen Gleichgewicht halten (wie es im ruhenden Modellexperiment zunächst zu sehen ist). Zum anderen markiert der Schwerpunkt den raumfesten Punkt des rotierenden Körpers bzw. des Systems aus Körpern im dynamischen Gleichgewicht, weil in ihm die Summe der Zentripetalkräfte aller Teilmassen zu Null wird. Diese beim System Stern-Planet vorliegende Situation kann man verdeutlichen, wenn man die Hantelanordnung des Modellexperiments in Drehung versetzt, wobei wir zur Einführung der indirekten Nachweismethoden für extrasolare Planeten zurückkommen. Der Schüler kann dabei die Wirkungen des Planeten auf den Stern durch aufmerksames Beobachten des Modellexperiments zum Teil selbst finden.

Im Rahmen der genaueren Betrachtung der indirekten Nachweismethoden werden physikalische und mathematische Beziehungen für den weiteren Modellbildungsprozess benötigt, die ausgehend vom grundlegenden Modellexperiment einfach herausgestellt werden können. Zunächst sei das für die Zweikörperbewegung gültige 3. keplersche Gesetz genannt (in diesem Falle müssen beim Modellexperiment die zwei Punktmassen herausgestellt werden):

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{\gamma}{4\pi^2} \cdot (m_s + m_p)$$

(r ...Abstand Stern-Planet, T ...Planetenumlaufzeit, γ ...Gravitationskonstante, m_s ...Sternmasse, m_p ...Planetenmasse). Aus dem zuvor schon erwähnten Gleichgewicht der Zentripetalkräfte lässt sich der Schwerpunktsatz herleiten. Es gilt: $m_s \cdot \omega_s^2 \cdot r_s = m_p \cdot \omega_p^2 \cdot r_p$ (r_s ...Abstand Systemschwerpunkt-Stern, r_p ...Abstand Systemschwerpunkt-Planet, ω_s ...Winkelgeschwindigkeit des Sterns, ω_p ...Winkelgeschwindigkeit des Planeten). Auch wenn die Hantelvorstellung für das System Stern-Planet kritisch zu sehen ist (es entsteht die Versuchung, die Umlaufbewegung der Himmelskörper mit ihrer Rotationsbewegung zu verknüpfen), für die augenscheinliche Feststellung von $\omega_s = \omega_p$ ist sie hilfreich. Für den Schwerpunktsatz ergibt sich dann

$$m_s \cdot r_s = m_p \cdot r_p$$

Die Anschaulichkeit der aus dem Modellexperiment abgeleiteten Tafelzeichnung (Abb. 2) erlaubt es, die folgende Bahnradienbeziehung sofort aufzuschreiben:

$$r = r_s + r_p$$

Spektroskopischer Nachweis

[\(→zurück zum Anfang\)](#)

Mit der Entwicklung eines Verfahrens zur Feststellung schon kleinster Doppler-Verschiebungen von Absorptionslinien eines Sterns in den 80er und 90er Jahren eröffnete sich eine Möglichkeit zum Nachweis extrasolarer Planeten.

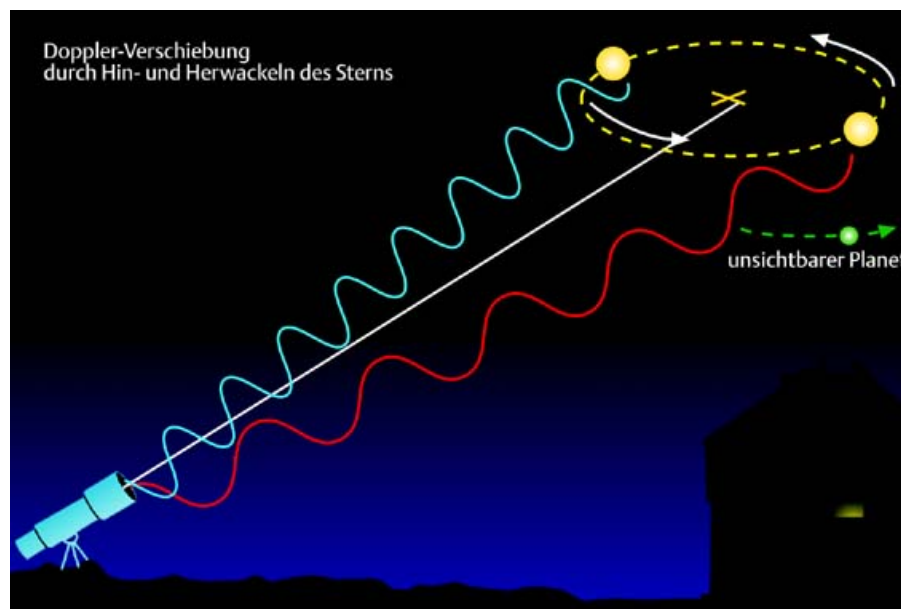
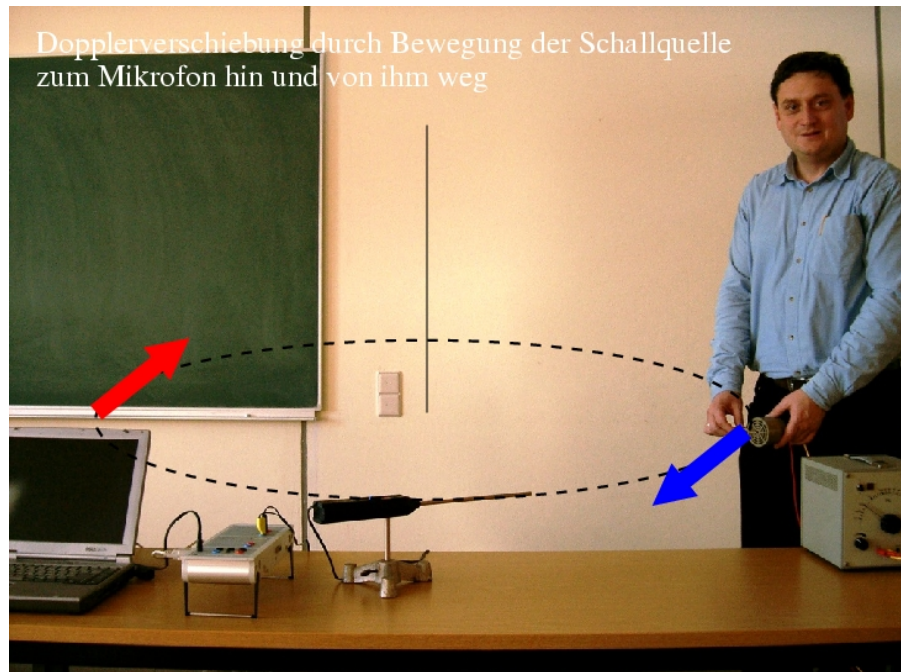


Abbildung 3: Analogiebetrachtung zum spektroskopischen Nachweis von Exoplaneten. Die Tonhöhe einer kreisenden Tonquelle (Stimmgabel oder Lautsprecher) variiert zwischen Hin- und Wegbewegung zum Empfänger, d. h. sie wird dopplerverschoben gemessen (siehe Abb. 4) oder durch das Gehör wahrgenommen. Dargestellt ist die computergestützte Messung mit Hilfe eines Mikrofons, die mit Hilfe von Dr. Oliver Schwarz an der Uni Landau getestet wurde. Aus der periodischen Änderung der Tonhöhe kann auf die Änderung der Schallwellenlänge und damit analog auf eine periodische Änderung der Lichtwellenlänge geschlossen werden. Im Zuge der Analogiebetrachtung ist auch auf die Grenzen der Analogie hinzuweisen (Schallwellen benötigen ein Trägermedium, Lichtwellen nicht).

Bild unten: ©: Geoffrey Marcy, <http://www.physics.sfsu.edu/~gmarcy/planetsearch/tech/wobl.html>

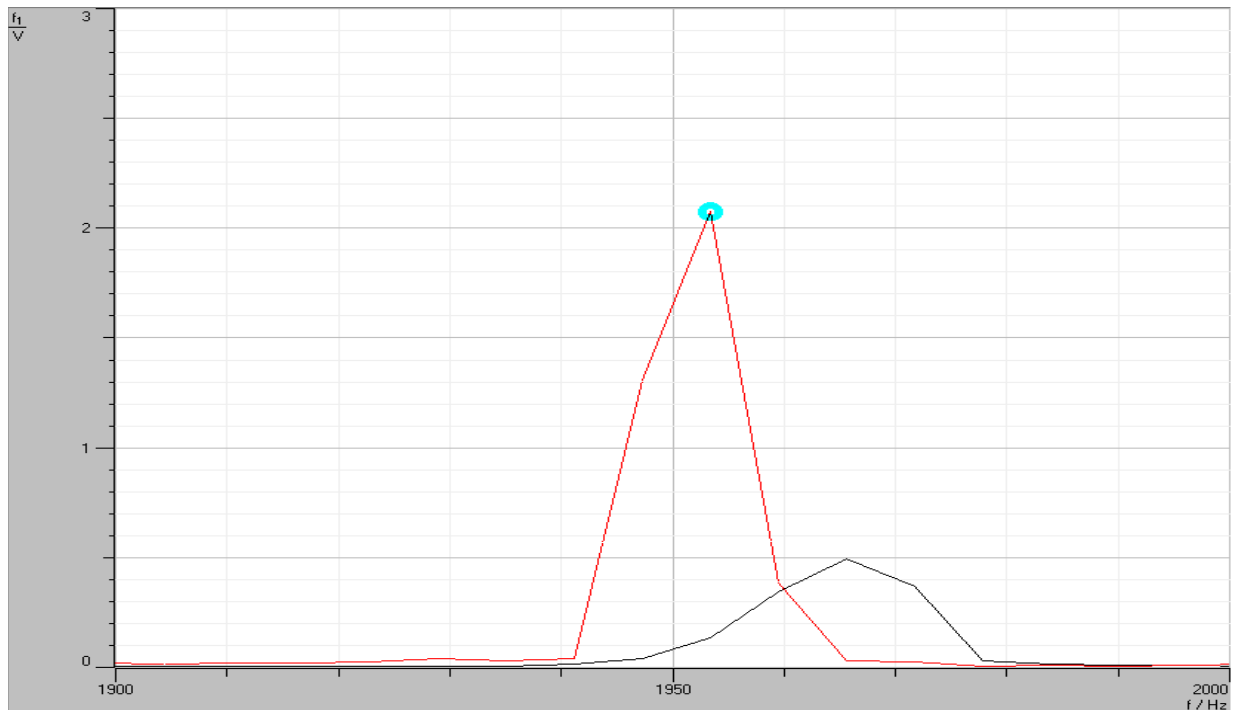


Abbildung 4: Ergebnis der computergestützten Messung aus Abb. 3. Der Pik der roten Kurve zeigt die Ruhfrequenz des Lautsprechers bei etwa 1954 Hz. Die blaue Kurve (Pik bei etwa 1965 Hz) zeigt die dopplerverschobenen Frequenzen, wenn der Lautsprecher auf den ruhenden Beobachter (das Mikrofon) zu bewegt wird. ©: Oliver Schwarz.

In Anknüpfung an Alltagserfahrungen zum Dopplereffekt erlaubt ein **Freihandexperiment** mit einer umlaufenden Tonquelle (Abb. 3) eine **Analogiebetrachtung** zu einem Stern, der um den Schwerpunkt umläuft. Aus dem An- und Abswellen der Tonhöhen der kreisenden Stimmgabel kann auf das An- und Abswellen der Lichtfrequenzen des (vereinfacht gesehen) kreisenden Sterns geschlossen werden. Schon für eine relativ langsam bewegte Tonquelle (Ruhfrequenz 1954 Hz, etwa 1,5m/s in Bezug auf das Mikrofon) ergibt sich durch Dopplerverschiebung eine hörbar andere Frequenz von 1965 HZ (Rechnung: 1963 Hz).

Im Weiteren lässt sich aus der Veränderung der Frequenzen die Wellenlängenverschiebung (Licht wird blauer oder röter) ableiten. Im Zuge der Analogiebetrachtung ist auch auf die Grenzen der Analogie (Schallwellen benötigen ein Trägermedium, Lichtwellen nicht) hinzuweisen.

Während die Frequenzverschiebung Δf beim Licht alleine von der Relativgeschwindigkeit v zwischen Sender und Empfänger abhängt ($\Delta\lambda/\lambda_0 = v/c$, f_0 ... Laborfrequenz, c ... Lichtgeschwindigkeit, Formel gilt für nichtrelativistischen Fall ($v \ll c$)), ist es beim Schall von Bedeutung, ob sich Sender oder Empfänger bewegen (allgemein gilt $f_E = f_S \cdot (c - v_E) / (c - v_S)$, f_E ... Empfangsfrequenz, f_S ... Sende Frequenz, v_E ... Geschwindigkeit des Empfängers, v_S ... Geschwindigkeit des Senders, c ... Schallgeschwindigkeit). Dies wird an einem Extrembeispiel schnell klar. Bewegt sich der Empfänger mit $v_E = c$ vom ruhenden Sender weg, so ist er für den Schall unerreichbar und man erhält $f_E = 0$, bewegt sich der Sender mit $v_S = -c$ (Vorzeichen von v_E und v_S positiv für Bewegung in Richtung der Schallwelle) vom ruhenden Empfänger weg, so erhält man $f_E = f_S/2$.

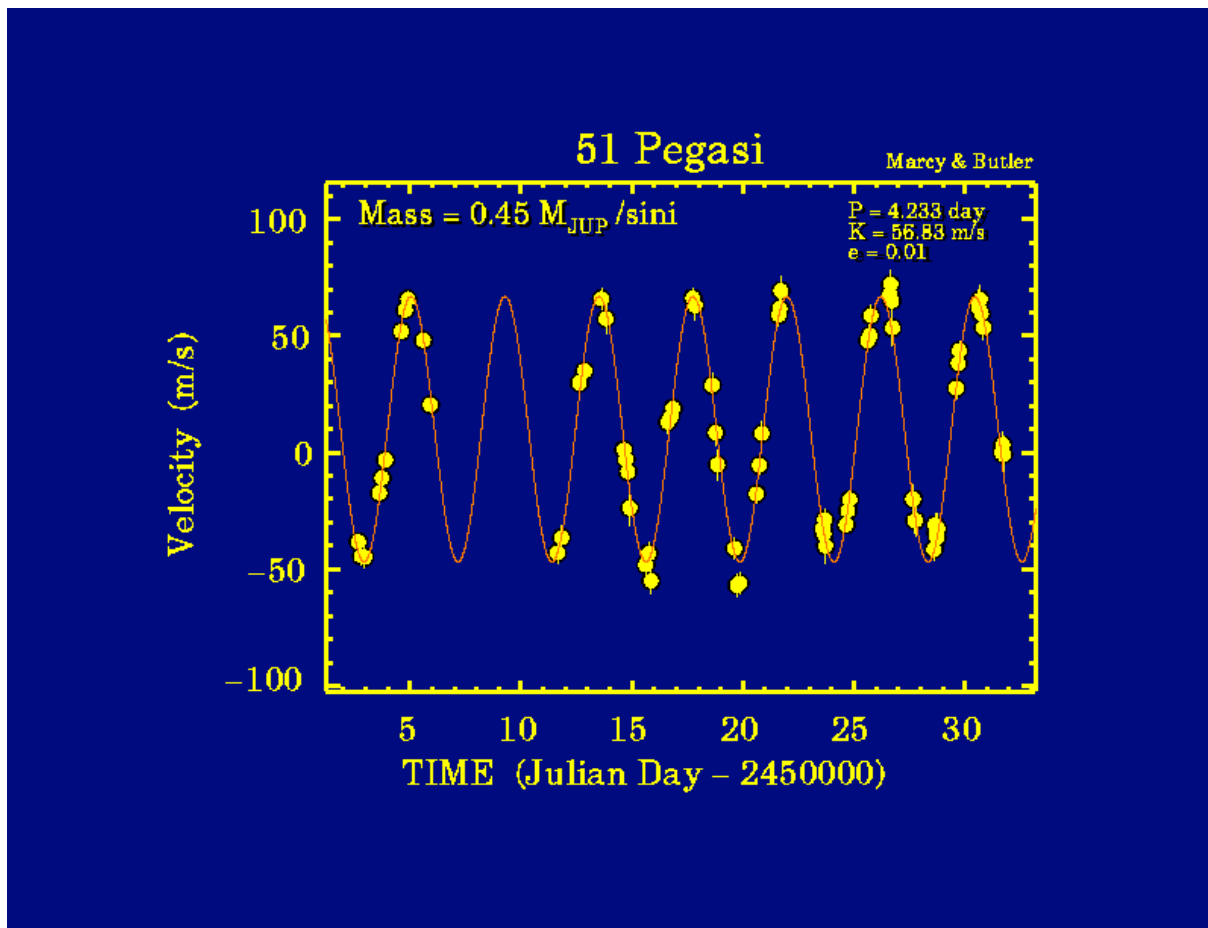


Abbildung 5: Radialgeschwindigkeitskurve von 51 Peg. ©: <http://exoplanets.org/esp/51peg/51peg.shtml>, Data from Lick Observatory, Data provided by California & Carnegie Planet Search Team.

Die Interpretation der in Abb. 5 gegebenen Radialgeschwindigkeitskurve ist für Schüler durchaus nachvollziehbar. Die Umlaufzeit des Planeten wird aus der Periode der Kurve ersichtlich. Der Abstand des Planeten zum Stern kann dann auf Grundlage einer Annahme über die Sternmasse mit Hilfe des 3. keplerschen Gesetzes berechnet werden. Aus der Amplitude der Radialgeschwindigkeitskurve (V_{Beob}) kann die untere Grenze für die Planetenmasse ($m_P \cdot \sin i$, wegen der Bahnneigung kann nur eine Komponente der Radialgeschwindigkeit des Sterns beobachtet werden) berechnet werden. Der Formelzusammenhang dafür (das „Formelmodell“, siehe Abb. 6) basiert allein auf den Beziehungen, die zuvor im Zusammenhang mit dem grundlegenden Modellexperiment eingeführt wurden.

Die **Interpretation des Formelzusammenhangs** (durch Schüler) kann etwas über die Erfolgsaussichten bei der Planetensuche aussagen:

Aus $V_{\text{Beob}} \sim m_P$ kann man erkennen, dass massereiche Planeten (Jupiter) die Objekte sind, die wohl zuerst gefunden werden.

Aus $V_{\text{Beob}} \sim m_S^{-2/3}$ lässt sich schließen, dass massearme Sterne (M-Sterne) die größten Amplituden zeigen.

Schließlich kann man aus $V_{\text{Beob}} \sim T^{-1/3}$ schlussfolgern, dass Planeten mit nahen Umlaufbahnen die größeren Effekte erzeugen. Zudem sind die Planeten mit geringen Umlaufzeiten am ehesten feststellbar, weil sie in kurzer Zeit eine komplette Radialgeschwindigkeitskurve liefern.

Massebestimmung für Exoplaneten

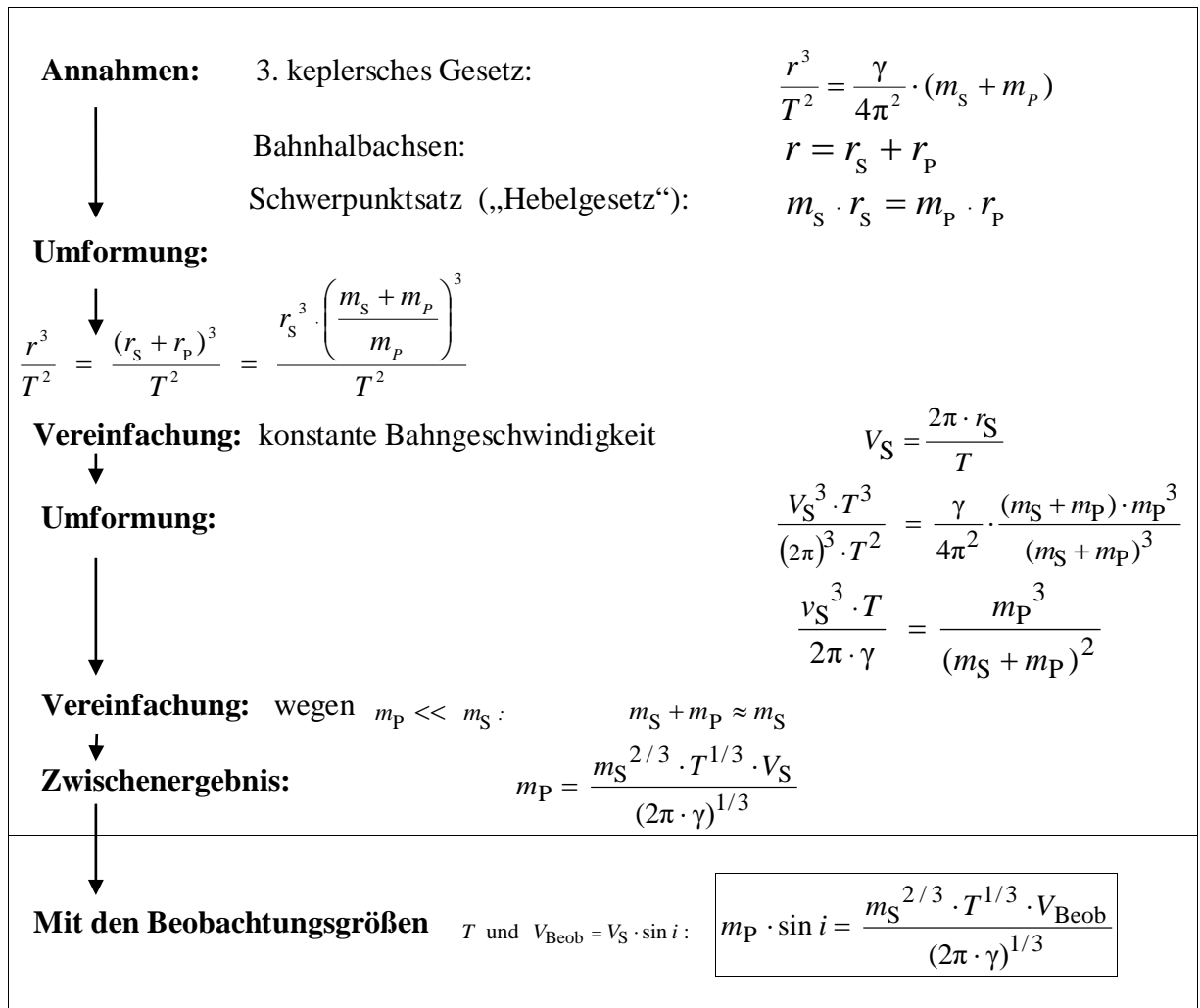


Abbildung 6: Leitfaden zur Massebestimmung aus den gegebenen Daten. Zur Überprüfung des Ergebnisses von $m_P \cdot \sin i = 8,62 \cdot 10^{26} \text{kg} \approx 0,45 \cdot M_{\text{Jupiter}}$ für 51 Pegasi B (Abb. 5) verwende man für m_S rund eine Sonnenmasse. Die genauere Berechnung von $m_P \cdot \sin i$ basiert auf der computergestützten Analyse der v - t -Kurve, indem die Bahnkurve für eine Ellipse solange variiert wird, bis die sich darauf aufbauende theoretische v - t -Kurve mit der beobachteten Kurve bestmöglich deckt.

Photometrischer Nachweis

[\(←zurück zum Anfang\)](#)

Hinsichtlich der photometrischen Suche nach extrasolaren Planeten soll zunächst eine **einfache Modellvorstellung** eingeführt und begründet werden, die die Vorhersage und Auswertung von Beobachtungen ermöglicht und die Genauigkeitsanforderungen der Helligkeitsmessung erkennbar werden lässt. Im Weiteren gilt es, die Suchstrategie plausibel zu machen.

Wenn ein Planet oder ein extrasolarer Planet aus Sicht des Beobachters vor der Scheibe seines Muttergestirns vorüber läuft, so kann man von einer Miniaturfinsternis sprechen. Die Strahlenverläufe einer Verfinsterung der Sonne durch Mond, Venus oder Merkur und einer Verfinsterung eines Sterns durch einen Exoplaneten unterscheiden sich jedoch voneinander (**Modellbildung!**). Während die Größe der Verdeckung der Sonnenscheibe bei einem Venustransit durch einen konvergenten Strahlenverlauf modelliert werden muss, genügt bei der Modellierung der Bedeckung des Sterns durch einen Exoplaneten wegen $s \gg r$ (s ...Abstand Beobachter-Stern, r ...Abstand Stern-Planet) ein paralleler Strahlengang vom Planeten zum Stern (siehe Abb. 7). Entsprechend verdeckt die Venus bei ihrem Transit von der Erde aus gesehen etwa 0,1 % der Sonnenscheibe, aus Sicht eines extrasolaren Beobachters wären es dagegen nur 0,01 %.

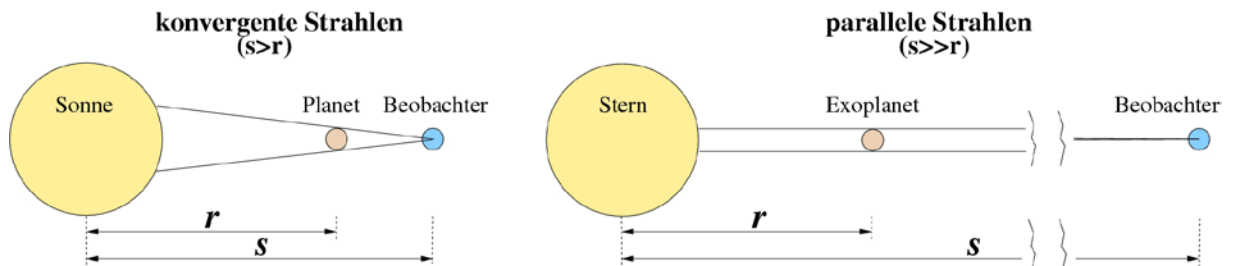


Abbildung 7: Strahlenverläufe bei einem solaren und einem extrasolaren Planetentransit (Bild verfügbar: **Transitmodelle**). Es gilt, dem Schüler sowohl das Gemeinsame beider Transitereignisse als auch die Möglichkeit der Vereinfachung der Modellvorstellung zu verdeutlichen. ©: Olaf Fischer.

Die vereinfachte **Modellvorstellung vom parallelen Strahlenverlauf** liefert die Grundlage für einen einfachen **Freihandversuch** zur Simulation der Verfinsterung des Sternenlichts durch einen extrasolaren Planeten (siehe Abb. 8). Mit Hilfe einer auf einen Overhead-Projektor gelegten Kreisblende wird die Sternscheibe dargestellt. Eine passende Münze kann als Planetenscheibe wegen der Modellvorstellung direkt auf die Sternscheibe gelegt werden. Hervorzuheben ist die Tatsache, dass man aus der Verfinsterung trotz der nur punktförmig beobachtbaren Himmelskörper etwas über deren Ausmaße erfahren kann.

Mit Hilfe des Freihandversuches kann man die Geringfügigkeit der Verfinsterung demonstrieren und hat gleichzeitig eine geometrische Vorlage zu ihrer mathematischen Erfassung. Der vom Stern kommende Strahlungsfluss S_0 („Normallicht“) wird prozentual um den Betrag ΔS verringert, der dem Flächenanteil der Planetenscheibe an der Sternscheibe A_P/A_S entspricht. Zunächst wird für den Stern eine konstante Flächenhelligkeit angenommen (keine Randverdunklung).

$$\text{Es gilt } \Delta S = \frac{A_P}{A_S} \cdot S_0.$$

Für Jupiter vor der Sonne würde $A_P/A_S=10^{-2}$ gelten, d. h. Jupiter würde das Normallicht der Sonne um 1% reduzieren. Die Erde würde das Normallicht der Sonne gar nur um 0,008% ($A_P/A_S=8 \cdot 10^{-5}$) reduzieren. Diese durch Schüler erzielbaren Ergebnisse, die als Abschätzung zu den Anforderungen an einen Nachweis von jupiterähnlichen und erdähnlichen Planeten gelten können, lassen sich mit dem Freihandexperiment im wahrsten Sinne des Wortes veranschaulichen.

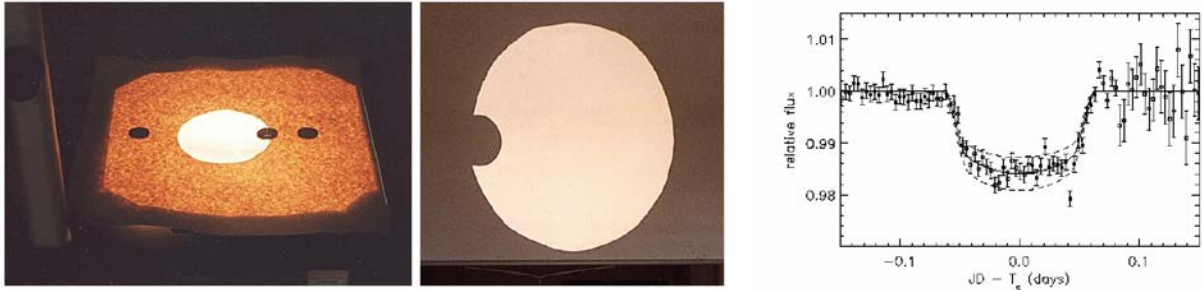


Abbildung 8: Links: Freihandexperiment mit Overheadprojektor, Pappblende und Münzen zur Demonstration eines Planetentransits. Rechts Lichtkurve als indirekter Beleg für die Existenz eines Transitplaneten beim Stern HD209458 ([5], erster Nachweis eines Transitplaneten). Dargestellt ist der relative Strahlungsstrom über der Zeitachse. Im Minimum fällt der Strahlungsstrom des Sterns auf etwa 98,5% ab, d. h. der Planet schirmt etwa 1,5% der Sternscheibe ab. Die Größe des Helligkeitsabfalls kann mit dem Freihandexperiment durch entsprechend große Pappblenden und Münzen simuliert werden. Die Aufmerksamkeit gilt dabei nicht dem bildlich beobachtbaren Bedeckungsphänomen, sondern der Helligkeitsdifferenz. Dazu ist die durch das Projektionsbild erzeugte Raumhelligkeit und nicht das Projektionsbild selbst zu beobachten.

Während der Transit bei Betrachtung des projizierten Bildes des Modellsterns (in der Nähe des Sterns) nur dadurch erkannt wird, dass er bildlich beobachtet werden kann (man kann diese Situation mit einem Venusdurchgang vergleichen), wird er aus großer Entfernung nur durch die Helligkeitsabnahme des Sternlichts erkennbar. Für das **Freihandexperiment** bedeutet dies, in dem verdunkelten Raum mit dem Rücken zum Projektionsbild sitzend, dessen Helligkeitswechsel wahrnehmen zu wollen. Um den Effekt von Jupiter zu spüren, müsste man in Lage sein, bei 100 brennenden Kerzen den Helligkeitsabfall beim Verlöschen einer Kerze wahrzunehmen. Für die Erde sind die Verhältnisse um Größenordnungen drastischer. Die Betrachtungen sensibilisieren für die Einsicht, dass die photometrische Planetensuche hochgenauer Photometrie bedarf, die durch die Erdatmosphäre stark erschwert wird.

Ein weiteres Problem der Suche nach Transitplaneten besteht darin, dass nur sehr wenige der existierenden extrasolaren Planeten von der Erde aus im Transit vor ihrem Stern beobachtbar sind. Es handelt sich quasi um die Suche nach der Nadel im Heuhaufen. **Räumliches Vorstellungsvermögen** ist gefragt, um diese Tatsache zu erkennen und aufbauend darauf die Erfolgsaussichten der Entdeckung eines Transitereignisses abzuschätzen. Es soll die Wahrscheinlichkeit berechnet werden, einen teilweise bedeckten Stern durch eine einmalige Beobachtung zu finden. Entsprechend der **Modellvorstellung** mit dem parallelen Strahlenverlauf (Abb. 7) erscheint ein Exoplanet dann vor der Sternscheibe, wenn er im Kreis mit dem Radius des Sterns steht, dessen Mittelpunkt auf der Verbindungslinie Stern-Beobachter im Abstand des Planeten vom Stern liegt. Die Wahrscheinlichkeit einer photometrischen Planetendetektion ergibt sich aus dem Flächenverhältnis des Sternquerschnitts zur Kugeloberfläche mit dem Radius des Planetenabstands. So gelingt z. B. der photometrische Nachweis von Jupiter aus extrasolarer Entfernung mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa $(R_{\text{Jupiter}}^2 \cdot \pi) / (r_{\text{Jupiter}}^2 \cdot 4\pi) = 10^{-7}\%$, d. h. 2 Planetendetektionen sind bei 10.000.000 beobachteten Sternen zu erwarten, wenn man voraussetzt, dass die Bahnebenen der extrasolaren Planeten in allen Raumlagen gleich häufig vorkommen. Damit wird klar, dass die Suche nach Transitplaneten bei vielen Sternen gleichzeitig zu erfolgen hat, um Aussicht auf Erfolg zu haben. Es wird eine Art Himmelsüberwachung gebraucht, wie sie schon zum Auffinden von veränderlichen Sternen seit vielen Jahrzehnten an der Sternwarte Sonneberg Anwendung findet.

Die dem Freihandexperiment zugrundeliegende geometrische Modellvorstellung von der Bedeckung eines Sterns durch einen Planeten und deren mathematische Beschreibung versetzen den Schüler auch in die Lage, Lichtkurven für hypothetische Transitplaneten zu simulieren.

Astrometrischer Nachweis

[\(→zurück zum Anfang\)](#)

Anhand des anfangs in Abb. 2 gezeigten Modellexperiments kann demonstriert werden, dass der indirekte Nachweis eines extrasolaren Planeten auf Grundlage der Vermessung der Ortsveränderung des von ihm umlaufenden Sterns erfolgen kann. Zur Einordnung sei gesagt, dass die **Ortsveränderung auf der Tangentialkomponente** und die **Dopplerverschiebung auf der Radialkomponente** der Sternbewegung beruht. Während die Dopplerverschiebung nur festgestellt werden kann, wenn die Bewegung des Planeten eine zum Beobachter weisende Geschwindigkeitskomponente besitzt, spielt die Lage der Bahnebene des Planeten hinsichtlich der maximalen (tangentialen) Auslenkung des Sterns keine Rolle.

Es steht die Frage, welche Messgenauigkeit für den astrometrischen Planetennachweis erforderlich ist. Der Formalismus zur Berechnung des maximalen aus der Entfernung s messbaren Auslenkungswinkels $\hat{\theta}$ (im Bogenmaß) eines Sterns aus der Schwerpunktslage kann auf Grundlage der anfangs dargestellten Formelzusammenhänge und der trigonometrischen Beziehung $\tan\theta = r_S/s$ (r_S ...Radius der Bahn des Sterns um den Schwerpunkt) einfach hergeleitet werden.

$$m_S \cdot r_S = m_P \cdot r_P \quad \Rightarrow \quad \tan \theta = \frac{m_P}{m_S} \cdot \frac{r_P}{s}.$$

Für kleine Winkel erhält man mit $\tan\theta \approx \hat{\theta}$

$$\hat{\theta} = \frac{m_P}{m_S} \cdot \frac{r_P}{s}.$$

Mit Hilfe des 3. keplerschen Gesetzes $r_P^3 = (\gamma/4\pi^2) \cdot m_S \cdot T^2$ (Planetenmasse vernachlässigt) kann r_P ersetzt werden und es ergibt sich

$$\hat{\theta} = \left(\frac{\gamma}{4\pi^2} \right)^{1/3} \cdot \frac{m_P}{m_S^{2/3}} \cdot \frac{T^{2/3}}{s}.$$

Nach Umrechnung vom Bogenmaß in Winkelsekunden ($\cdot(180^\circ/\pi) \cdot 3600''$) erhält man $\theta = \hat{\theta} \cdot 206265''$.

Wie schon beim spektroskopischen Nachweis kann der Schüler auch etwas über die Erfolgsaussichten des astrometrischen Planetennachweises auf Grundlage der **Formelinterpretation** sagen. Aus $\hat{\theta} \sim m_P$ und $\hat{\theta} \sim m_S^{-2/3}$ kann man wieder erkennen, dass massereiche Planeten bei massearmen Sterne die größten Erfolgsaussichten versprechen. Im Gegensatz zur spektroskopischen Methode wächst die Chance, einen extrasolaren Planeten zu finden mit der Umlaufzeit bzw. mit dem Abstand ($\hat{\theta} \sim T^{2/3}$). Dies bedeutet aber auch, dass man viel Zeit benötigt, um einen vollen Umlauf zu registrieren. Die Entfernungsabhängigkeit $\hat{\theta} \sim s^{-1}$ sagt aus, dass die astrometrische Methode auf die nähere Sonnenumgebung beschränkt sein wird.

In der näheren Sonnenumgebung bis zu 10pc Entfernung befinden sich ca. 300 Sterne, wovon mehr als zwei Drittel M-Sterne sind (Verteilung der Sterne auf die Spektraltypen: A: 2, F: 11, G: 26, K: 42, M: 210), die für die astrometrische Methode sehr gut geeignet sind, weil diese meist massearmen Objekte durch ihre Planeten stark ausgelenkt werden. (Die genannte Häufigkeitsverteilung der Sterntypen ist ein nennenswerter Fakt für den Astronomieunterricht, beugt er doch der möglichen falschen Vorstellung vor, dass z. B. sonnenähnliche Sterne die

Mehrheit bilden.) Mit Hilfe des HST konnte für den M4-Hauptreihenstern GL874 (Entfernung: 4,7pc), für den bereits ein spektroskopischer Planetennachweis erfolgte, der massivere der Exoplaneten als erster auf astrometrischem Wege nachgewiesen und vermessen werden.

Abschließend soll ein kurzer erster Eindruck vermittelt werden, wie sich der Planetennachweis gestaltet (verkompliziert), wenn mehrere Planeten existieren, wovon man ausgehen kann. Ausgehend vom anfangs eingeführten grundlegenden Modellexperiments kann der Übergang vom einfachen System Stern-Planet zum Stern mit zwei Planeten zunächst qualitativ vollzogen werden (siehe Abb. 9). Auf Grundlage dieses einfachen Modells ist dann die mathematisch-physikalische Beschreibung und schließlich sogar eine einfache quantitative Modellierung auf dem Computer möglich. Mit Hilfe des Computermodells lässt sich ein Erwartungsbild für die Planetensucher erzeugen, welches die Größenordnung und den Gang der zu erwartenden Positionsabweichungen und die notwendige Beobachtungsdauer aufzeigt (siehe Abb. 9).

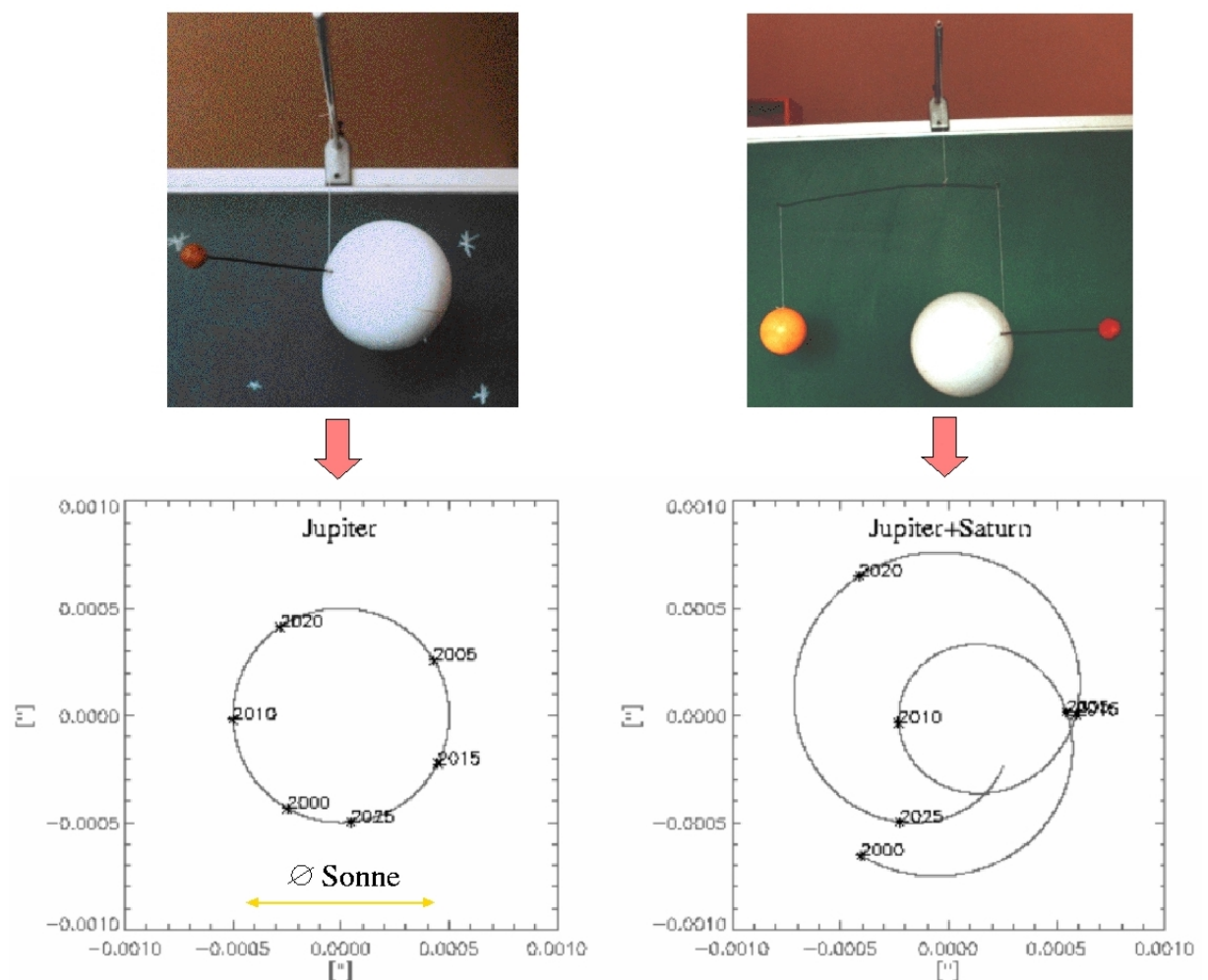
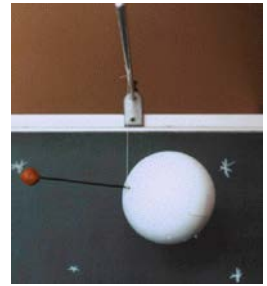


Abbildung 9: Vom Anschauungsmodell (oben) zur Simulationsrechnung (Bild verfügbar: **astrometrischer Nachweis**). Unten: Mit einem einfachen Computerprogramm (mögliche Spezialaufgabe für Schüler) simulierte Bahn der Sonne für den Zeitraum von 10.000 Tagen (etwa 2000 – 2030), wie sie aus einem Abstand von 10 pc in Draufsicht auf die Ekliptikebene astrometrisch beobachtet werden kann. Das Koordinatennetz repräsentiert den Hintergrund weit entfernter Fixsterne. Die Sonne hat in 10pc Entfernung eine scheinbare Größe von etwa $9 \cdot 10^{-4}$ \". Für die Simulationsrechnung wurde zunächst nur Jupiter und dann Jupiter und Saturn berücksichtigt. Man vergleiche die dargestellten Bahnen mit der Bahn der Sonne im Planeten-Mobile-Modell (oben). ©: Olaf Fischer.

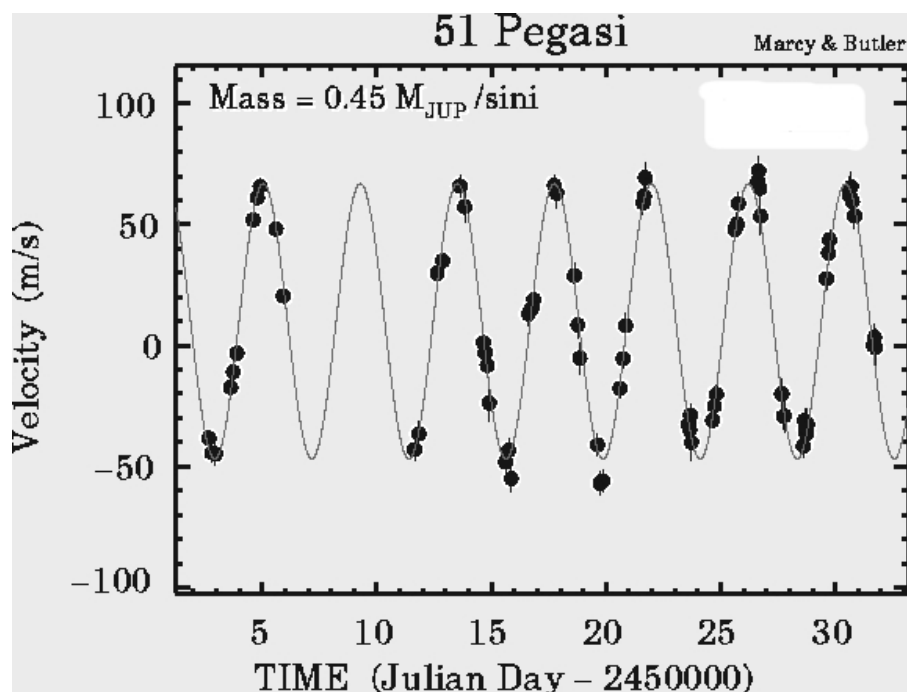
Aufgaben zum indirekten Nachweis von Exoplaneten

[\(→ zurück zum Anfang\)](#)

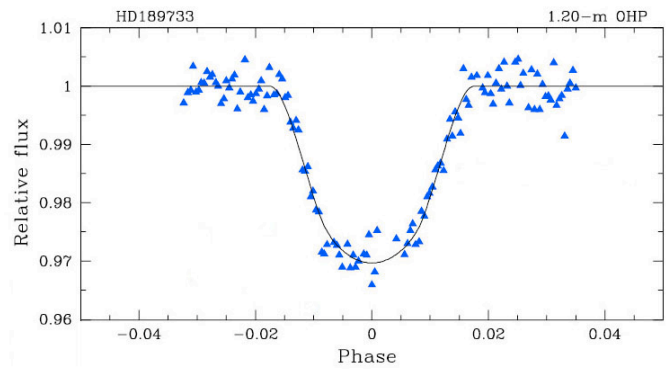
- 1.) Die Sonne habe in einem Modell einen Durchmesser von 2 m. Wie groß müssen die Modellerde und der Modelljupiter sein und in welchen Abständen zur Modellsonne müssen sie aufgestellt werden? Man ermittle die Lage des Schwerpunkts im System Sonne-Erde und im System Sonne-Jupiter in Realität und im Modell!



- 2.) Fast alle der derzeit bekannten Exoplaneten wurden auf spektroskopischem Wege durch die periodische Verschiebung ihrer Spektrallinien („Doppler-Wobble“) aufgefunden. Eine kreisende Stimmgabel zeigt ein analoges Verhalten (periodische Änderung der Tonhöhe), wenn sie schnell genug bewegt wird. Wie groß ist die Frequenzänderung, wenn die Stimmgabel an einer 0,5 m langen Schnur einmal pro Sekunde im Kreis gedreht wird? Ist diese Frequenzänderung wahrnehmbar? (Oberhalb von 500 Hz muss die Frequenzänderung mindestens 0,35 Promille betragen, damit eine Tonhöhenänderung wahrnehmbar ist (siehe Diagramm **psychoak8.gif**, Quelle: Uni Wuppertal).
- 3.) Derzeit lassen sich Exoplaneten nachweisen, die ihre Sterne zu einer Umlaufbewegung mit einer Radialgeschwindigkeit von mindestens 5 m/s um den gemeinsamen Schwerpunkt zwingen. Um die Leistungen der Spektroskopie würdigen zu können, sollte man die Messgenauigkeit bezüglich der Wellenlängenverschiebung beispielhaft belegen und durch einen Größenvergleich leichter nachvollziehbar werden lassen. Man berechne die Wellenlängenverschiebung für $\lambda_0=500$ nm bei einer Radialgeschwindigkeit von $v=5$ m/s. Um welches Maß müsste das Spektrum der mit $v=5$ m/s bewegten Quelle relativ zu dem einer ruhenden Quelle verschoben werden, wenn man das Spektrum im Bereich von $\lambda_0=300$ nm bis 800 nm auf einer Länge von 100 km abgebildet sein würde?
- 4.) Der erste Exoplanet wurde auf spektroskopischem Wege entdeckt. Die Interpretation der gegebenen Radialgeschwindigkeitskurve ergibt für 51 Pegasi B eine Mindestmasse von $m_p \cdot \sin i = 8,62 \cdot 10^{26} \text{ kg} \approx 0,45 \cdot M_{\text{Jupiter}}$ (Für den Stern 51 Peg wird eine Sonnenmasse angenommen). Man überprüfe das Ergebnis!



- 5.) Die nebenstehende Abbildung zeigt die im November 2005 gewonnene Lichtkurve des Sterns HD189733, der durch den Transit eines Exoplaneten (HD189733b) kurzzeitig in seinem Licht abgeschwächt wird. Der Stern hat etwa 0,75 Sonnenradien. Man berechne die Größe des Transitplaneten in Jupiterradien.



©: F. Bouchy und Mitarbeiter, Laboratoire d'Astrophysique de Marseille, Observatoire de Haute Provence, http://www.obs-hp.fr/www/nouvelles/courbe_lumiere.jpg.



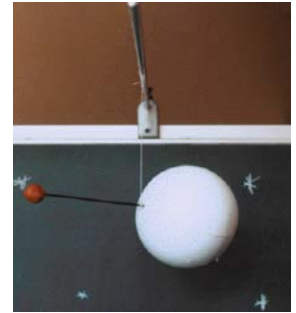
Der Stern HD189733 kann schon mit einem Fernglas ($m=7,7$) nahe beim gut bekannten Hantelnebel beobachtet werden (ca. $0,15^\circ$, d. h. einen halben Monddurchmesser entfernt, siehe Abbildung). ©: F. Bouchy und Mitarbeiter, Laboratoire d'Astrophysique de Marseille, Observatoire de Haute Provence, <http://www.obs-hp.fr/www/nouvelles/fig1.jpg>.

- 6.) Man berechne die Auslenkung der Sonne allein durch Jupiter, die aus 10pc Entfernung gemessen werden kann. Zur Verdeutlichung des Kleinheit des erhaltenen Winkels ist ein Vergleich anzustellen, Dazu ist der Abstand zu ermitteln, aus dem eine Haaresbreite (0,1 mm) unter dem berechneten Winkeldurchmesser erscheint.

Lösungen zu den Aufgaben

[\(→ zurück zum Anfang\)](#)

- 1.) Die Sonne habe in einem Modell einen Durchmesser von 2 m. Wie groß müssen die Modellerde und der Modelljupiter sein und in welchen Abständen zur Modellsonne müssen sie aufgestellt werden? Man ermittle die Lage des Schwerpunkts im System Sonne-Erde und im System Sonne-Jupiter in Realität und im Modell!



Geg.: Durchmesser der Sonne	$D_S = 1,4 \cdot 10^9 \text{ m}$
Erddurchmesser (Äquator)	$D_E = 12.756 \cdot 10^3 \text{ m}$
Jupiterdurchmesser (Äquator)	$D_J = 143.600 \cdot 10^3 \text{ m}$
mittlerer Abstand Sonne-Erde	$r_{SE} = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$
Abstand Sonne-Jupiter	$r_{SJ} = 778,3 \cdot 10^9 \text{ m}$
Sonnenmasse	$m_S = 1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg}$
Erdmasse	$m_E = 5,979 \cdot 10^{24} \text{ kg}$
Jupitermasse	$m_J = 1,89 \cdot 10^{27} \text{ kg}$
Modelldurchmesser der Sonne	$d_S = 2 \text{ m}$

Ges.:

- a.) Modelldurchmesser von Erde und Jupiter (d_E, d_J) und ihre Modellabstände zur Sonne (a_{SE}, a_{SJ})
- b.) Abstand des Sonnenmittelpunkts vom Schwerpunkt (r_S) für System Sonne-Erde und für System Sonne-Jupiter

Lös.: a.) Verhältnissetzung

$$\frac{d_E}{d_S} = \frac{D_E}{D_S} \Rightarrow d_E = \frac{12.756 \cdot 10^3 \text{ m}}{1,4 \cdot 10^9 \text{ m}} \cdot 2 \text{ m} \approx 1,8 \text{ cm},$$

$$\frac{d_J}{d_S} = \frac{D_J}{D_S} \Rightarrow d_J = \frac{143.600 \cdot 10^3 \text{ m}}{1,4 \cdot 10^9 \text{ m}} \cdot 2 \text{ m} \approx 10,3 \text{ cm},$$

$$\frac{a_{SE}}{r_{SE}} = \frac{d_S}{D_S} \Rightarrow a_{SE} = \frac{2 \text{ m}}{1,4 \cdot 10^9 \text{ m}} \cdot 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m} \approx 214 \text{ m},$$

$$\frac{a_{SJ}}{r_{SJ}} = \frac{d_S}{D_S} \Rightarrow a_{SJ} = \frac{2 \text{ m}}{1,4 \cdot 10^9 \text{ m}} \cdot 778,3 \cdot 10^9 \text{ m} \approx 1112 \text{ m}.$$

b.) Schwerpunktsatz und Bahnradienbeziehung

$$m_S \cdot r_S = m_E \cdot r_E, \quad r_{SE} = r_S + r_E \Rightarrow r_S = \frac{\left(\frac{m_E}{m_S} \cdot r_{SE} \right)}{\left(1 + \frac{m_E}{m_S} \right)},$$

$$r_S = \frac{\left(\frac{5,979 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg}} \cdot 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m} \right)}{\left(1 + \frac{5,979 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg}} \right)} \approx 451.000 \text{ m. (in Realität)}$$

weniger als 1/1000 des Sonnenradius (ca. 0,00064fach: ca. 1,3 mm im Modell)

$$m_S \cdot r_S = m_J \cdot r_J, \quad r_{SJ} = r_S + r_J \quad \Rightarrow \quad r_S = \frac{\left(\frac{m_J}{m_S} \cdot r_{SJ} \right)}{\left(1 + \frac{m_J}{m_S} \right)}$$

$$r_S = \frac{\left(\frac{1,89 \cdot 10^{27} \text{ kg}}{1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg}} \cdot 778,3 \cdot 10^9 \text{ m} \right)}{\left(1 + \frac{1,89 \cdot 10^{27} \text{ kg}}{1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg}} \right)} \approx 7,4 \cdot 10^8 \text{ m. (in Realität)}$$

ca. 1,06faches des Sonnenradius (wenig außerhalb der Sonne: ca. 11 cm im Modell)

- 2.) Fast alle der derzeit bekannten Exoplaneten wurden auf spektroskopischem Wege durch die periodische Verschiebung ihrer Spektrallinien („Doppler-Wobble“) aufgefunden. Eine kreisende Stimmgabel zeigt ein analoges Verhalten (periodische Änderung der Tonhöhe), wenn sie schnell genug bewegt wird. Wie groß ist die Frequenzänderung, wenn die Stimmgabel an einer 0,5 m langen Schnur einmal pro Sekunde im Kreis gedreht wird? Ist diese Frequenzänderung wahrnehmbar? (Oberhalb von 500 Hz muss die Frequenzänderung mindestens 0,35 Promille betragen, damit eine Tonhöhenänderung wahrnehmbar ist.)

Geg.: Kreisbahnradius	$l = 0,5 \text{ m}$
Sendefrequenz	$f_S = 2000 \text{ Hz}$
gerade hörbare Frequenzänderung	$\Delta f = 0,00035 \cdot 2000 \text{ Hz} = 0,7 \text{ Hz}$
Schallgeschwindigkeit	$c = 330 \text{ m/s}$

Ges.: Δf für $n=1/s$

Lös.:

Für den ruhenden Beobachter und die bewegte Schallquelle gilt:

$$f_E = f_S \cdot \frac{1}{1 - \frac{v_S}{c}}. \quad \text{Mit } \Delta f = f_S - f_E \text{ und } v_S = 2\pi \cdot 0,5 \text{ m} / 1 \text{ s} \approx 3,14 \text{ m/s} \text{ erhält man}$$

$$\Delta f = f_S \cdot \left(1 - \frac{1}{1 - \frac{v_S}{c}} \right) = 2000 \frac{1}{s} \cdot \left(1 - \frac{1}{1 - \frac{3,14 \text{ m/s}}{330 \text{ m/s}}} \right) \approx -19 \text{ Hz.}$$

Da die bewegte Schallquelle einmal auf den Beobachter zu und einmal wegbewegt wird, beträgt der Frequenzunterschied sogar 38 Hz.

Da die Nachweisgrenze von ca. 1 Hz deutlich überschritten ist, sollte der Frequenzunterschied auf jeden Fall hörbar sein.

3.) Derzeit lassen sich Exoplaneten nachweisen, die ihre Sterne zu einer Umlaufbewegung mit einer Radialgeschwindigkeit von mindestens 5 m/s um den gemeinsamen Schwerpunkt zwingen. Um die Leistungen der Spektroskopie würdigen zu können, sollte man die Messgenauigkeit bezüglich der Wellenlängenverschiebung beispielhaft belegen und durch einen Größenvergleich leichter nachvollziehbar werden lassen. Man berechne die Wellenlängenverschiebung $\Delta\lambda$ für $\lambda_0=500$ nm bei einer Radialgeschwindigkeit von $v=5$ m/s. Um welches Maß müsste das Spektrum der mit $v=5$ m/s bewegten Quelle relativ zu dem einer ruhenden Quelle verschoben werden, wenn man das Spektrum im Bereich von $\lambda_0=300$ nm bis 800 nm auf einer Länge von 100 km abgebildet sein würde?

Geg.: Laborwellenlänge $\lambda_0=500$ nm
 Relativgeschwindigkeit des Sterns $v=5$ m/s
 Lichtgeschwindigkeit $c = 300.000$ km/s

Ges.: $\Delta\lambda$ in Realität und im Modell

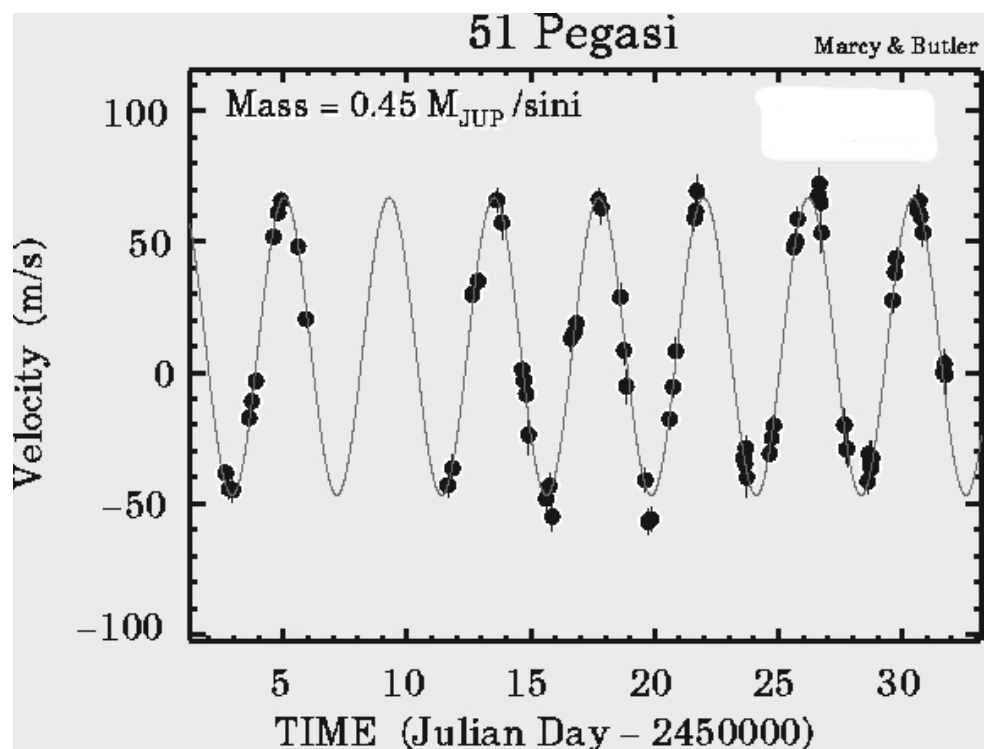
Lös.:

Für Lichtwellen gilt (bei $v \ll c$):

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{v}{c} \Rightarrow \Delta\lambda = \frac{v}{c} \cdot \lambda_0 = \frac{5 \text{ m/s}}{300000 \text{ m/s}} \cdot 500 \cdot 10^{-9} \text{ m} \approx 8 \cdot 10^{-12} \text{ m.}$$

Im Modellmaßstab (800 nm – 300 nm = 500 nm entsprechen 100 km) ergibt sich $\Delta\lambda/500\text{nm} \cdot 100\text{km} = 1,7\text{mm}$.

4.) Der erste Exoplanet wurde auf spektroskopischem Wege entdeckt. Die Interpretation der in Abb. 5 gegebenen Radialgeschwindigkeitskurve ergibt für 51 Pegasi B eine Mindestmasse von $m_p \cdot \sin i = 8,62 \cdot 10^{26} \text{ kg} \approx 0,45 \cdot M_{\text{Jupiter}}$ (Für den Stern 51 Peg wird eine Sonnenmasse angenommen). Man überprüfe das Ergebnis!



Geg.: Sonnenmasse	$m_S = 1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg}$
Jupitermasse	$m_J = 1,89 \cdot 10^{27} \text{ kg}$
Gravitationskonstante	$\gamma = 6,6726 \cdot 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$

Ges.: Planetenmasse in Jupitermassen

Lös.:

$$m_P \cdot \sin i = \frac{m_S^{2/3} \cdot T^{1/3} \cdot V_{\text{Beob}}}{(2\pi \cdot \gamma)^{1/3}}$$

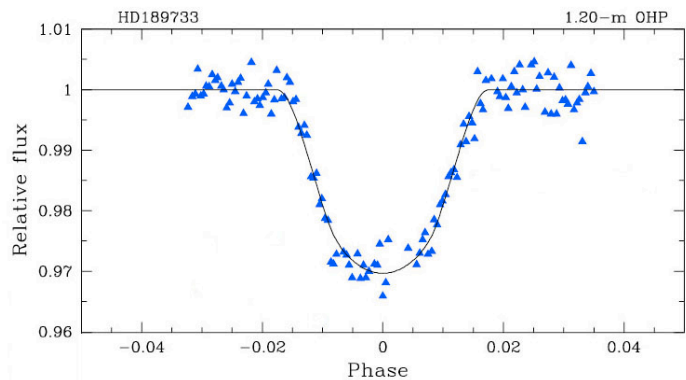
Aus der Radialgeschwindigkeitskurve lässt sich ablesen. $T \approx 4,2 \text{ d}$ und $V_{\text{Beob}} \approx 57 \text{ m/s}$.

$$m_P \cdot \sin i = \frac{(1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg})^{2/3} \cdot (4,2 \cdot 24 \cdot 3600)^{1/3} \cdot 57 \text{ m/s}}{(2\pi \cdot 6,6726 \cdot 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2})^{1/3}} = \frac{6,43 \cdot 10^{23}}{7,4844 \cdot 10^{-4}} \text{ kg} \approx 8,6 \cdot 10^{26}$$

5.) Die nebenstehende Abbildung zeigt die im November 2005 gewonnene Lichtkurve des Sterns HD189733, der durch den Transit eines Exoplaneten (HD189733b) kurzzeitig in seinem Licht abgeschwächt wird. Der Stern hat etwa 0,75 Sonnenradien. Man berechne die Größe des Transitplaneten in Jupiterradien

©: F. Bouchy und Mitarbeiter,

Laboratoire d'Astrophysique de Marseille, Observatoire de Haute Provence, http://www.obs-hp.fr/www/nouvelles/courbe_lumiere.jpg.



Geg.: „Lichteinbruch“ $\Delta S \approx 0,03$

$$R_{\text{Stern}} \approx 0,75 \cdot R_{\text{Sonne}}$$

Durchmesser der Sonne

$$D_S = 1,4 \cdot 10^9 \text{ m}$$

Jupiterdurchmesser (Äquator)

$$D_J = 143.600 \cdot 10^3 \text{ m}$$

$$R_{\text{Sonne}} \approx 9,75 \cdot R_{\text{Jupiter}}$$

Ges.: Radius des Exoplaneten R_{Jupiter} in Jupiterradien

Lös.:

Der Durchmesser des Transitplaneten kann wie folgt berechnet werden:

$$R_{\text{Exoplanet}}^2 = \frac{\Delta S}{S_0} \cdot R_{\text{Stern}}^2 = 0,03 \cdot (0,75 R_{\text{Sonne}})^2$$

$$R_{\text{Exoplanet}} \approx 0,130 R_{\text{Sonne}} \approx 1,27 R_{\text{Jupiter}}$$

6.) Man berechne die Auslenkung der Sonne allein durch Jupiter, die aus 10pc Entfernung gemessen werden kann. Zur Verdeutlichung des Kleinheit des erhaltenen Winkels ist ein Vergleich anzustellen, Dazu ist der Abstand zu ermitteln, aus dem eine Haaresbreite (0,1 mm) unter dem berechneten Winkeldurchmesser erscheint.

Geg.: Sonnenmasse	$m_S = 1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg}$
Jupitermasse	$m_J = 1,89 \cdot 10^{27} \text{ kg}$
Gravitationskonstante	$\gamma = 6,6726 \cdot 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$
Entfernung des Beobachters	$s = 10 \text{ pc}$
	$1 \text{ pc} = 206.265 \text{ AE} = 3,0939 \cdot 10^{16} \text{ m}$
Umlaufzeit von Jupiter	$T = 11,87 \text{ a}$
Haaresbreite	$b = 0,1 \text{ mm}$

Ges.: a.) Winkelauslenkung θ der Sonne durch Jupiter in Bogensekunden
 b.) Abstand s einer Haaresbreite, unter dem diese unter θ erscheint

Lös.:

a.)

$$\hat{\theta} = \left(\frac{\gamma}{4\pi^2} \right)^{1/3} \cdot \frac{m_J}{m_S^{2/3}} \cdot \frac{T^{2/3}}{s} \quad \Rightarrow \quad \theta = \hat{\theta} \cdot 206265''.$$

$$\hat{\theta} = \left(\frac{6,6726 \cdot 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}}{4\pi^2} \right)^{1/3} \cdot \frac{1,89 \cdot 10^{27} \text{ kg}}{(1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg})^{2/3}} \cdot \frac{(11,87 \cdot 365,24 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s})^{2/3}}{10 \cdot 3,0939 \cdot 10^{16} \text{ m}}$$

$$\hat{\theta} = 1,1911 \cdot 10^{-4} \text{ kg}^{-1/3} \text{ m s}^{-2/3} \cdot 11950151 \text{ kg}^{1/3} \cdot 1,6795 \cdot 10^{-12} \text{ s}^{2/3} \text{ m}^{-1} \approx 2,4 \cdot 10^{-9} \approx 5 \cdot 10^{-4}''.$$

b.) zum Vergleich:

$$\tan \theta = \frac{b}{s} \quad \Rightarrow \quad s = \frac{b}{\tan \theta} = \frac{0,1 \text{ mm}}{\tan(0,0005''/3600''/^{\circ})} = \frac{0,1 \text{ mm}}{2,424 \cdot 10^{-9}} \approx 41 \text{ km}.$$

Die durch Jupiter bewirkte Auslenkung der Sonne, die man aus einem Abstand von 10 pc messen könnte, entspricht dem Winkeldurchmesser einer Haaresbreite (0,1 mm) gemessen im Abstand von ca. 41 km. Die Kleinheit dieses Winkels offenbart den gewaltigen Anspruch an die Messtechnik.