Schwarze Löcher – Luftdichte und Supergezeiten

Olaf Fischer (inspiriert durch Prof. Karl-Heinz Lotze)

Im Beitrag von Andreas Müller in **SuW** 5/2010 findet man auf S. 40 folgende grundlegende Aussage: ***„Aus jeder Masse könnte ein Schwarzes Loch werden“***. Dieser Aussage soll im WIS-Beitrag anhand der Fragestellung „Wie stark muss eine vorgegebene Masse eigentlich verdichtet werden, damit ein Schwarzes Loch entstehen könnte?“ in einigen **Aufgaben** nachgegangen werden. Zur Berechnung der Massedichten müssen verschiedene Ausgangswerte auch aus dem **SuW**-Text herausgesucht werden.

Schwarze Löcher sind nicht nur die alles fressenden Monster im Universum, sondern sie sind vermutlich zugleich die „Gravitations-Keime“ für stabile Strukturen, wie unser Milchstraßen-system. Ebenso wie Sterne oder Planeten eignen sich Schwarze Löcher als Zentralmassen für beliebige Orbitobjekte. Doch wenn die Orbits zu nahe an das Schwarze Loch (seinen Ereignishorizont) heranreichen, dann können die umlaufenden Körper durch die Abstands-abhängigkeit der Gravitation (die Gezeitenwirkung) zerrissen werden.

Das Thema ‚Gezeitenkraft’ wird nachfolgend unter der Überschrift „Spaghettisierung – so groß ist die Gezeitenwirkung eines Schwarzen Lochs“ in Rechnungen, in einer Grafik und auch sportlich aufgegriffen.

Übersicht der Bezüge im WIS-Beitrag		
Physik	**Mechanik**	**Gravitationsgesetz, Gezeitenkräfte, Schwarzschildradius, Massendichte**
Astronomie	**Sterne, Galaxien**	**Schwarze Löcher (versch. Masse)**
Fächerverknüpfung	**Astro-Ma, Astro-Sport**	**Formelvereinfachung, Näherungslösung, Streckhang am Reck**
Lehre allgemein	**Kompetenzen, Unterrichtsmittel**	**Umformen und Vereinfachen von Gleichungen, Lesen von Fachtexten (SuW-Beitrag), Arbeitsblatt, Aufgaben lösen (Reorg.)**

Abbildung 1: In der Nähe von Schwarzen Löchern werden die Gezeitenkräfte riesig. Körper, die sich dem Schwarzen Loch nähern, werden von ihm zerrissen. ©: NASA/CXC/M.Weiss, für WIS-Beitrag leicht abgewandelt, http://chandra.harvard.edu/photo/2004/rxj1242/rxj1242_ill_300dpi.jpg.

An dieser Stelle soll auf einige WIS-Beiträge verwiesen werden, die sich dem Thema „Schwarze Löcher“ widmen: „Reiseziel: Schwarzes Loch – Visualisierungen zur Allgemeinen Relativitätstheorie“ (WIS 11/2005), „In den Galaxienkernen - „Von Raubtieren und ihrer Fütterung“ (WIS 11/2006), „Spiel mit dem Schwarzen Loch“ (WIS 12/2007) und „Das Schwarze Loch im Zentrum der Milchstraße“ (WIS 2/2009).

Wie stark muss eine vorgegebene Masse eigentlich verdichtet werden, damit ein Schwarzes Loch entstehen könnte?

(→zurück zum Anfang)


Ute Kraus, Physikdidaktik ,Universität Hildesheim

Im **SuW**-Beitrag 5/2010 heißt es auf Seite 40 (rechte Spalte) „Aus jeder Masse könnte ein Schwarzes Loch werden“. Nötig ist allein, die vorhandene Masse ausreichend kompakt zu machen, d. h. diese auf ein kugelförmiges Raumgebiet zu verdichten, dessen Größe durch den **Schwarzschildradius** (siehe **SuW**, S. 40 rechts unten) charakterisiert wird.

Aufgaben

1.) Berechne die (mittlere) **Massendichte** innerhalb einer Kugel mit dem Schwarzschildradius für verschiedene im **SuW**-Text genannte Schwarze Löcher und trage deine Ergebnisse in die Tabelle ein:

- **a.)** ein Schwarzes Loch, das aus einem Stern mit der Mindestmasse, die für die Entstehung eines Schwarzen Lochs nötig ist, hervorgeht,
- **b.)** das Schwarze Loch, das als eine der Komponenten im Doppelsternsystem Cyg X-1 existiert,
- **c.)** ein Schwarzes Loch, welches sich vermutlich im Zentrum einer ultrahellen Röntgenquelle befindet,
- **d.)** das supermassive Schwarze Loch im Zentrum des Milchstraßensystems
- **e.)** das supermassive Schwarze Loch im Zentrum der Riesengalaxie M87 (6,4 Milliarden Sonnenmassen).

	Masse (in Sonnenmassen*)	Schwarzschildradius (km)	Dichte (in kg/m³)	Vergleich
a.)				
b.)				
c.)				
d.)				
e.)				

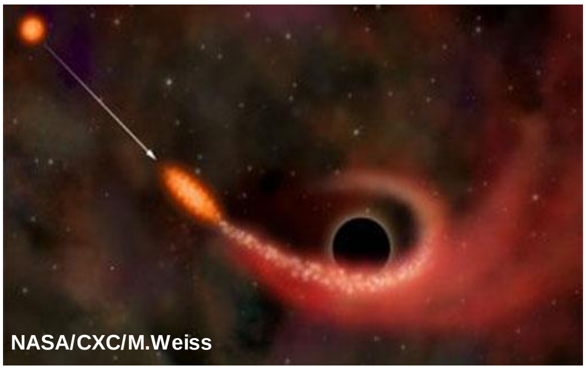
* Sonnenmasse (1 $M_\odot$): rund $2 \cdot 10^{30}$ kg

2.) Vergleiche die erhaltene Massendichte mit den Dichten irdischer oder außerirdischer Materie (Neutronenstern, Blei, Luft; nach Werten bitte in Büchern oder im Internet recherchieren).

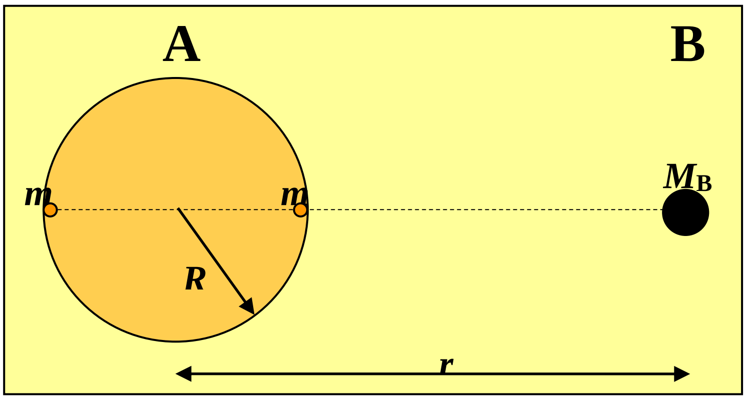
3.) Wenn sich die Masse verdoppelt, dann verdoppelt sich auch der Schwarzschildradius, doch wie ändert sich dann die Dichte?

(→zurück zum Anfang)

Spaghettisierung – so groß ist die Gezeitenwirkung eines Schwarzen Lochs



Genauso, wie Mond und Sonne auf die Erde (und umgekehrt) einwirken, übt auch ein Schwarzes Loch eine Gezeitenwirkung auf einen beliebigen Körper in seiner Nähe aus. Der **Gezeiteneffekt** kann dabei so groß werden, dass man auch von **„Spaghettisierung"** der Körper spricht.



Die maximale Gezeitenwirkung in einem kugelförmigen Körper A (z. B. ein Stern) vom Radius R, der sich im Abstand r zum Körper B mit der Masse M_B befindet, berechnet sich aus der Differenz der Gravitationskräfte auf die Massenelemente m_A, die sich auf der dem Körper B zu- und abgewandten Seite des Körpers A befinden.

Mit Hilfe des Newtonschen Gravitationsgesetzes lässt sich die Gezeitenkraft ΔF nun wie folgt ausdrücken*:

$$\Delta F = \frac{\gamma \cdot M_B \cdot m_A}{r^2} - \frac{\gamma \cdot M_B \cdot m_A}{(r+2R)^2} = \gamma \cdot M_B \cdot m_A \cdot \left(\frac{(r+2R)^2 - r^2}{r^2 \cdot (r+2R)^2} \right).$$

Nach Ausmultiplizieren und Streichen vernachlässigbarer Terme (Annahme: $R << r$) erhält man:

$$\Delta F \approx \gamma \cdot M_B \cdot m_A \cdot \left(\frac{4 \cdot R}{r^3} \right).$$

*Beim Gravitationsgesetz nach Newton handelt es sich um eine Vereinfachung der geometrischen Beschreibung der Gravitation nach der Allgemeinen Relativitätstheorie.

Aufgaben

1.) Zeige, wie die Annahme $R<<r$ zur vereinfachten Endformel (**Näherung**) führt.

2.) Die **Gezeitenkräfte** sind Differenzkräfte im Gravitationsfeld. Dies kann man sich auch in einem Diagramm veranschaulichen, das den Verlauf der Gravitationskraft $\boldsymbol{F}$ eines Schwarzen Lochs auf Massenelemente in Abhängigkeit ihres Abstands zum Zentrum $\boldsymbol{r}$ zeigt (siehe **Arbeitsblatt**).

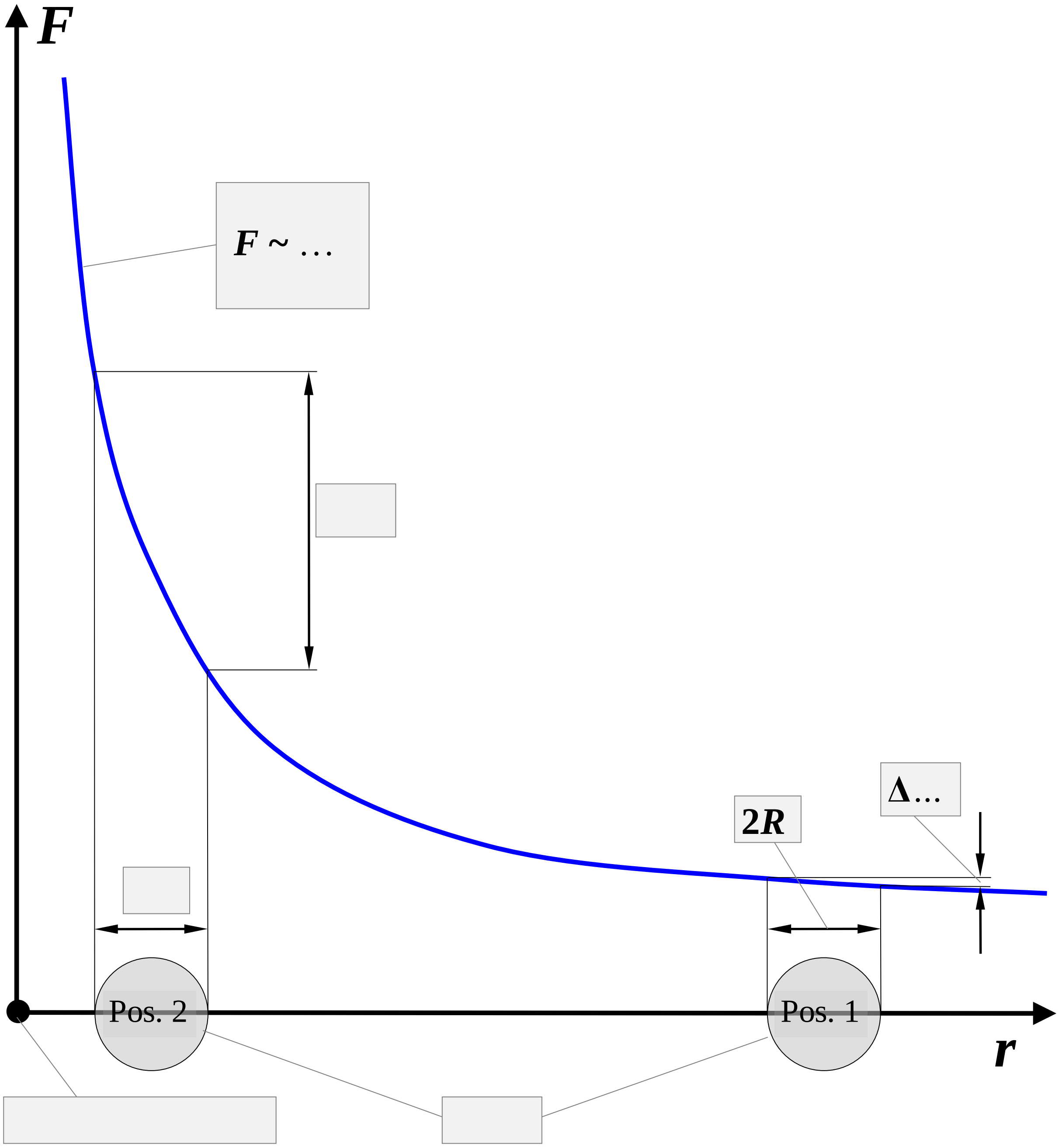
3.) Ein Astronaut (vereinfacht als Hantel betrachtet, Abstand zwischen Oberkörper und Unterkörper $2R$ = 0,8 m mit je m_A = 50 kg), der mit den Füßen voran in ein Schwarzes Loch (M_B) fällt, erlebt im Abstand von r_1 = 10.000 km, dass sein Unterkörper mit ΔF_1 = 40 N mehr angezogen wird als sein Oberkörper. Wie groß ist ΔF_2 im Abstand von r_2 = 1.000 km. (Teilt man den Körper in immer kleinere Massenelemente, so stellt man fest, dass sich die „Gezeitenspannung" im Körper kontinuierlich aufbaut.)

4.) Bestimme für die 5 in der Aufgabe zuvor betrachteten Massen Schwarzer Löcher die Abstände eines Raumschiffs im Orbit um diese, bei deren Unterschreitung dieses von der Gezeitenkraft zerrissen wird. Für die Größe R wird ein Wert von 20 m angenommen. Die zwei jeweils 100 t schweren Raumschiffhälften sind 40 m (in Richtung zum Schwarzen Loch) voneinander entfernt. Die Zerreisskraft habe einen Wert von 10.000 N. Vergleiche die berechneten Mindestabstände mit den jeweiligen Schwarzschildradien.

(→zurück zum Anfang)

Arbeitsblatt: Gravitationsgesetz und Gezeitenkräfte
(grafisch anschaulich)

Mache dir mit Hilfe des Diagramms auf grafische Art und Weise klar, dass die auf einen Stern wirkenden Gezeitenkräfte in der Nähe von Schwarzen Löchern extrem groß werden können. Der Stern ist dazu in zwei Positionen (Abständen) zum Schwarzen Loch dargestellt.
Die passenden Beschriftungen in den hellgrau unterlegten Kästen sind einzufügen oder zu ergänzen.
Ebenso ist der unten stehen Lückentext zu vervollständigen.



Je näher die Massen einander kommen, desto ________ wird die Gezeitenwirkung.
Die Gezeitenkraft ΔF verhält sich nicht ________ ($\Delta F \sim r$) zum Abstand r, sondern indirekt proportional zur ________ des Abstands.

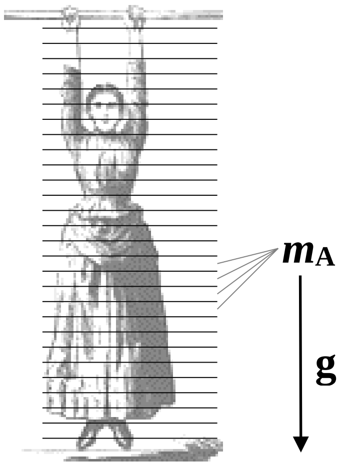
(→zurück zum Anfang)

Für den Sport: Gezeitenkräfte am eigenen Körper erleben

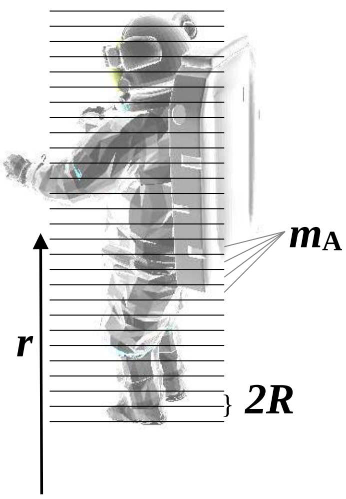
Das Gefühl der Gezeitenspannung, die sich im Körper eines Astronauten in der Nähe eines Schwarzen Lochs aufbaut, lässt sich beim Hängen am Reck in erster Näherung nachempfinden. **Versuche es einmal!**
Durch Anhängen von Massen an die Füße kann der Effekt noch verstärkt werden.

Der Astronaut fällt entweder frei ins Schwarze Loch, oder er befindet sich im Orbit um dieses. Er ist schwerelos und empfindet doch zugleich die Zugspannung in seinem Körper. Beim Hängen am Reck sollte man sich entsprechend vorzustellen, dass man freischwebend, ohne den Halt der Reckstange, den Zug im Körper verspürt.

Wodurch unterscheiden sich beide Fälle?



Hängen am Reck: Jedes Massescheibchen m_A (verschieden groß) wird mit der Kraft $m_A \cdot g$ angezogen. Jedes Massenscheibchen zieht an den über ihm befindlichen Scheibchen – die Zugkraft im Körper wird nach oben hin größer. Am stärksten ist der Zug in den Handgelenken zu spüren, die jeweils etwas das halbe Körpergewicht halten.



Fallen in Schwarzes Loch: Der Astronaut befindet sich im Abstand r zum Schwarzen Loch. Zwischen seinen Massescheibchen m_A (verschieden groß) entsteht jeweils eine Gezeitenkraft, die auch noch vom Abstand $2R$, von der Masse des Schwarzen Lochs und vom Abstand r abhängt. Die Zugspannung verteilt sich auf die gesamte Köperlänge.

(→zurück zum Anfang)

Ergebnisse zu den Aufgaben


Ute Kraus, Physikdidaktik ,Universität Hildesheim

Wie stark muss eine vorgegebene Masse eigentlich verdichtet werden, damit ein Schwarzes Loch entstehen könnte?

Zu 1.) und 2.)

Die Berechnung der Dichte ρ basiert auf dem Schwarzschildradius R_S:

$$R_S = \frac{2 \cdot \gamma \cdot M}{c^2} = \frac{2 \cdot 6{,}6743 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{kg^{-1}\ m^3\ s^{-2}}}{\left(299792458\ \mathrm{m\ s^{-1}}\right)^2} \cdot M,$$

$$R_S \approx 1{,}485 \cdot 10^{-27}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{kg}} \cdot M.$$

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi \cdot R_S{}^3}.$$

	Masse (in Sonnenmassen)	Schwarzschildradius (km)	Dichte (in kg/m³)	Vergleich
a.)	3	$\approx 8{,}9$ km	$\approx 2 \cdot 10^{18}$ kg/m³	Neutronenstern-Dichte
b.)	10	$\approx 29{,}5$ km	$\approx 2 \cdot 10^{17}$ kg/m³	auch noch
c.)	1000	≈ 2955 km	$\approx 2 \cdot 10^{13}$ kg/m³	
d.)	4.000.000	$\approx 11{,}9 \cdot 10^{6}$ km (ca. 1/5 Sonne-Merkur)	$\approx 1{,}2 \cdot 10^{6}$ kg/m³	ca. 100-mal so hoch wie bei Blei
e.)	6.400.000.000	$\approx 19 \cdot 10^{12}$ km (etwa wie Oortsche Wolke)	$\approx 0{,}45$ kg/m³	**1/3 von Luft!**

Zu 3.)

Masse: $M \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot M$

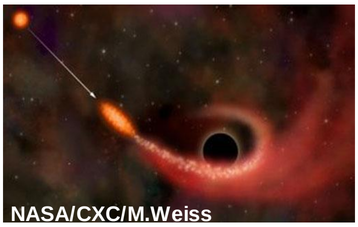
Radius: $R_S \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot R_S$

Massendichte:

$$\left(M / \frac{4}{3}\pi \cdot R_S{}^3\right) \quad \Rightarrow \quad (2 \cdot M) / \frac{4}{3}\pi \cdot (2 \cdot R_S)^3 = \frac{2}{8} \cdot \left(M / \frac{4}{3}\pi \cdot R_S{}^3\right).$$

Eine Verdopplung der Masse hat eine Verdopplung des Schwarzschildradius, jedoch eine Verringerung der Dichte innerhalb der Kugel um den Faktor **1/4** zur Folge.

Spaghettisierung – so groß ist die Gezeitenwirkung eines Schwarzen Lochs



Zu 1.)

$$\Delta F = \frac{\gamma \cdot M_{\mathrm{B}} \cdot m_{\mathrm{A}}}{r^2} - \frac{\gamma \cdot M_{\mathrm{B}} \cdot m_{\mathrm{A}}}{(r+2R)^2} = \gamma \cdot M_{\mathrm{B}} \cdot m_{\mathrm{A}} \cdot \left(\frac{(r+2R)^2 - r^2}{r^2 \cdot (r+2R)^2} \right)$$

Im Nenner kann wegen $r >> R$ wie folgt ersetzt werden: $(r+2R) \approx r$.
Im Zähler würde dies zu Null führen. Zunächst wird hier die 1. Binomische Formel angewendet.

$$\Delta F \approx \gamma \cdot M_{\mathrm{B}} \cdot m_{\mathrm{A}} \cdot \left(\frac{r^2 + 4rR + 4R^2 - r^2}{r^2 \cdot r^2} \right).$$

Die Umformung erbringt

$$\Delta F \approx \gamma \cdot M_{\mathrm{B}} \cdot m_{\mathrm{A}} \cdot \left(\frac{4R \cdot (r+R)}{r^4} \right).$$

Ähnlich wie oben ersetzen wir $(r+R)$ durch r, weil R gegenüber r sehr klein ist:

$$\Delta F \approx \gamma \cdot M_{\mathrm{B}} \cdot m_{\mathrm{A}} \cdot \left(\frac{4R \cdot r}{r^4} \right),$$

$$\underline{\underline{\Delta F \approx \gamma \cdot M_{\mathrm{B}} \cdot m_{\mathrm{A}} \cdot \left(\frac{4R}{r^3} \right)}}.$$

Zu 2.)

Siehe Anhang

Zu 3.)

Geg.: $R = 0{,}4\ \mathrm{m}$
$m_{\mathrm{A}} = 50\ \mathrm{kg}$
$r_1 = 10.000\ \mathrm{km}$
$r_2 = 1.000\ \mathrm{km}$
$\gamma = 6{,}6743 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m^3\ kg^{-1}\ s^{-2}}$
$\Delta F_1 = 40\ \mathrm{N} = 40\ \mathrm{kg\ m\ s^{-2}}$
Ges.: ΔF_2

Bei dieser Aufgabe muss zunächst die Masse des Schwarzen Lochs (M_{B}) bestimmt werden.

$$M_{\mathrm{B}} \approx \frac{\Delta F_1 \cdot r_1^3}{\gamma \cdot m_{\mathrm{A}} \cdot 4R}$$

$$M_{\mathrm{B}} \approx \frac{40\ \mathrm{N} \cdot 10^{21}\ \mathrm{m}^3}{6{,}6743 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m^3\ kg^{-1}\ s^{-2}} \cdot 50\ \mathrm{kg} \cdot 4 \cdot 0{,}4\ \mathrm{m}}$$

$$\underline{M_{\mathrm{B}} \approx 7{,}5 \cdot 10^{30}\ \mathrm{kg}.}$$

Das Schwarze Loch hat eine Masse von ca. 7,5 Sonnenmassen.

Nun kann die Gezeitenkraft ΔF_2 für den Abstand r_2 berechnet werden.

$$\Delta F_2 \approx \gamma \cdot M_{\mathrm{B}} \cdot m_{\mathrm{A}} \cdot \left(\frac{4 \cdot R}{r_2^{\;3}} \right) = 6{,}6743 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m}^3\ \mathrm{kg}^{-1}\ \mathrm{s}^{-2} \cdot 7{,}5 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg} \cdot 50\,\mathrm{kg} \cdot \frac{4 \cdot 0{,}4\,\mathrm{m}}{10^{18}\ \mathrm{m}^3}$$

$$\underline{\underline{\Delta F_2 \approx 40.000\,\mathrm{N}.}}$$

Die Gezeitenkraft wächst sehr schnell (mit der 3. Potenz) bei Annäherung an.

Zu 4.)

Geg.: R = 20 m
M_B = siehe Tabelle
m_A = 100.000 kg
γ = $6{,}6743 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m}^3\ \mathrm{kg}^{-1}\ \mathrm{s}^{-2}$
ΔF_1 = 10.000 N = 10.000 kg m s^{-2}

Ges.: r

$$\Delta F \approx \gamma \cdot M_{\mathrm{B}} \cdot m_{\mathrm{A}} \cdot \left(\frac{4R}{r^3} \right) \quad \Rightarrow \quad r \approx \sqrt[3]{\frac{\gamma \cdot M_{\mathrm{B}} \cdot m_{\mathrm{A}} \cdot 4R}{\Delta F}},$$

$$r \approx \sqrt[3]{\frac{6{,}6743 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m}^3\ \ \mathrm{kg}^{-1}\ \ \mathrm{s}^{-2} \cdot M_{\mathrm{B}} \cdot 100.000\,\mathrm{kg} \cdot 4 \cdot 20\,\mathrm{m}}{10.000\,\mathrm{kg}\ \ \mathrm{m}\ \ \mathrm{s}^{-2}}},$$

$$r \approx \sqrt[3]{\frac{6{,}6743 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m}^3\ \ \mathrm{kg}^{-1}\ \ \mathrm{s}^{-2} \cdot 100.000\,\mathrm{kg} \cdot 4 \cdot 20\,\mathrm{m}}{10.000\,\mathrm{kg}\ \ \mathrm{m}\ \ \mathrm{s}^{-2}}} \cdot \sqrt[3]{M_{\mathrm{B}}} \cdot \sqrt[3]{\mathrm{kg}}\,,$$

$$r \approx 0{,}0038 \cdot \sqrt[3]{M_{\mathrm{B}}}\,.$$

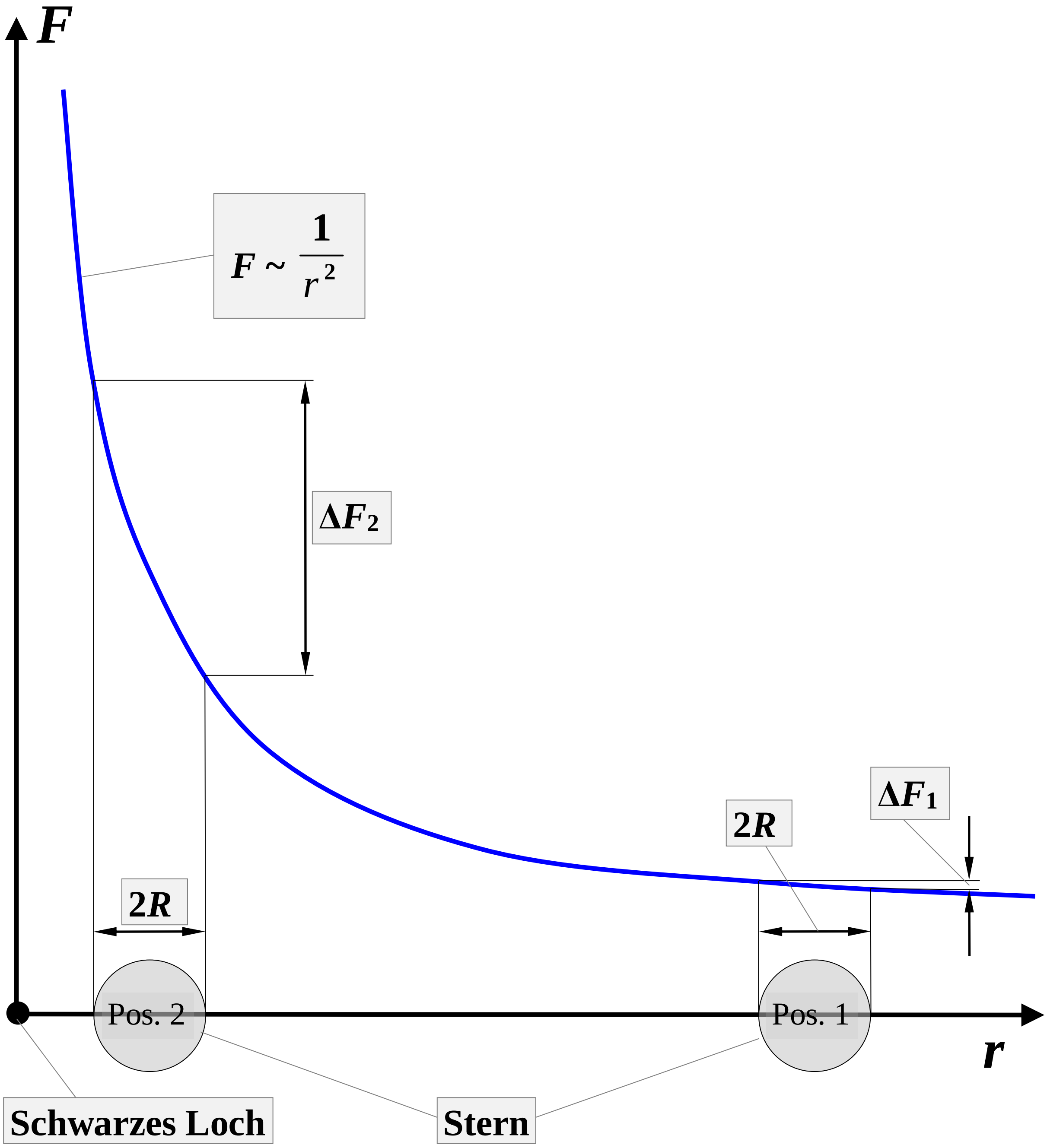
(M_B muss in kg eingesetzt werden!)

	Masse (in Sonnenmassen)	Mindestabstand ***r*** (km)	Schwarzschildradius ***R***s (km)	***r / R***s
a.)	3	≈ 69.000 km	≈ 8,9 km	≈ 7750
b.)	10	≈ 103.000 km	≈ 29,5 km	≈ 3500
c.)	1000	≈ 479.000 km	≈ 2955 km	≈ 162
d.)	4.000.000	≈ $7{,}5 \cdot 10^6$ km	≈ $11{,}8 \cdot 10^6$ km	≈ 0,6
e.)	6.400.000.000	≈ $89 \cdot 10^6$ km	≈ $19 \cdot 10^{12}$ km	≈ 0,000005

Bei supermassiven Schwarzen Löchern liegt der „Zerreissabstand“ für das Raumschiff innerhalb des Schwarzschildradius. Für einen Stern ist der Zerreissabstand vermutlich deutlich größer.
Im Milchstraßenzentrum beobachtet man (schon) Sterne, die sich dem Zentrum bis auf etwa $1{,}8 \cdot 10^{10}$ km nähern (das 1500-fache des Schwarzschildradius).

Arbeitsblatt: Gravitationsgesetz und Gezeitenkräfte
(grafisch anschaulich)

Mache dir mit Hilfe des Diagramms auf grafische Art und Weise klar, dass die auf einen Stern wirkenden Gezeitenkräfte in der Nähe von Schwarzen Löchern extrem groß werden können. Der Stern ist dazu in zwei Positionen (Abständen) zum Schwarzen Loch dargestellt.
Die passenden Beschriftungen in den hellgrau unterlegten Kästen sind einzufügen oder zu ergänzen.
Ebenso ist der unten stehen Lückentext zu vervollständigen.



Je näher die Massen einander kommen, desto stärker wird die Gezeitenwirkung.
Die Gezeitenkraft ΔF verhält sich nicht direkt proportional ($\Delta F \sim r$) zum Abstand r, sondern indirekt proportional zur dritten Potenz des Abstands.