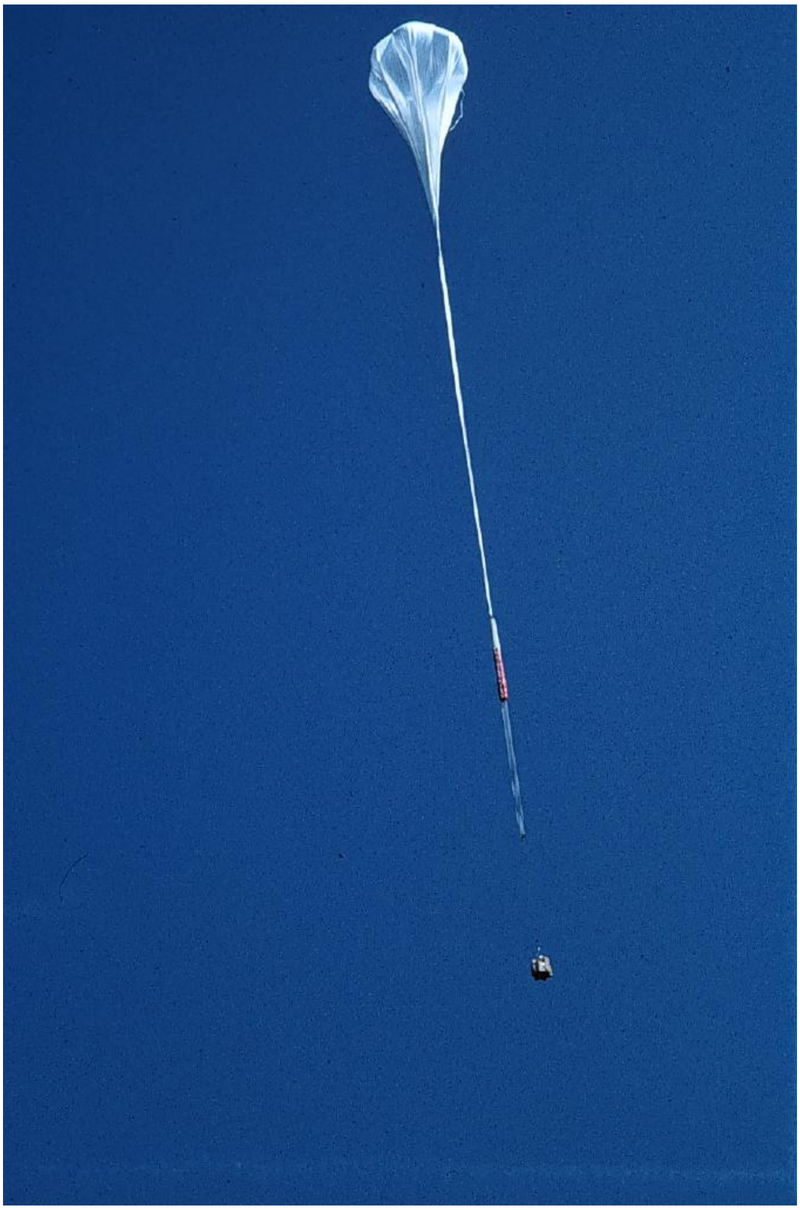
Der Auftrieb von Ballons

Gerhard Herms



In der astronomischen Forschung und bei der Erkundung der Nachbarplaneten leisten Ballons wertvolle Dienste. Wer mehr von ihren Möglichkeiten und Grenzen verstehen möchte, muss sich etwas tiefer mit grundlegenden Zusammenhängen der Hydrostatik und Aerostatik beschäftigen.

Höhenballon kurz nach dem Start. Der Ballon wird auf dem Erdboden nur zu einem kleinen Teil gefüllt – was zunächst seltsam anmutet. Der Forschungsballon trägt ein Hochenergie-Röntgenexperiment zum Nachweis kosmischer Quellen in der Gondel. ©: H. Steinle, MPE, http://www.mpe.mpg.de/2794142/HEXE-Detail.

Fächerverknüpfung im WIS-Beitrag		
Astronomie	**Astropraxis**	**Ballonastronomie**
Physik	**Mechanik (Hydrostatik, Aerostatik)**	**Archimedisches Prinzip, Schweredruck, Auftrieb, Stabile Schwimmlage, Boyle-Mariottesches Gesetz, Barometrische Höhenformel**
Fächer-verknüpfung	**Astro-Mathematik**	**Exponentialfunktion, Integration (Ableitung der Höhenformel)**

Daniel: Früher, als ich noch klein war, dachte ich immer, dass ein beim Kinderfest davongeflogener Luftballon bis zu den Sternen aufsteigt. Heute – wo ich gerade etwas über Ballon-Astronomie gelesen habe – frage ich mich: Wie hoch kann ein Ballon wirklich steigen?

Jan: Das hängt wesentlich vom Ballontyp ab.

Daniel: Das dachte ich mir schon. Wie ich gelesen habe, unterscheidet man dehnbare Gummiballons, Überdruckballons und Gleichdruckballons.

Jan: Ich schlage vor, dass wir uns auf die letzten beiden Typen beschränken.

Daniel: Am sympathischsten sind mir die Überdruckballons, weil sie ein festes Volumen und eine gleichbleibende Masse haben. Daher kann ich sie wie einen festen Körper behandeln, der sich unter Wasser befindet.

Jan: Richtig.

Daniel: Wie schon **Archimedes** wusste, ist der **Auftrieb** im Wasser gleich dem Gewicht der verdrängten Flüssigkeit. Ist es größer als das Gewicht des Körpers, dann steigt der Körper nach oben zur Oberfläche.

Jan: Das gilt sowohl für den Fall des homogenen Köpers, als auch für den des inhomogenen Körpers. Im ersteren Falle muss die Dichte des Körpers kleiner sein als die Dichte der Flüssigkeit, damit er aufsteigt. Ein inhomogener Körper liegt vor, wenn er aus verschiedenen Materialien (z. B. Holz und Eisen) zusammengesetzt ist oder aus einem Material mit Hohlräumen besteht (z. B. ein geschlossener leerer Kanister).

Daniel: Es ist doch wohl so, dass dann die „mittlere Dichte“ betrachtet werden muss, die man dadurch erhält, dass man die Gesamtmasse des Körpers auf das von ihm verdrängte Volumen bezieht.

Jan: Hier ist das Bild eines Becherglases, das sich mit dem Boden nach oben und etwas mit Luft gefüllt unter Wasser befindet. Das von ihm verdrängte Volumen ist durch die dicke Linie hervorgehoben *{Abb. 1 links}*. Bringt man noch mehr Luft unter das Glas, nimmt die Masse des Körpers zwar geringfügig zu, seine „mittlere Dichte“ aber nimmt deutlich ab, weil das verdrängte Volumen zunimmt *{Abb. 1 rechts}*.

Abb. 1

Daniel: Indem man die „mittleren Dichte“ mit der Dichte der Flüssigkeit vergleicht, kann man beurteilen, ob der Körper in der Flüssigkeit untergeht, in ihr schwebt oder aber schwimmt. Allerdings ist das mit dem Schweben wohl mehr von akademischer Bedeutung; denn wo kommt es in der Praxis schon mal vor, dass beide Größen genau übereinstimmen?

Jan: Damit hast du nicht ganz Unrecht, aber denke bitte daran, dass es für Fische und Unterseeboote durchaus normal ist, dass sie lange Zeiten im Wasser schweben. Allerdings wird dieser Zustand durch Regelorgane aufrechterhalten. Beim Fisch ist es die Schwimmblase, beim U-Boot sind es die Tauchtanks.

Daniel: Ich weiß! Die Tauchtanks liegen um den druckfesten zylindrischen Teil des Bootes herum, sind nach unten offen und teilweise mit Wasser und Luft gefüllt. Wenn das Boot etwas höher schweben soll, wird mit Hilfe von Pressluft etwas Wasser aus den Tanks nach außen gedrückt. Das Luftvolumen in den Tanks wird dadurch größer, die „mittlere Dichte" also kleiner.

Jan: So ist es. Nun sollten wir uns aber einmal klarmachen, was eigentlich im Zustand des Schwimmens los ist. Nehmen wir ein möglichst einfaches, gut überschaubares Beispiel! Sagen wir, einen Holzquader, dessen Dichte genau halb so groß ist wie die des Wassers.

Daniel: Der Holzklotz schiebt sich durch die Wasseroberfläche, wodurch das verdrängte Volumen des Wassers abnimmt. Wenn er nach ein paar Bewegungen auf und ab zur Ruhe gekommen ist, befindet sich nur noch die Hälfte seines Volumens unter Wasser, d. h., das verdrängte Volumen des Wassers ist nur noch halb so groß wie vorher und die „mittlere Dichte" des schwimmenden Klotzes folglich genau so groß wie die des Wassers. Es besteht Gleichgewicht zwischen Gewicht und Auftrieb.

Jan: Richtig erkannt! Um zu einer tiefer gehenden Erklärung des Auftriebs zu kommen, wollen wir nun den Druck in der Flüssigkeit betrachten, den so genannten hydrostatischen Druck (auch **Schweredruck** genannt). Was weißt du darüber?

Daniel: Durch die Schwerkraft stellt sich innerhalb einer Flüssigkeit ein Druck ein, der linear mit der Tiefe zunimmt. Ist H der Höhenunterschied zwischen der Messstelle und der freien Oberfläche der Flüssigkeit, dann beträgt der Druck $p = \rho \cdot g \cdot H$, wobei ρ die Dichte und g die Erdbeschleunigung bezeichnet. Dabei ist es gleichgültig, ob es sich um die Flüssigkeit in einem ausgedehnten Becken oder in einer engen verwinkelten und verzweigten Rohrleitung handelt.

Jan: Denken wir an ein Schwimmbecken oder ein stehendes Gewässer! Der Ausgangspunkt für unsere Betrachtung sei der Grund des Beckens bzw. des Gewässers, der um die Strecke H unter dem Wasserspiegel liegt. Könntest du mir eine graphische Darstellung zeichnen, aus der man erkennen kann, wie sich der hydrostatische Druck, ausgehend vom Werte p_0 am Grunde, mit zunehmender Höhe h verändert?

Daniel: Einen Augenblick bitte! – So, das wär's. Der Druck nimmt mit wachsender Höhe h linear ab, bis er bei $h = H$ den Wert $p = 0$ erreicht. *{Abb. 2}*

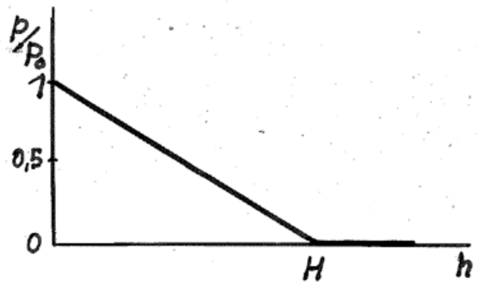


Abb.2

Jan: Könntest du auch eine Höhenformel aufstellen?

Daniel: Auch das ist nicht schwer! Es gilt $p = p_0 \cdot \left(1 - \frac{h}{H}\right)$. (1)

Jan: Daran ist nichts auszusetzen! Nun schau dir bitte mal diese Zeichnung an! Es stellt eine Säule dar mit der Grundfläche A und der Höhe Δh. Sie befinde sich in einer Flüssigkeit mit der Dichte ρ, wobei die Säulenachse vertikal sei. Was kannst du über die Druckkräfte aussagen, die auf Grund- und Deckfläche einwirken?

Daniel: Die Grundfläche erfährt eine Kraft nach oben und die Deckfläche eine Kraft nach unten, die aber kleiner ist. Das Resultat ist eine nach oben gerichtete Kraft vom Betrag $A \cdot \rho \cdot g \cdot \Delta h$.

Jan: Das könntest du noch etwas anders schreiben, wenn du die erste und die letzte Größe zusammenfasst.

Danìel: Ach so! A mal Δh ist das Volumen V des Körpers. Ich kann noch weiter vereinfachen; denn V mal ρ ist die Masse m, und $m \cdot g$ ist natürlich das Gewicht.

Jan: Wovon?

Daniel: Wovon? – Ach ja! Das Gewicht der Flüssigkeit, nicht das des Körpers.

Jan: Das wollte ich hören! - Ich finde es bemerkenswert, dass wir von Kräften, die auf die Oberfläche des Körpers wirken, ausgingen und nun gefunden haben, dass sie durch Volumenkräfte ausgedrückt werden können, nämlich durch das Gewicht der vom Körper verdrängten Flüssigkeit.

Daniel: Erst jetzt ist mir der Zusammenhang richtig klargeworden.

Jan: Aber nun ein weiterer wichtiger Gedanke: Du kannst dir jeden beliebigen Körper aus Volumenelementen aufgebaut denken, die säulenförmig sind, sich in vertikaler Richtung erstrecken und genügend kleine Grundflächen haben. Jedes dieser Volumenelemente erfährt eine Auftriebskraft. Alle diese Kräfte ergeben zusammen die resultierende Auftriebskraft des gesamten Körpers. Könntest du mir sagen, wo diese am Körper angreift?

Daniel: Hm! Wenn du mich vorhin nicht auf die Beziehung zwischen Oberflächenkraft und Volumenkraft aufmerksam gemacht hättest, würde ich jetzt antworten: Woher, zum Kuckuck, soll ich wissen, wo die Resultierende der vielen kleinen Druckkräfte verläuft? Da ich sie aber als die Gewichtskräfte der vielen kleinen Volumenelemente ansehen kann, antworte ich dir: Klar, die resultierende Auftriebskraft greift im Schwerpunkt der verdrängten Flüssigkeitsmasse an und ist dem Betrage nach gleich ihrem Gewicht. Einen Unterschied gibt es allerdings: Die Kraftrichtung ist entgegengesetzt zu der des Gewichtes.

Jan: Bravo! Mit diesem Wissen kannst du die Frage beantworten, welche Lage ein völlig unter Wasser befindlicher oder auch ein schwimmender Körper einnimmt. Beschränken wir uns auf homogene Körper. Denken wir an einen Quader mit der Gestalt eines Ziegelsteins!

Daniel: Wenn er völlig unter Wasser ist, fallen Körperschwerpunkt und Schwerpunkt der verdrängten Flüssigkeit exakt zusammen. Er kann in jeder Lage existieren…

Jan: …wenn wir davon absehen, dass bei steigenden oder sinkenden Körpern dynamische Kräfte auftreten, die versuchen, den Körper quer zur Bewegungsrichtung zu stellen.

Daniel: Beim schwimmenden homogenen Körper liegt der Körperschwerpunkt grundsätzlich höher als der Schwerpunkt der verdrängten Flüssigkeit, den ich als Unterstützungspunkt ansehe. Da wir mal gelernt haben, dass das Gleichgewicht labil ist, wenn der Schwerpunkt des Körpers über dem Unterstützungspunkt liegt, bin ich jetzt verunsichert.

Jan: Ich weiß, dass so etwas in manchen Schulbüchern steht. Das gilt nur für bestimmte Spezialfälle, wie z. B. ein aufgehängtes Wandbild. Von den zwei Schwimmlagen, die in diesem Bild dargestellt sind, ist die linke labil, die rechte aber stabil *{Abb. 3}*. Ein Hinweis darauf ist schon die Tatsache, dass im rechten Bild der Körperschwerpunkt dem Schwerpunkt der verdrängten Flüssigkeit näher ist als im linken Bild. Das bedeutet, dass die potentielle Energie des Körpers rechts kleiner ist als links. Wenn du es noch genauer wissen willst, verweise ich dich auf http//de.wikipedia.org/wiki/Metazentrum.

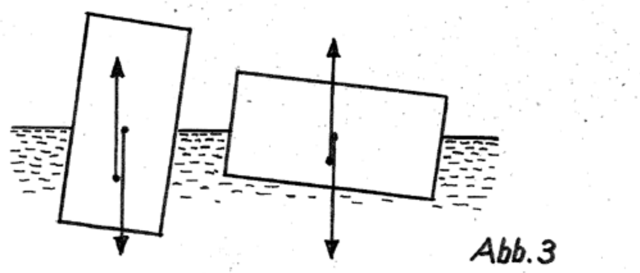


Abb. 3

Daniel: Im Moment interessiert mich mehr der Auftrieb in der Atmosphäre.

Jan: Du hast Recht. Der wichtigste Unterschied zur Flüssigkeit ist der, dass Gase sich stark zusammendrücken lassen. Wir setzen jetzt voraus, dass Temperaturunterschiede in der Atmosphäre vernachlässigbar sind.

Daniel: Jeder, der schon einmal mit Flugzeug unterwegs war und nicht immer geschlafen hat, wenn Durchsagen kamen, weiß, dass das eine schlechte Voraussetzung ist.

Jan: Wir bleiben trotzdem bei dieser Voraussetzung. Dann können wir das **Boyle-Mariottesche Gesetz** anwenden.

Daniel: Das heißt: $p \cdot V = \text{const}$ (2)

Jan: Leite daraus eine Aussage über die Dichte ab!

Daniel: Da $V = \frac{m}{\rho}$ ist und wir eine konstante Masse m betrachten, gilt $\frac{p}{\rho} = \text{Const}$. (3)

Jan: Ausgezeichnet! Das werden wir gleich brauchen, wenn wir den Druck in der Höhe h über dem Erdboden berechnen wollen; denn wir müssen ja berücksichtigen, dass die unteren Luftschichten durch die darüber liegenden zusammengepresst werden und eine höhere Dichte aufweisen. Am Erdboden ist die Luftdichte $\rho_0 = 1{,}295 \cdot \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ bei einem Luftdruck von $p_0 = 101{,}3 \cdot 10^3 \cdot \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$.

In der Höhe h ist die Dichte gegeben durch $\rho = \frac{\rho_0}{p_0} \cdot p$. (4)

Wenn wir von diesem Niveau um ein sehr kleines Stück dh auf ein benachbartes Niveau steigen, sinkt der Druck um einen winzigen Betrag dp ab. Könntest du diesen berechnen?

Daniel: Nein.

Jan: Auch nicht, wenn ich dir sage, dass wir bei dieser kleinen Höhenänderung die Dichte als konstant ansehen können?

Daniel: Dann haben wir ja Verhältnisse wie bei Flüssigkeiten, und ich würde $\mathrm{d}p = \rho g \cdot \mathrm{d}h$ hinschreiben.

Jan: Fast richtig! Du musst nur noch ein Minuszeichen einfügen, so dass bei einer Höhenzunahme (positives dh) eine Druckabnahme herauskommt, dp also kleiner 0 ist. Indem wir gleich noch ρ ausdrücken, finden wir $\mathrm{d}p = -\frac{\rho_0}{p_0} \cdot g \cdot p \cdot \mathrm{d}h$ (5)

Daniel: Ich kann mir schon vorstellen, wie es weitergeht. Ich muss mir den Raum zwischen Erdboden und der Höhe h mit dicht auf dicht folgenden, durchweg sehr dünnen Schichten gefüllt denken, für jede den eben hergeleiteten Ausdruck berechnen und alle aufsummieren.

Jan: Anders ausgedrückt: Du musst **integrieren**! Nach Trennung der Variablen bekommen wir aus unserer letzten Gleichung $\int \frac{dp}{p} = \frac{-\rho_0}{p_0} g \cdot \int dh$ und daraus $\ln p = \frac{-\rho_0}{p_0} g \cdot h + \text{const}$.

Indem wir beachten, dass für h = 0 der Druck p den Wert p_0 haben muss, können wir uns von der Integrationskonstanten freimachen und wir erhalten nach einer kleinen Umrechnung das

Endergebnis $p = p_0 \cdot \exp\left(\frac{-\rho_0}{p_0} \cdot g \cdot h \right)$. (6)

Daniel: Ich nehme an, das ist die berühmte **barometrische Höhenformel**.

Jan: Ganz recht! Ihre grafische Darstellung *{Abb.4}* ist das Analogon zu der Kurve, die du vorhin für die Hydrostatik aufgezeichnet hattest *{vergleiche Abb. 2!}*.

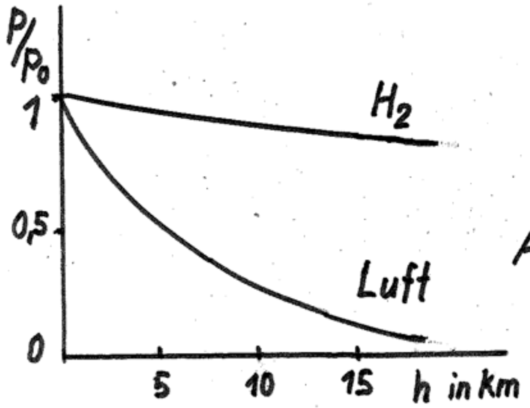


Abb. 4

Daniel: Aber warum sind da zwei Kurven eingezeichnet?

Jan: Die eine gilt für Luft und die andere für Wasserstoff.

Daniel: Verstehe! Das kommt davon, dass im Exponenten die Dichte des betreffenden Gases steht. Die Kurve fällt umso schneller ab, je schwerer das Gas ist.

Jan: Ich möchte ergänzen, dass die Kurve *{Abb. 4}* auch genutzt werden kann, um die Veränderung der Dichte mit der Höhe zu beschreiben.

Daniel: Das geht aus der Gleichung (3) hervor.

Jan: Nun wissen wir genug, um auf deine eingangs gestellte Frage einzugehen. Da es uns um prinzipielle Dinge geht, wollen wir Wert auf Einfachheit und Überschaubarkeit legen, auch wenn die Praxis etwas anders aussieht. Wir beginnen mit dem Überdruckballon, den wir uns würfelförmig mit einer Kantenlänge von 1m vorstellen. Er stehe zunächst ohne Falten und Einbeulungen auf der Erde, völlig gefüllt mit Wasserstoff unter einem Druck, der nur ganz geringfügig größer ist als p_0. Das Gewicht der dünnen, undehnbaren Hülle sei vernachlässigbar, eine Traglast nicht vorhanden. Wie hoch steigt der Ballon?

Daniel: Durch die Vernachlässigungen ist das Problem kinderleicht zu lösen. Der Ballon steigt zunächst auf, weil seine „mittlere Dichte" (die fast vollständig der Gasdichte des Wasserstoffs ρ_0 entspricht!) kleiner ist als die der umgebenden Luft. – Einen kleinen Moment, bitte! - Wie ich eben meinem Taschenrechner entnehme, hat das Steigen ein Ende, wenn eine Höhe von 21,3 km erreicht ist, weil dann die Dichte der Luft auf die „mittlere Dichte" des Ballons abgesunken ist.

Jan: Richtig erkannt! Mit realen Ballonhüllen und Traglasten liegt die maximale Steighöhe natürlich noch tiefer. Überdruckballons eignen sich nicht für Höhenrekorde, zeichnen sich aber dadurch aus, dass sie sehr lange in immer gleichbleibender Höhe schweben können. Dabei hat das Traggas einen deutlichen Überdruck gegenüber der Umgebung.

Daniel: Anders als ein leichter Körper unter Wasser sucht sich jeder Ballon eine bestimmte Höhe, in der er im Gleichgewicht schweben kann. Welche das ist, hängt vom Gewicht der Hülle und vor allem von der Zuladung ab.

Jan: Ja.

Daniel: Wie ich in dem Artikel gelesen habe, werden astronomische Instrumente ausschließlich mit Gleichdruckballons in die hohe Erdatmosphäre getragen. Was ist denn hier anders?

Jan: Stell dir eine undehnbare Hülle in Form einer quadratischen Säule von 1 m^2 Querschnitt und 100 m Höhe vor, die so in einem Schacht hängt, dass nur das obere Ende 1m hoch aus dem Erdboden ragt. Nur dieser Teil ist mit Wasserstoff gefüllt, der offen an Luft grenzt, welche die übrigen 99 m ausfüllt. Die Bodenfläche der Hülle hat eine Öffnung.

Daniel: Das Wasserstoffgas steht also unter denselben Bedingungen am Start wie bei dem eben betrachteten Überdruckballon. Das durch den Wasserstoff verdrängte Luftvolumen erzeugt denselben Auftrieb wie vorhin. Vorausgesetzt, die 100 m lange Hülle ist nicht zu schwer, wird sich der Ballon nach oben in Bewegung setzen…

Jan: …und jetzt passiert etwas Entscheidendes: Mit abnehmendem Druck tritt unten mehr und mehr Luft aus und die Grenze zwischen Wasserstoff und Luft schiebt sich nach unten. In welcher Höhe h hat sich das Wasserstoffgas bis zum Boden ausgedehnt?

Daniel: Nach dem **Boyle-Mariotteschen Gesetz** ist das der Fall, wenn der Luftdruck in der Atmosphäre auf den hundertsten Teil abgefallen ist. Aus der barometrischen Höhenformel berechnet sich damit eine Höhe von 36,8 km.

Jan: Bis in diese Höhe bleibt der Auftrieb konstant; denn das Gewicht der verdrängten Luft (gegeben durch $V \cdot \rho \cdot g$) bleibt konstant, solange unten noch kein Wasserstoff austritt. Nehmen wir an, der Ballon wäre bis auf eine Höhe von 5,4 km gestiegen, dann ist die Dichte ρ der Luft nach der barometrischen Höhenformel auf die Hälfte gefallen, gleichzeitig aber das vom Wasserstoff verdrängte Volumen V auf das Doppelte angewachsen.

Daniel: Wenn noch größere Höhen erreicht werden sollen, müsste unser Ballon noch länger gemacht werden als 100 m, nicht wahr?

Jan: Im Prinzip ja; aber das hat natürlich technische Grenzen. Um in eine Höhe von 55 km vorzudringen, müsste unsere quadratische Säule schon 1000 m hoch sein. Während es beim Überdruckballon eine prinzipielle obere Grenze gibt, die nicht überschritten werden kann, hängt die größte Steighöhe des Gleichdruckballons davon ab, was materialtechnisch und konstruktiv machbar ist.

Daniel: Das ist gut so, denn es bleibt die Hoffnung.