

## Das Heterodynprinzip in GREAT – oder warum Schlümpfe Probleme beim Telefonieren haben

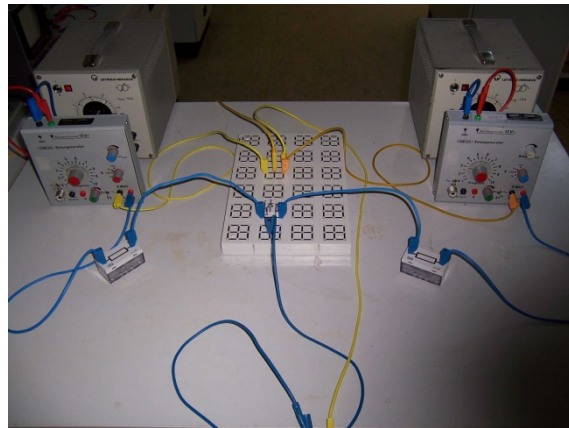
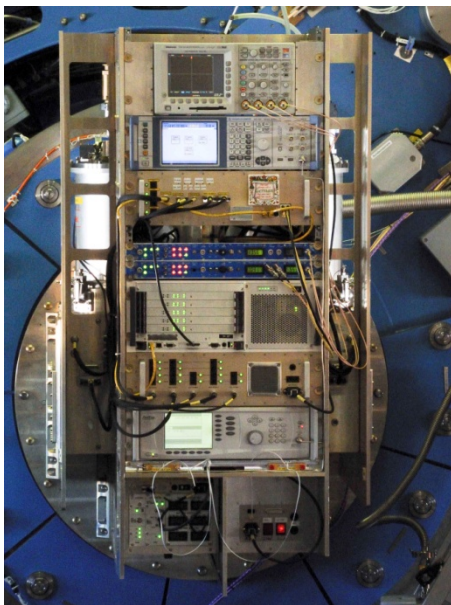
In Bezug auf den SuW-Beitrag „Mit SOFIA zu den Sternen“ / Blick in die Forschung (SuW 10/2011)

Wolfgang Wieser

Im vorliegenden Material wird mit Hilfe von Experimenten und Analysesoftware gezeigt, wie Signale, die mit bestehenden Technologien bzw. auf Grund physikalischer Grenzen nur unzureichend ausgewertet werden können, durch das Heterodynprinzip doch noch entschlüsselt werden können. Hiermit werden vor allem Kompetenzen im Bereich des Problemlösens und des strukturierten sowie fächerübergreifenden Arbeitens entwickelt. Darüber hinaus werden Grundtechniken wissenschaftlichen Arbeitens/Experimentierens, Fachmethodenkompetenz und Fachwissen vermittelt.

Der Detektor GREAT im Flugzeuobservatorium SOFIA analysiert THz-Signale aus dem Weltall. Weder die Übertragung noch die hoch aufgelöste spektroskopische Analyse kann am Originalsignal vorgenommen werden, da technische Probleme und physikalische Randbedingungen eine direkte Verarbeitung von THz Signalen einschränkt. Eine Reduzierung dieser Frequenzen um einen Faktor 1000 ist notwendig und wird durch das Heterodynprinzip erreicht.

Mit dem vorliegenden Material wird Schülern aufgezeigt, dass auch im täglichen Leben Umwege gegangen werden müssen um technische Schwierigkeiten und/oder physikalische bzw. physiologische Grenzen zu überwinden. Ein Beispiel ist die Addition bzw. Subtraktion zweier Frequenzen und damit die Erzeugung einer neuen Frequenz um eigentlich zu hohe Töne trotzdem über die Telefonleitung zu übertragen. Mit Hilfe von akustischen Beispielen und der Analyse derselben sowie elektronischen Experimenten lernen sie diese Prinzipien kennen, die sie in die Lage versetzen, z.B. Ultraschall-Laute von Fledermäusen hörbar zu machen.



**Links:** Der Heterodynempfänger für THz-Frequenzen GREAT auf SOFIA (Quelle: Wieser). Die einkommenden THz-Signale werden mit lokal erzeugten Signalen gemischt und so in den GHz-Bereich verschoben.

**Oben:** Ein Schülerexperiment zur Verschiebung von kHz-Frequenzen nach einigen Hundert Hertz.

Übersicht der Bezüge im WIS-Beitrag		
Physik	Schwingungen und Wellen, Elektromagnetismus	Elektromagnetische Schwingungen, Halbleitertechnik, Mischer
Astronomie	Astropraxis	Beobachtungsverfahren, Infrarotastronomie
Fächerverknüpfung	Astro-Mathematik	trigonometrische Funktionen (Zusammenhänge)
Lehre allgemein	Kompetenzen (Fachwissen, Erkenntnisgewinnung und Wertung)	Aufbau und Auswertung von Experimenten, Grundlagen von Schwingungen und Wellen sowie elektronischen Schaltungen.

## Das Heterodynprinzip in GREAT

### – oder warum Schlümpfe Probleme beim Telefonieren haben

#### Wissenschaftliche Ausgangslage

Die Flugzeugsternwarte SOFIA (Stratosphären-Observatorium für Infrarot-Astronomie) beobachtet mit Hilfe eines 2,5-m-Teleskops das infrarote Weltall. Dabei fliegt es in bis zu 14 km Höhe, um dem atmosphärischen Wasserdampf zu entfliehen, der am Erdboden einen Großteil der von SOFIA beobachteten Infrarotstrahlung fast völlig absorbiert. Eine Flugzeugsternwarte hat gegenüber einem Beobachtungssatelliten den Vorteil, dass je nach wissenschaftlicher Fragestellung unterschiedliche Empfänger im Fokus des Teleskops angebracht bzw. neueste Technologien eingesetzt werden können. Ein Beispiel für einen solchen Empfänger ist GREAT (German Receiver for Astronomy at Terahertz Frequencies), der von einem Konsortium deutscher Forschungsinstitute unter Leitung von Rolf Güsten vom MPI für Radioastronomie in Bonn entwickelt und gebaut wurde. GREAT hat eine spektrale Auflösung  $\lambda/\Delta\lambda$  von  $10^6$  bis  $10^7$  (entspricht einer Geschwindigkeitsauflösung von etwa 0,5 km/s) und kann gleichzeitig zwei Frequenzbereiche untersuchen. Dabei kann aus vier Frequenzbändern gewählt werden:

Der Bereich mit den kleinsten Frequenzen zwischen 1,25 und 1,5 THz lässt die Suche u. a. nach hoch angeregten Rotationsübergängen von CO zu, das im warmen interstellaren Medium zu finden ist, ebenso wie  $N^+$ . Auch  $H_2D^+$  als Indikator für kalte Molekülwolken kann in diesem Frequenzbereich identifiziert werden.

Der Frequenzbereich zwischen 1,8 und 1,92 THz wurde für die Detektion der Strahlung des Feinstrukturübergangs von  $C^+$  gewählt. Sie ist eine der wichtigsten Kühllinien und die hellste Linie im Milchstraßen-Spektrum im submm-Bereich und gibt einen detaillierten Einblick in Sternentstehungsgebiete. Im mittleren Frequenzbereich zwischen 2,4 und 2,7 THz lässt sich deuterierter, molekularer Wasserstoff HD bzw. OH nachweisen. Die Messung des HD Übergangs in den Grundzustand erlaubt die Bestimmung des Anteils von Deuterium in der Milchstraße und anderer, naher Galaxien. Die Deuterium-Häufigkeit ist ein direktes Maß für die Sternentstehungsgeschichte einer Galaxie. Das Hydroxyl-Radikal OH ist eines der wichtigsten Moleküle in der interstellaren Chemie, da es bei der Bildung von Wasser eine entscheidende Rolle spielt.

Die höchsten Frequenzen im Bereich von 4,7 THz sind für die Beobachtung des Feinstrukturübergangs von neutralem atomarem Sauerstoff ausgelegt. Diese Linie ist eine sehr wichtige Kühllinie im dichten interstellaren Medium und hilft die physikalischen Bedingungen in dichten photodissoziierten Regionen um massive junge Sterne zu untersuchen.

Um die benötigte spektrale Auflösung bei, für Infrarotbeobachtungen relativ großen Wellenlängen zu erhalten, müssten die Spektrographen sehr groß konzipiert werden. Sie hätten kaum Platz in einem Flugzeug und wären unmöglich in einem Satelliten unterzubringen. Auch die Signalübertragung von THz-Signalen ist mit großen Verlusten verbunden, da weder Koaxialkabel noch Hohlleiter für diese Frequenzen optimal ausgelegt sind. Die Signalfrequenz ist für die heutige Technik zu hoch um adäquat verarbeitet zu werden. Um eine optimale Leistungsfähigkeit des Empfängers zu erreichen, ist daher eine Verkleinerung der Signalfrequenz hinab in den GHz-Bereich notwendig.

Eine Lösung stellt das Heterodynprinzip dar, das u. a. auch in der Rundfunktechnik angewendet wird. Hierbei wird das zu untersuchende hochfrequente Signal (RF) mit einem künstlich erzeugten Signal konstanter Frequenz (LO) gemischt. Dieses Signal wird von einem lokalen Oszillator (daher die Abkürzung LO) erzeugt. Durch die Mischung mit Hilfe eines elektronischen Bauteils enthält das resultierende Signal neben den Harmonischen der ursprünglichen Frequenzen (RF & LO) auch noch Anteile bestehend aus der Summenfrequenz (RF + LO) und der Differenzfrequenz (RF - LO). Durch geeignete Filter lässt sich die Differenzfrequenz selektieren und mit erprobten Methoden aus der GHz-Technik weiterverarbeiten und spektroskopieren.

Im Rahmen der Schulphysik sind Versuche im THz- bzw. GHz-Bereich nur schwer durchzuführen, da entsprechende Analysegeräte (Oszilloskope, Frequenzgenerator etc.) für GHz-Frequenzen unverhältnismäßig teuer sind. Auch die Anschaulichkeit leidet bei derart hohen Frequenzen. Deswegen wird in den folgenden Experimenten die zu bearbeitende Frequenz in den kHz-Bereich verschoben, da alle beteiligten Frequenzen (RF, LO, RF + LO, RF - LO) einfach über einen Lautsprecher hörbar und erfahrbar gemacht werden können.

### Einstieg (erweitertes Freihandexperiment)

Das Problem, dass die Übertragung und Detektion von Signalen ihre Grenzen hat, können Schüler leicht im Bereich der Akustik erfahren. Mittels eines Signalgenerators lässt sich leicht herausfinden, wessen Empfänger (Ohr) die höchste Frequenz detektieren kann. Wie könnte man diesen höchsten Ton für jeden hörbar machen? Des Weiteren ist den Schülern bekannt, dass eine Stimme durch das Telefon anders klingt als normal. Scheinbar hat die Übertragung von Signalen über die Telefonleitung Qualitätseinbußen zur Folge. Diese können mit Hilfe der kostenlosen Audiosoftware Audacity simuliert und analysiert werden: Im Menü *Effekt* können mit Hilfe des *Equalizers* die gewünschten Frequenzbereiche so gedämpft werden, dass ein aufgenommenes Signal wie aus dem Telefon klingt. Dazu muss bekannt sein, dass das Telefon nur den Frequenzbereich zwischen 300 Hz und 3400 Hz passieren lässt. Im Zusatzmaterial sind zwei Aufnahmen einer tiefen (E.T.) und einer hohen Stimme (Schlumpf) zu finden, die nach dem Passieren des Frequenzfilters deutlich verändert klingen. Während E.T. keine Probleme mit der Qualität der übertragenen Botschaft hat, wird ein Großteil der Schlumpfsprache herausgefiltert, was die Lautstärke des Signals stark dämpft. Ein Telefon eignet sich somit nicht für die Übertragung sehr hoher Frequenzen.

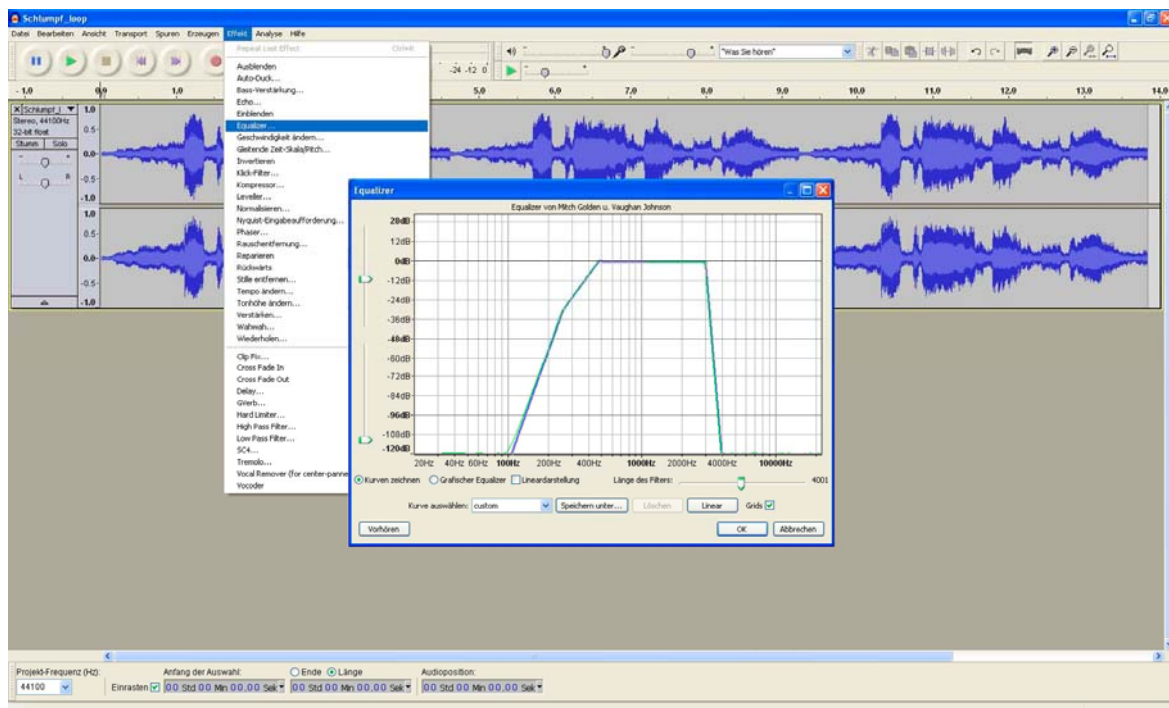


Abbildung 1: Simulation des Frequenzverlaufs eines Telefons mit Hilfe des Equalizers der Software Audacity.

### Probleme bei THz-Signalen

Das Signal, das mit dem Teleskop auf SOFIA empfangen, dann weitergeleitet und vom Empfänger verarbeitet wird, liegt in einem Frequenzbereich, der etwa eine Milliarde mal höher ist, als der eben angesprochene. Eine Telefonleitung fällt damit für eine Signalübertragung aus. Generell ist eine Signalweiterleitung mit Kupferkabeln, Koaxialkabeln (aus der Satellitentechnik bekannt) oder Hohlleitern im THz-Bereich mit sehr großen Verlusten verbunden. Für eine verlustarme Transmission durch Lichtwellenleiter ist die Frequenz allerdings zu niedrig.

Daneben ist die gewünschte hochaufgelöste spektroskopische Zerlegung  $g$  ( $\lambda/\Delta\lambda = 10^6 - 10^7$ ) des Signals im THz-Bereich mit einem kompakten Spektrometer, der in einem Flugzeug oder Satelliten untergebracht ist, unmöglich.

### Herleitung

Die folgende Herleitung ist für Mittelstufenschüler zu schwierig, kann aber bei interessierten Oberstufenschülern eingesetzt werden:

Die Lichtintensität hinter einem Gitter mit N beleuchteten Spalten und einem Spaltabstand d, die man unter einem Winkel  $\alpha$  beobachtet, lässt sich darstellen als:

$$I(\alpha) = \frac{I(0)}{N^2} \left[ \frac{\sin^2 \left( \frac{N\pi d \cdot \sin(\alpha)}{\lambda} \right)}{\sin^2 \left( \frac{\pi d \cdot \sin(\alpha)}{\lambda} \right)} \right]$$

Ist man an den Nullstellen der Intensität (Nebenminima) interessiert, sucht man am einfachsten nach den Werten von  $\alpha$ , bei denen das Argument des  $\sin^2$  im Zähler ein ganzzahliges Vielfaches von  $\pi$  ist:

$\sin(\alpha) = \frac{k\lambda}{Nd}$ ;  $k \in \mathbf{N}$ . Bei  $k=0$  und  $k=N$  hat sowohl der Zähler, als auch der Nenner in  $I(\alpha)$  eine Nullstelle, die zu einem Maximum führt. Am Beispiel für  $N=4$  wird deutlich:

$\alpha$	0	$\sin(\alpha) = \frac{\lambda}{Nd}$	$\sin(\alpha) = \frac{2\lambda}{Nd}$	$\sin(\alpha) = \frac{3\lambda}{Nd}$	$\sin(\alpha) = \frac{4\lambda}{Nd}$	$\sin(\alpha) = \frac{5\lambda}{Nd}$
$I(\alpha)$	Maximal	0	0	0	Maximal	0
	Maximum 0-ter Ordnung	Nebenminimum	Nebenminimum	Nebenminimum	Maximum 1. Ordnung	Nebenminimum

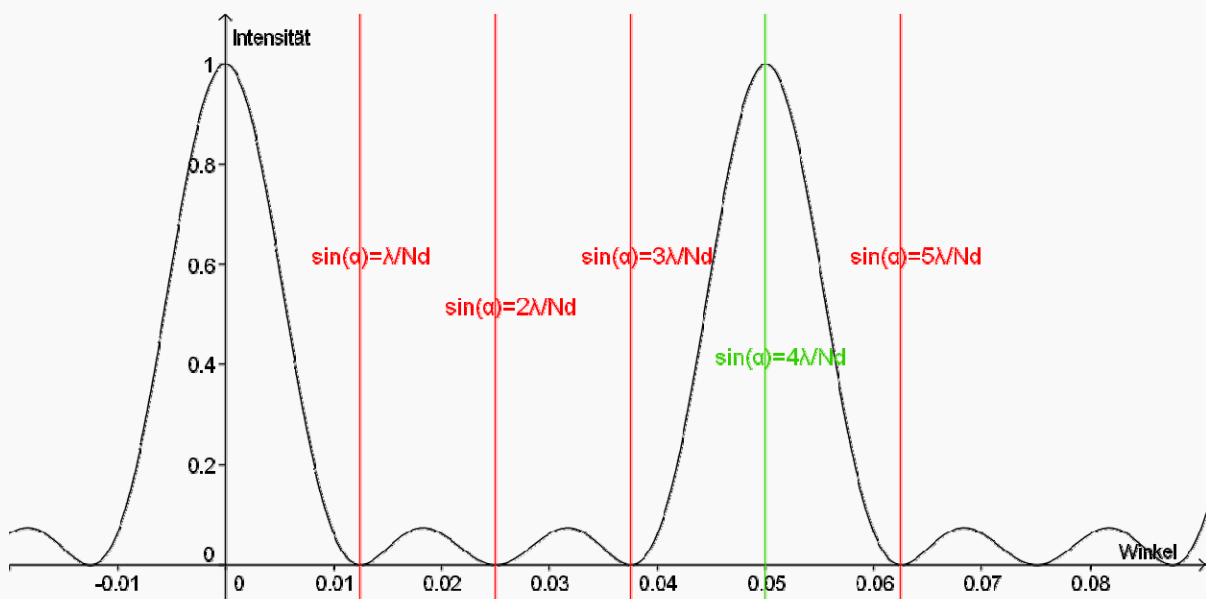


Abbildung 2: Maxima und Nebenminima bei einem Gitter mit 4 Spalten.

Allgemein findet man das erste Nebenminimum neben dem Maximum 1. Ordnung bei einem Gitter

mit N Spalten bei  $\sin(\alpha) = (N + 1) \cdot \frac{\lambda}{N \cdot d}$ , das erste Nebenminimum neben dem Maximum n-ter

Ordnung bei  $\sin(\alpha) = (n \cdot N + 1) \cdot \frac{\lambda}{N \cdot d}$ .

### Spektrale Auflösung

Zwei unterschiedliche Wellenlängen  $\lambda$  und  $(\lambda + \Delta\lambda)$  lassen sich gerade dann noch trennen, wenn ein Maximum der Wellenlänge  $(\lambda + \Delta\lambda)$  auf das erste Nebenminimum nach einem Maximum der Wellenlänge  $\lambda$  fällt:

$$\underbrace{\sin(\alpha) = n \cdot \frac{\lambda + \Delta\lambda}{d}}_{\text{Maximum } n\text{-ter Ordnung}} \quad \text{bzw.} \quad \underbrace{\sin(\alpha) = (n \cdot N + 1) \cdot \frac{\lambda}{N \cdot d}}_{\text{1. Nebenminimum neben Maximum } n\text{-ter Ordnung}}$$

$$\rightarrow n \cdot \frac{\lambda + \Delta\lambda}{d} = (n \cdot N + 1) \cdot \frac{\lambda}{N \cdot d} \rightarrow n \cdot \Delta\lambda = \frac{\lambda}{N}$$

Die spektrale Auflösung:  $R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = n \cdot N$  hängt demnach von der Anzahl der beleuchteten Spalte  $N$  ab. Setzt man wieder  $n = \frac{d}{\lambda} \cdot \sin(\alpha)$  und die lineare Ausdehnung  $W = N \cdot d$  des Gitters ein, ergibt sich:

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{d}{\lambda} \cdot \sin(\alpha) \cdot \frac{W}{d} = \frac{W}{\lambda} \cdot \sin(\alpha)$$

Nachdem der Sinus maximal Eins werden kann, ist die maximale spektrale Auflösung  $R_{\text{Max}} = \frac{W}{\lambda}$ . Bei einer Wellenlänge von  $\lambda = 3 \cdot 10^{-4} \text{ m}$  wird eine spektrale Auflösung von  $10^6$  bei einer linearen Ausdehnung des Gitters von 300 m erreicht.

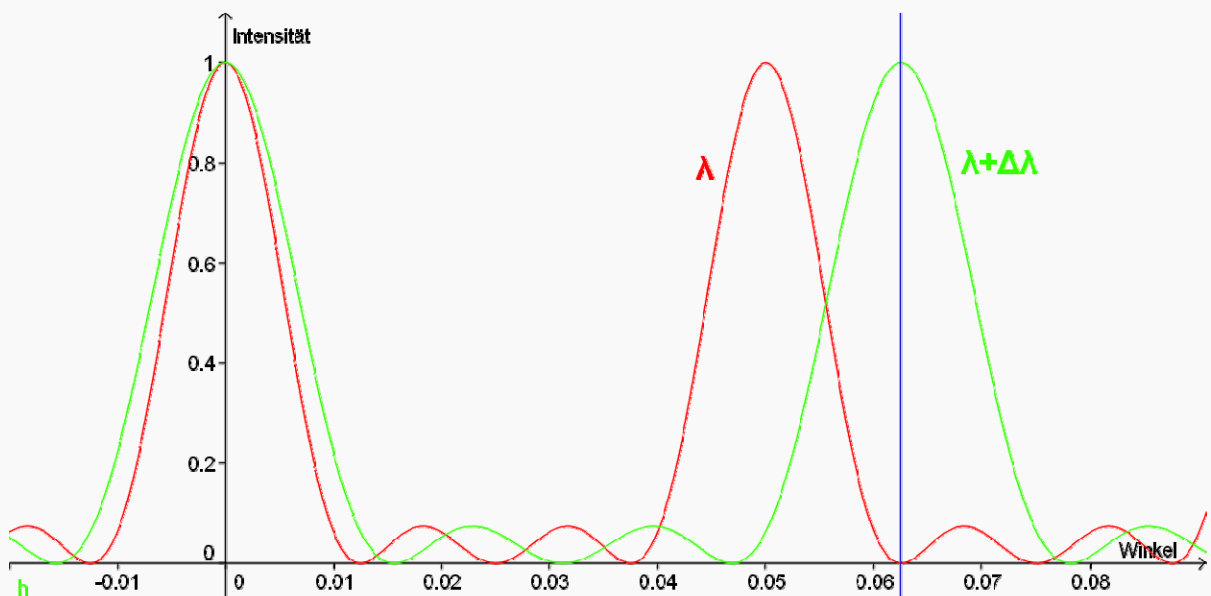


Abbildung 3: Die maximale Auflösung ist erreicht, wenn das Maximum einer Wellenlänge auf das erste Nebenminimum der anderen Wellenlänge fällt.

Die einzige Lösung der Probleme liegt darin, die Signalfrequenz so zu verringern, dass die bestehenden Technologien und die physikalischen Grenzen eine Bearbeitung möglichst verlustarm ermöglichen.

## Irrweg Schwebung

Eine Verringerung bzw. Erhöhung einer Frequenz ist keine triviale Angelegenheit, da die Frequenz keine additive Größe ist: Zwei Stimmgabeln, die beide mit 440 Hz schwingen, erzeugen eben keinen Ton mit 880 Hz. Auch klingt eine Schwebung nur so als wäre im Klang eine neue Frequenz enthalten. Im Zusatzmaterial ist eine Schwebung aus einem 440 Hz und einem 500 Hz Signal aufgezeichnet, die von Audacity in die spektralen Anteile zerlegt werden kann (Menü *Analyse* – Untermenü: *Frequenzanalyse*). Deutlich sind die beiden einzigen Frequenzen bei 440 Hz und 500 Hz erkennbar, was belegt, dass man einer „akustischen Täuschung“ erlegen ist (Abb. 4).

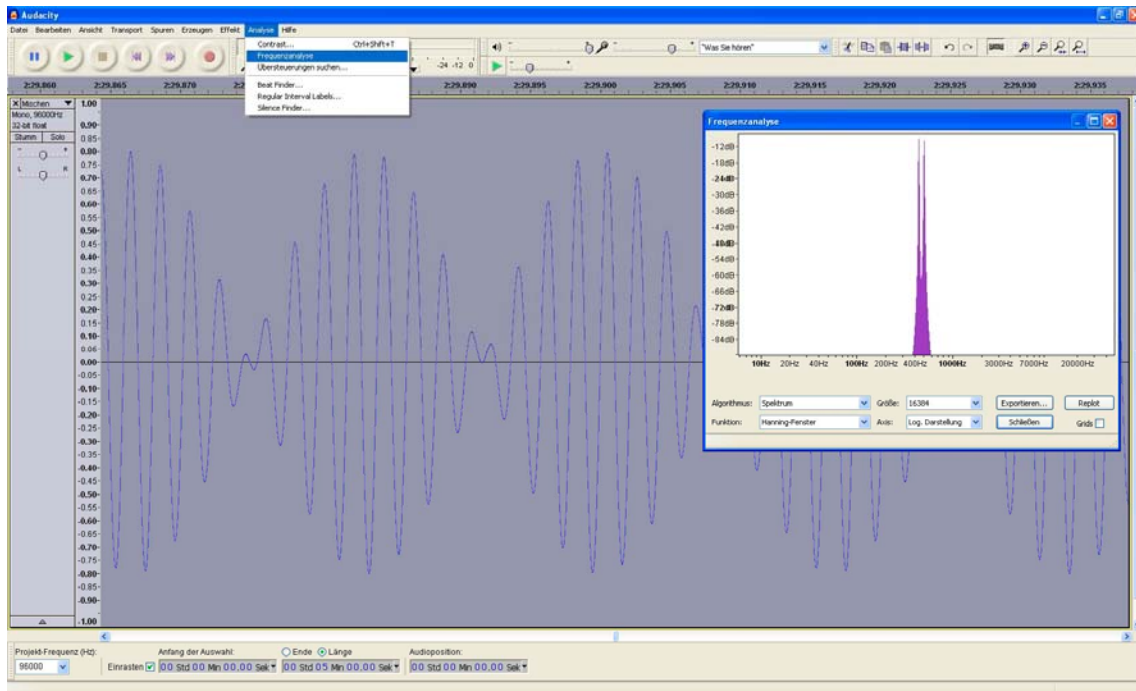


Abbildung 4: Analyse einer Schwebung aus einem 440 Hz und einem 500 Hz Signal. Die Frequenzanalyse zeigt, dass die Schwebung nur aus den erzeugenden Frequenzen zusammengesetzt ist.

## Elektronische Experimente

### Linearer Mischer:

Die oben erwähnte Schwebung, erzeugt von zwei Stimmgabeln, wird nun elektronisch von zwei Frequenzgeneratoren geliefert. Ein Sinusgenerator schwingt mit der Eingangsfrequenz (RF) von 500 Hz, ein anderer übernimmt die Aufgabe des lokalen Oszillators (LO) mit 440 Hz. Ein Lautsprecher macht das gemischte Signal hörbar. Abb. 5 zeigt den prinzipiellen schematischen Aufbau.

Die Membran des Lautsprechers wird nur dann bewegt, wenn im Stromkreis ein Strom fließt. Seine Stärke und Frequenz wird von den anliegenden Spannungen und dem Widerstand des Stromkreises, zusammengefasst im eingezeichneten Gesamtwiderstand, bestimmt. Handelt es sich hierbei um einen ohmschen Widerstand, ist die Stromstärke proportional zur Spannung - es liegt ein linearer Mischer vor.

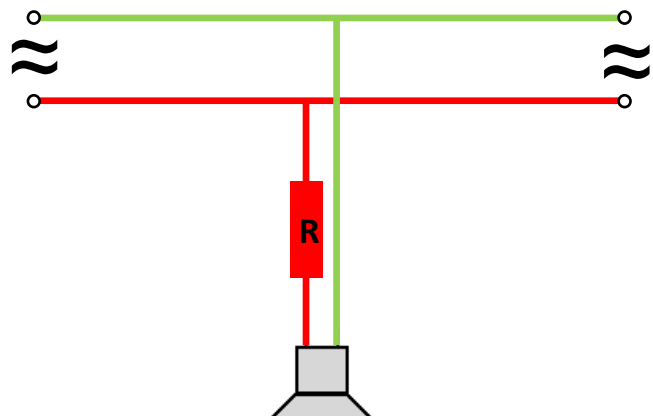


Abbildung 5: Schaltungsskizze für die Mischung zweier elektronischer Signale.

Die Gesamtspannung ist die Summe der beiden anliegenden Schwingungen. Im Fall zweier Cosinus-Schwingungen mit 440 Hz bzw. 500 Hz gilt:

$$U_{Ges} = U_{RF} \cdot \cos(2\pi \cdot 500\text{Hz} \cdot t) + U_{LO} \cdot \cos(2\pi \cdot 440\text{Hz} \cdot t),$$

und damit für die Stromstärke:

$$I \sim [U_{RF} \cdot \cos(2\pi \cdot 500\text{Hz} \cdot t) + U_{LO} \cdot \cos(2\pi \cdot 440\text{Hz} \cdot t)].$$

Das vom Lautsprecher ausgegebene Signal ist damit aus zwei Frequenzen, 500 Hz und 440 Hz, zusammengesetzt. Dies lässt sich nachweisen, indem man dieses Signal aufnimmt und mit Audacity analysiert.

#### Nichtlinearer Mischer:

Mit Hilfe eines Widerstands lassen sich demnach keine neuen Frequenzen erzeugen, da die Argumente beider Cosinus-Funktionen nicht miteinander wechselwirken. Eine solche Wechselwirkung kann man erreichen, indem man ein Bauteil einsetzt, das die Spannung nicht linear sondern nichtlinear, z. B. quadratisch in eine Stromstärke umsetzt. Während für die Gesamtspannung gleiches wie beim linearen Mischer gilt, folgt für die Stromstärke nun:

$I \sim [U_{RF} \cdot \cos(2\pi \cdot 500\text{Hz} \cdot t) + U_{LO} \cdot \cos(2\pi \cdot 440\text{Hz} \cdot t)]^2$ , was mit Hilfe der Additionstheoreme zerlegt werden kann in:

$$\begin{aligned} I \sim & \left\{ \frac{1}{2}(U_{RF}^2 + U_{LO}^2) + \right. \\ & \frac{1}{2}U_{RF}^2 \cdot \cos(2\pi \cdot 2 \cdot 500\text{Hz} \cdot t) + \\ & \frac{1}{2}U_{LO}^2 \cdot \cos(2\pi \cdot 2 \cdot 440\text{Hz} \cdot t) + \\ & U_{RF} \cdot U_{LO} \cdot \cos[2\pi(500\text{Hz} - 440\text{Hz}) \cdot t] + \\ & \left. U_{RF} \cdot U_{LO} \cdot \cos[2\pi(500\text{Hz} + 440\text{Hz}) \cdot t] \right\} \end{aligned}$$

Die Lautsprechermembran schwingt demnach mit einer Mischung aus vier unterschiedlichen Frequenzen: Den Harmonischen der Ausgangsfrequenzen und der Differenz bzw. Summenfrequenz beider. Der Nachweis der Richtigkeit dieser Zerlegung kann mit Hilfe der Software *geogebra* geschehen: Beide Kurven, sowohl das Quadrat der Summe der Eingangsfrequenzen (grüne Kurve) als auch die Summe der fünf Bestandteile aus den Additionstheoremen (rote Kurve), liegen aufeinander und sind demnach identisch:

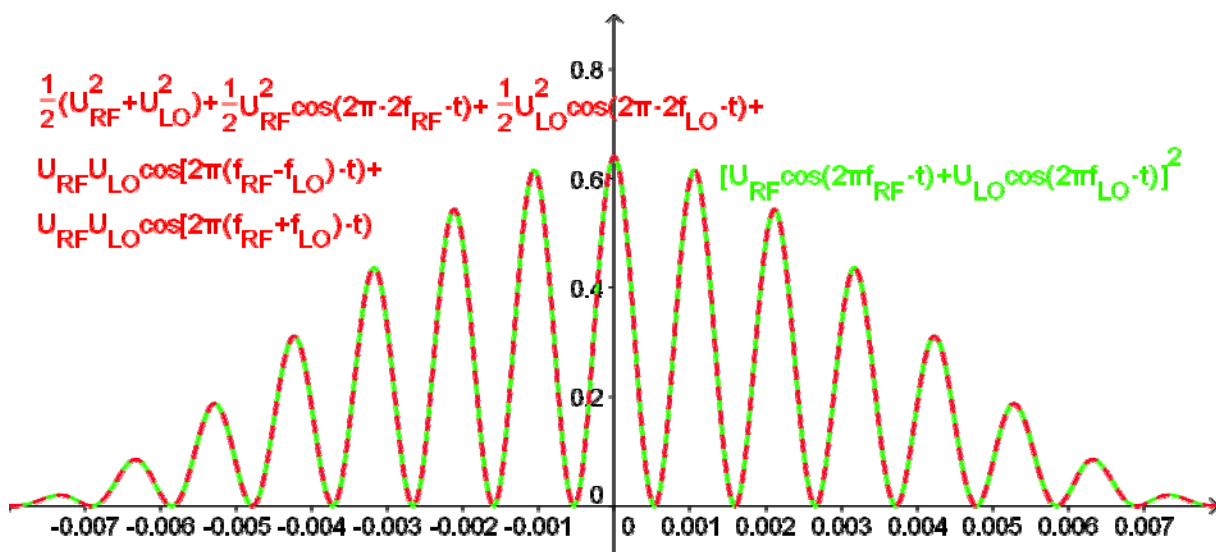


Abbildung 6: Nachweis, dass das Quadrat der Ausgangsfrequenzen aus vier Frequenzen zusammengesetzt ist.

Ein Bauteil, das einen nichtlinearen Zusammenhang zwischen Spannung und Stromstärke vermittelt, ist die Diode. Die Kennlinie einer Diode zeigt eindeutig den Unterschied zum ohmschen Widerstand, der im U-I-Diagramm eine Ursprungsgerade ergeben würde:

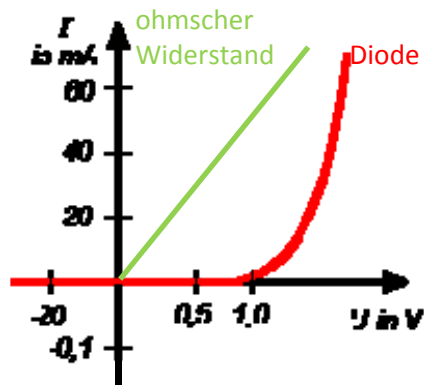


Abbildung 7: Vergleich einer Diodenkennlinie mit der eines ohmschen Widerstands.

Setzt man eine solche Diode anstatt des Widerstands in obige Schaltung ein und benutzt zwei hochfrequente Töne als RF- bzw. LO-Signal, ist deutlich ein tiefer Brummtone zu hören (**zusätzliches Audiomaterial**).

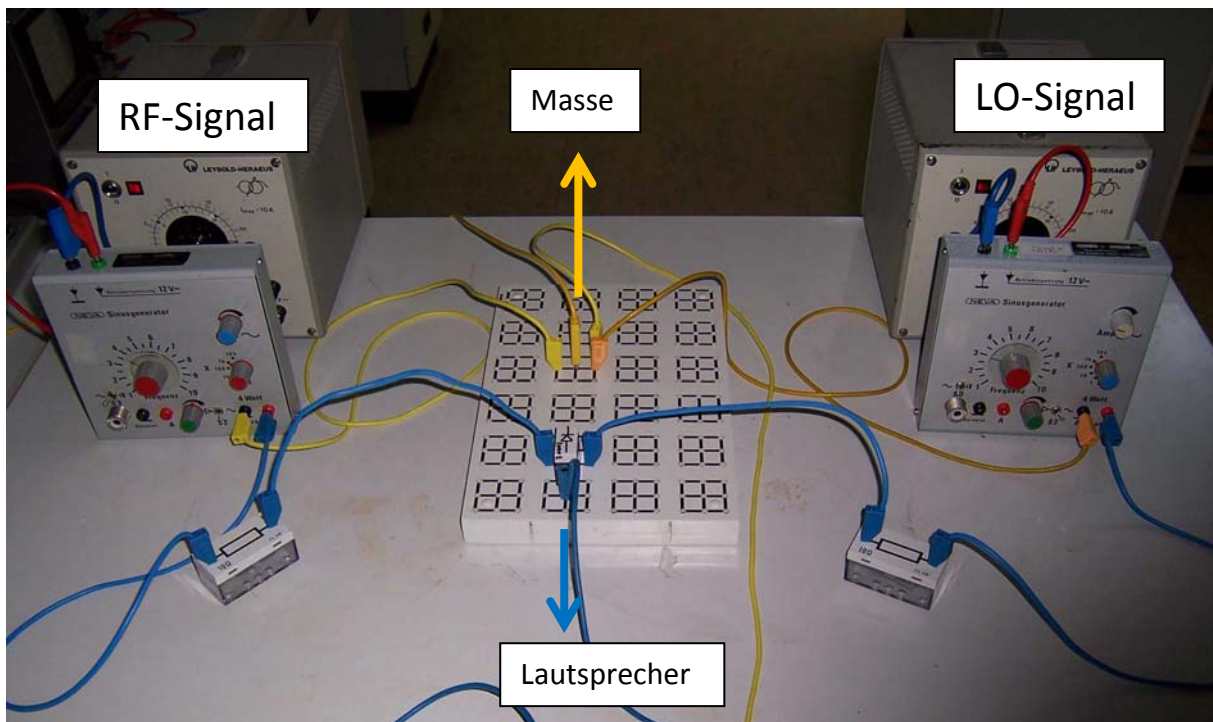


Abbildung 8: Versuchsaufbau einer Mischerschaltung mit Diode als nichtlinearem Mischer.

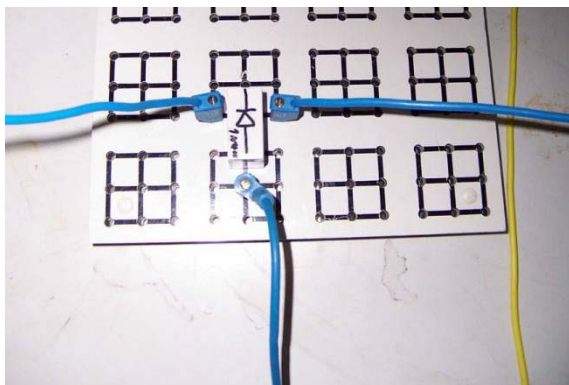


Abbildung 9: Die Diode als nichtlinearer Mischer: Von links kommt das RF-Signal, von rechts das LO-Signal. Das gemischte Signal läuft nach vorne zum Lautsprecher.



Um nachzuweisen, dass dieser kein „akustische Täuschung“ ist, wird das gemischte Signal durch Audacity analysiert (Abb. 10). Am Beispiel mit  $RF=3825$  Hz und  $LO=3293$  Hz sieht man ein deutliches Signal bei der Differenzfrequenz 532 Hz und der Summenfrequenz 7118 Hz. Auch die Harmonischen der ursprünglichen Frequenzen bei 7650 Hz und 6586 Hz sind erkennbar (Abb. 11).

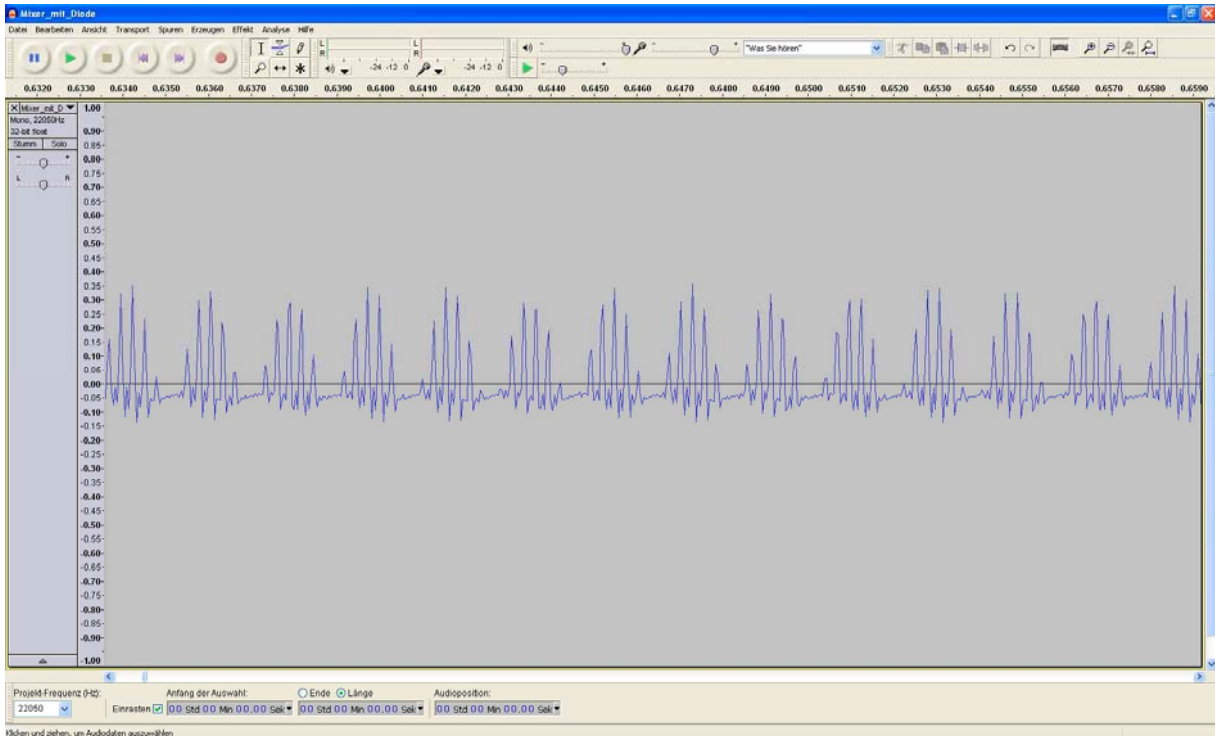


Abbildung 10: Signal nach der Mischung durch die Diode.

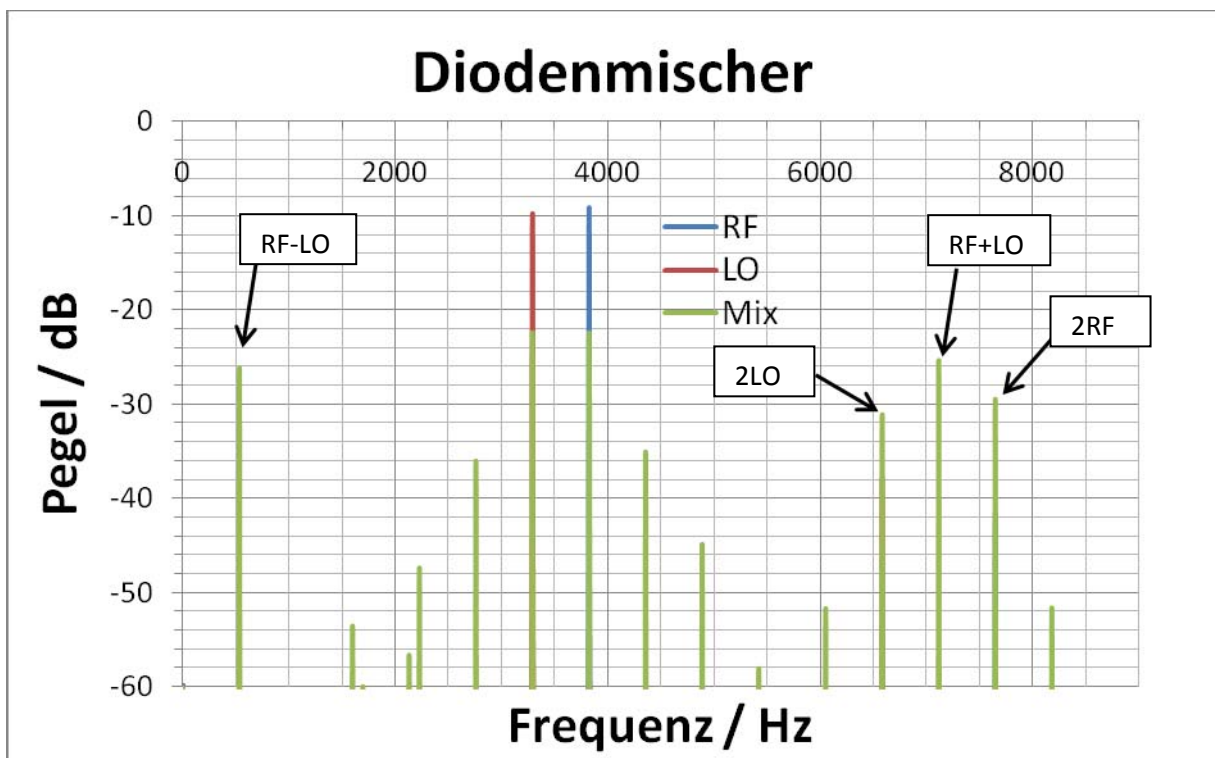
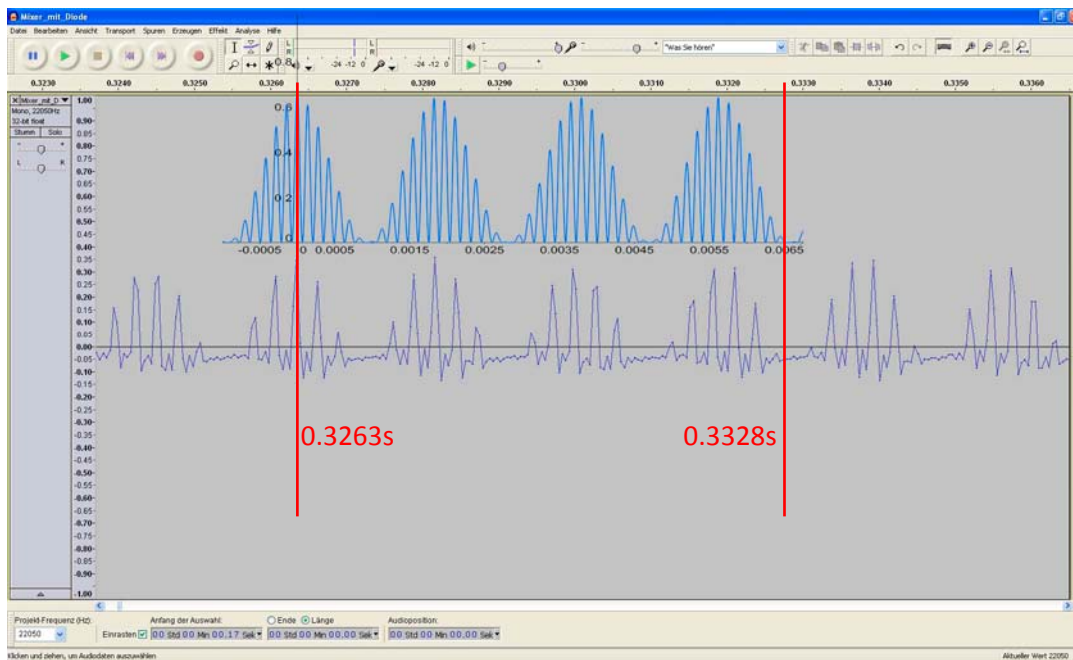


Abbildung 11: Frequenzanalyse des Mischsignals.

Lenkt man das gemischte Signal noch durch einen Tiefpass, werden die hohen Frequenzen gefiltert und nur der tiefe Brummtton kann weiterverarbeitet werden.

Die Diodenkennlinie zeigt, dass die  $I(U)$ -Funktion keine rein quadratische Funktion ist. Vergleicht man jedoch das theoretische Mischersignal eines quadratischen Mixers mit  $R_F=3825$  Hz und  $L_O=3293$  Hz mit dem gemessenen Diodenmischersignal, sind gewisse Ähnlichkeiten in der Form und den vorkommenden Frequenzen erkennbar:



**Abbildung 12:** Vergleich des theoretischen Signals eines quadratischen Mixers mit dem Diodenmischersignal. Das gemessene Signal kann von Audacity nicht mehr ausreichend aufgelöst werden.

Das Heterodynprinzip wird nicht nur bei solch exotischen Anwendungen wie der Analyse von THz-Signalen aus dem Weltall benutzt, sondern auch bei der Signalübertragung von Mittelwellenrundfunk. Eine andere Einsatzmöglichkeit ist die Ortung bzw. das Abhören von Fledermausrufen. Diese sind für menschliche Ohren nicht wahrnehmbar, da sie im Ultraschallbereich liegen. Auch hier muss das Signal auf tiefere Frequenzen heruntergemischt werden. Nichtlineare Mixer werden bei vielen kommerziellen Fledermaus-Detektoren eingesetzt, um die bis zu 150 kHz hohen Signale auf hörbare Frequenzen herunter zu regeln. Ein fächerübergreifender Einsatz des oben beschriebenen Heterodynempfängers ist daher naheliegend.