

## Shepards Raumflug – Wurfparabel oder Kepler-Ellipse?

In Bezug auf den SuW-Beitrag „Projekt Mercury: Amerikas Einstieg in die bemannte Raumfahrt“ (in Heft 2/2012, Welt der Wissenschaft: Raumfahrtgeschichte, S. 46)

Gerhard Herms

Handelt es sich bei den ersten beiden bemannten Raumflügen der USA wirklich um Parabelflüge? Die Parabel gehört neben Ellipse, Kreis, Gerade und Hyperbel zu den Kegelschnitten, die nach den Gesetzen der Himmelsmechanik als Bahnkurven von Himmelskörpern und Raumflugkörpern in Frage kommen. Aber erfordert eine parabolische Bahn nicht eine höhere kinetische Energie als eine elliptische? Um die Unklarheiten auszuräumen, werden die Bewegungsformen im homogenen und im radialsymmetrischen Gravitationsfeld in einem heuristischen Gespräch zwischen dem Schüler Daniel und dem Studenten Jan näher betrachtet. Abschließend gibt es eine Aufgabe zum Test.

Übersicht der Bezüge im WIS-Beitrag		
<b>Physik</b>	<b>Mechanik</b>	<b>Gravitationsgesetz, homogenes und radial-symmetrisches Kraftfeld, Wurfparabel</b>
<b>Astronomie</b>	<b>Raumfahrt</b>	<b>Keplersche Gesetze, Keplerbahnen</b>
<b>Fächerverknüpfung</b>	<b>Astro-Ma</b>	<b>Kegelschnitte</b>
<b>Lehre allgemein</b>	<b>Erkenntniskompetenz, Unterrichtsmittel</b>	<b>Dialog als Methode der Erkenntnisgewinnung (heuristisches Gespräch), Dialog-Text</b>



Bergung der Weltraumkapsel „Liberty Bell“ durch einen Marine-Hubschrauber nach dem 2. ballistischen Flug im Jahre 1961. ©: Sterne und Weltraum, 2/2012, S. 51.

**Daniel:** Jan – ich habe wieder mal eine Frage.

**Jan:** Wo drückt denn der Schuh?

**Daniel:** Ich habe den Beitrag „Projekt Mercury: Amerikas Einstieg in die bemannte Raumfahrt“ von Harro Zimmer und außerdem viele Zeitungsausschnitte gelesen, die mein Onkel voller Begeisterung in der großen Zeit gesammelt hatte - und bin verunsichert.

**Jan:** Inwiefern?

**Daniel:** In den Zeitungsartikeln ist fortwährend die Rede von „Parabelraumflügen“ des Rhesusaffen Sam und der ersten amerikanischen Astronauten.

**Jan:** Du meinst die Flüge von Alan B. Shepard und Gus Grissom.

**Daniel:** Ja. - Jedenfalls heißt es von ihnen, dass sie nicht mit Gagarins Erdumkreisung gleichziehen konnten, eben gerade weil es nur Parabelbahnen waren. Nun glaubte ich aber zu wissen, dass in der Himmelsmechanik parabolische oder gar hyperbolische Bahnen energiereicher sind als elliptische oder kreisförmige Bahnen. In einem Buch, das ich gelesen habe, wurde an Hand einer Abbildung klargemacht, dass sich ein auf einer Kreisbahn befindlicher Körper auf eine elliptische Bahn begibt, wenn man seine kinetische Energie erhöht. Je größer die Energiezufuhr, desto gestreckter wird die Ellipse. Schließlich wird die Bahn zur Parabel und bei noch mehr Energie zur Hyperbel.

**Jan:** Das ist richtig.

**Daniel:** Aber woher nimmt man dann die Berechtigung, Shepards und Grissoms Flüge abzuwerten? Vom reinen Menschenverstand her sehe ich ja ein, dass die Umkreisung der Erde eine größere Sache ist als ein Hüpfen, der gerade mal 500 km überspannt. Aber nach dem, was in den Büchern steht, braucht es für eine Parabelbahn mehr Energie. - Irgendetwas kann nicht stimmen.

**Jan:** Nicht verzagen! Jani fragen!

**Daniel:** Das mache ich ja gerade! Beschrieben Shepard und Grissom wirklich Parabelbahnen?

**Jan:** Streng genommen, würde ich sagen: Nein.

**Daniel:** Und warum reitet man dann so eifrig auf dem Begriff „Parabelbahn“ herum?

**Jan:** Weil es genau die Bahnform ist, die sich ergibt, wenn man von einer anderen Modellvorstellung ausgeht als die Autoren der Bücher über Himmelsmechanik.

**Daniel:** Welche Vorstellung meinst du?

**Jan:** Ganz einfach: Homogenes Kraftfeld. Auf den Körper wirkt überall die gleiche Kraft – gleich nach Betrag und Richtung.

**Daniel:** Ach ja – so waren wir in der Schule vorgegangen, als wir den Wurf behandelt haben. Wir hatten ein rechtwinkliges Koordinatensystem eingeführt, dessen  $y$ -Achse mit der Vertikalen, und dessen  $x$ -Achse mit der Horizontalen zusammenfällt. Die Gewichtskraft  $m \cdot g$  ist konstant und wirkt immer nach unten, also in Richtung der negativen  $y$ -Achse.

**Jan:** Richtig! Nimm mal bitte an, im Koordinatenursprung wird einer Masse  $m$  die Geschwindigkeit  $v_0$  unter einem Winkel  $\alpha$  zur  $x$ -Achse erteilt. Könntest du mir die Geschwindigkeit in  $x$ -Richtung und die in  $y$ -Richtung nach der Zeit  $t$  aufschreiben?

**Daniel:** Die Geschwindigkeit in  $x$ -Richtung ist immer dieselbe, weil in dieser Richtung keine Kraft wirkt. Folglich ist

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cdot \cos \alpha$$

Bei der Geschwindigkeit in  $y$ -Richtung müssen wir beachten, dass gleich nach Abschuss eine Fallbewegung einsetzt, also eine nach unten gerichtete Geschwindigkeitskomponente hinzukommt, die mit  $t$  anwächst. Folglich muss ich schreiben:

$$\frac{dy}{dt} = v_0 \cdot \sin \alpha - gt, \text{ wobei } g \text{ die Fallbeschleunigung ist.}$$

**Jan:** Wie kommst du nun zu den Koordinaten des Massepunktes zur Zeit  $t$ ?

**Daniel:** Ganz einfach durch Integrieren. Das liefert die Formeln

$$x = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot t \text{ und } y = v_0 \cdot \sin \alpha \cdot t - \frac{g}{2} t^2.$$

**Jan:** Sehr gut! Das hast du zustande gebracht, ohne zur Formelsammlung zu greifen. Mit diesen beiden Formeln kannst du praktisch schon alle Wurfprobleme beherrschen. Gleich eine Frage: Wie erhältst du die Gleichung  $y = f(x)$  der Bahnkurve?

**Daniel:** Oh – keine Ahnung!

**Jan:** Du hast doch bereits eine Gleichung für  $y$ .

**Daniel:** Aber in der kommt kein  $x$  vor.

**Jan:** ...und was noch schlimmer ist: In ihr kommt die Zeit  $t$  vor, und die hat in der Gleichung einer Kurve absolut nichts zu suchen. Daraus ergibt sich eine Anleitung für dein Handeln.

**Daniel:** Ach ja! Ich muss die Zeit dadurch eliminieren, dass ich  $t$  mit Hilfe der anderen Gleichung durch  $x$  ausdrücke.

**Jan:** Bravo! Wenn du so vorgehst, dann kommt die Gleichung einer nach unten geöffneten und durch den Koordinatenursprung gehenden Parabel heraus.

**Daniel:** Ja, das ist unverkennbar! Und ich erinnere mich wieder klar an den Schulstoff „Wurfparabel“. Aber sage mir bitte: War das die Veranlassung, Shepards oder Grissoms Flug als Parabelflug zu bezeichnen?

**Jan:** Genau so ist es.

**Daniel:** Da hat man also einen Raumflug mit einem Schlagballweitwurf gleichgesetzt! Aber das ist doch nicht richtig! Die Schwerkraft auf die Raumkapsel nimmt doch mit der Höhe ab, und außerdem ändert sich die Richtung der Schwerkraft entlang der Flugbahn. – Darf ich mal deinen Taschenrechner benutzen?

**Jan:** Bitte sehr!

**Daniel:** So! Kleinen Moment bitte! – Auf dem Gipfel der Flugbahn in 190 km Höhe ist die Schwerkraft um 5,7 % kleiner und die Richtung der Schwerkraft ist am 500 km weit entfernten Landeplatz um  $4,5^\circ$  gegenüber der Richtung an der Startrampe verdreht.

**Jan:** Jetzt verstehst du sicher, warum ich deine Frage, ob Shepard und Grissom sich wirklich auf einer Parabelbahn bewegt haben, so vorsichtig beantwortet habe.

**Daniel:** Allerdings! Ein homogenes Kraftfeld anzunehmen, liefert vernünftige Ergebnisse für kleine Wurfhöhen und kleine Wurfweiten, wird aber meiner Meinung nach zu ungenau für Fernschüsse und Raumflüge.

**Jan:** Im Prinzip richtig, aber was mit dem Modell des homogenen Kraftfeldes noch machbar ist, werden wir uns im Anschluss noch mit einer Aufgabe klar machen. Im Allgemeinen muss bei Raumflugproblemen natürlich das Modell des radialsymmetrischen Kraftfeldes benutzt werden, bei dem die Kraftvektoren alle auf einen Punkt zeigen und ihr Betrag mit dem Quadrat des Abstandes von diesem Punkt abnimmt.

**Daniel:** Dieser Punkt ist in unserem Falle der Schwerpunkt der Erde, nicht wahr?

**Jan:** Ja.

**Daniel:** Das Modell ist mir sympathischer; denn es ist sicherlich bei allen himmelsmechanischen Problemen anwendbar und immer richtig.

**Jan:** Vorsicht! Denk vielleicht mal an den elliptisch geformten Jupitermond Amalthea, dessen Bild dort an der Wand hängt! Lies mal den Text unter dem Bild!

**Daniel:** Amalthea, große Achse 275 km, kleine Achse 155 km.

**Jan:** Bei diesem Himmelskörper kannst du nicht erwarten, dass in seiner Nähe das radialsymmetrische Feld noch eine gute Beschreibung darstellt. Oder denk an einen Doppelstern! Bei Annäherung an seinen Schwerpunkt zeigt die Gravitationskraft durchaus nicht mehr zu diesem Punkt, und außerdem ändert sich der Betrag der Kraft anders als mit  $1/r^2$ .

**Daniel:** An solche ausgefallene Sachen habe ich natürlich nicht gedacht.

**Jan:** Aber du hast natürlich nicht ganz unrecht, das Modell des radialsymmetrischen Feldes zu bevorzugen. Verglichen mit dem homogenen Feld kann man mit dem radialsymmetrischen Feld viel mehr anfangen. Mit seiner Hilfe lassen sich auch die beiden „ausgefallenen“ Beispiele behandeln.

**Daniel:** Ich denke mir, dass man Amalthea in kleine Teilstücke zerlegen und für jedes das radialsymmetrische Feld berechnen könnte, um dann alle Teilfelder zusammenzufassen. Ist es so?

**Jan:** Ja. Aber nun zum Wesentlichen: Vorausgesetzt, es liegt wirklich ein radialsymmetrisches Kraftfeld vor, dann lässt sich - ausgehend vom Energieerhaltungssatz und dem Drehimpulserhaltungssatz - zeigen, dass sich der Körper auf einem Kegelschnitt bewegt. Schau dir mal diese Abbildung an, die ich hier herausgesucht habe! [Abb. 1].

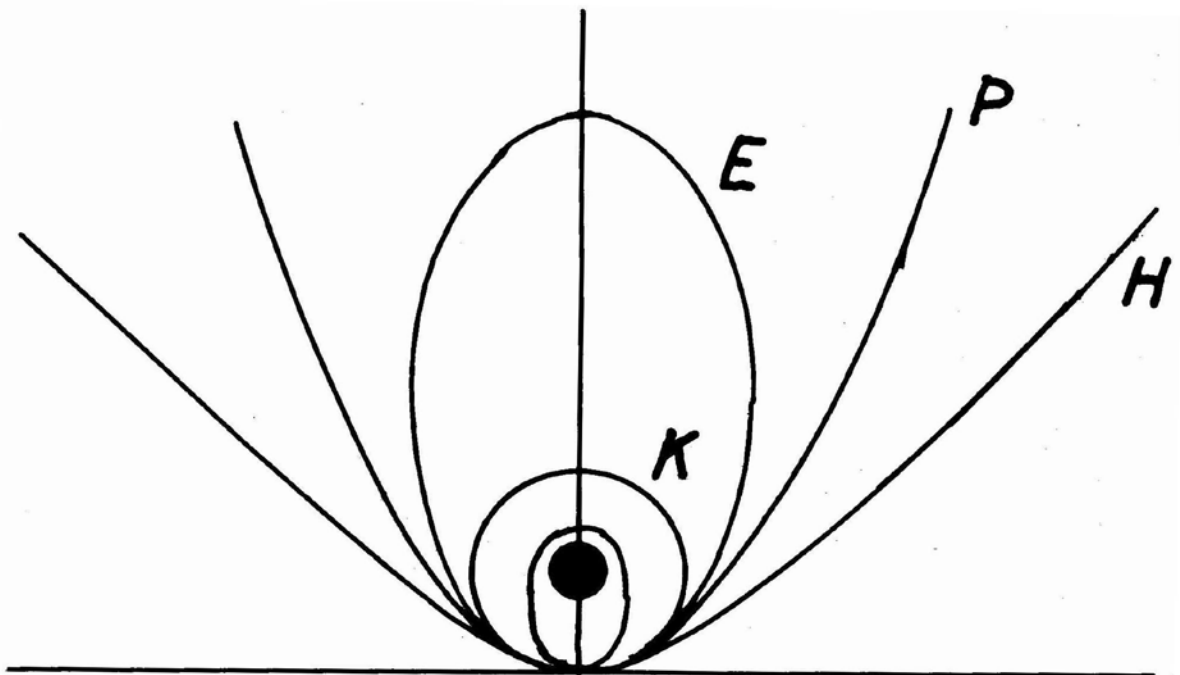


Abbildung 1: Keplerbahnen im streng radialsymmetrischen Kraftfeld

**Daniel:** Oh! Das ist doch genau die Abbildung, die ich vorhin gemeint habe!

**Jan:** Das hatte ich mir schon gedacht. Die Abbildung veranschaulicht die Keplerbahnen im streng radialsymmetrischen Kraftfeld. Ist die Kraft auf den Körper nur ein klein wenig anders (z.B. durch unregelmäßige Form des Zentralkörpers, durch weitere Himmelskörper, durch Abbremsung in Gas oder Staub oder durch Strahlungsdruck) können merkliche Störungen auftreten.

[<http://de.wikipedia.org/wiki/keplerbahn>]. Doch nun zur Sache: Konzentriere dich bitte mal auf die Parabel! [Siehe *P* in *Abb. 1*]. Diese Bahnkurve wird durchlaufen, wenn ein in sehr, sehr weiter Entfernung ruhender Körper sich infolge der Gravitation langsam in Bewegung setzt und das Gravitationsfeld durchläuft.

**Daniel:** Er nähert sich dem Gravitationszentrum und wird immer schneller. Ist er ihm am nächsten, hat er die größte kinetische Energie. Die reicht aus, um ihn wieder in die unendlich weite Entfernung zu schaffen, wo er wieder zur Ruhe kommt.

**Jan:** Ganz recht! Beachte bitte, dass seine kinetische Energie einzig und allein aus der Abnahme der potentiellen Energie des Körpers stammt!

**Daniel:** Und ich ahne schon, wie das bei den Hyperbelbahnen ist! [*H* in *Abb. 1*]. Die entstehen, wenn ein Körper aus dem Unendlichen in das Gravitationsfeld hineingeschossen wird. Wenn er das Gravitationsfeld wieder verlässt, fliegt er mit seiner anfänglichen Bewegungsenergie auf Nimmerwiedersehen davon.

**Jan:** Auf der Hyperbelbahn hat der Körper also eine höhere Bewegungsenergie, als der Abnahme seiner potentiellen Energie entspricht. Und was glaubst du, wie ist es mit der Ellipsenbahn ist? [*E* in *Abb. 1*].

**Daniel:** Ganz einfach! Die Bewegungsenergie des Körpers ist so klein, dass er nur ein Stück des Potentialtrichters hinaufklimmen, aber nie den Rand des Trichters erreichen könnte. [<http://www.wissenschaft-schulen.de/artikel/984932>].

**Jan:** Ja, so kann man es formulieren. Aber nun möchte ich dich aufmerksam machen auf die eingezeichnete Kreisbahn, die mit der Parabel einen Punkt, nämlich ihren Scheitelpunkt, gemeinsam hat. [*K* in *Abb.1*]. Auf der Kreisbahn hat der Körper genau halb so viel Bewegungsenergie, wie er auf der Parabelbahn hätte. Das kannst du leicht ausrechnen, wenn du von der Bedingung „Gravitationskraft plus Zentrifugalkraft gleich Null“ ausgehst.

**Daniel:** Wenn man den kreisenden Körper in radiale Richtung umlenken könnte, würde er den Potentialtrichter bis zu halben Höhe hinaufsteigen können – nicht wahr?

**Jan:** Richtig! Würde man seine Bewegungsenergie vergrößern, so ergäbe sich eine Ellipse, welche die Kreisbahn umschließt, würde man sie verkleinern, entstünde eine Ellipse, die ganz im Innern der Kreisbahn verläuft.

**Daniel:** Dabei liegt immer einer der beiden Ellipsenbrennpunkte im Erdmittelpunkt, nehme ich an.

**Jan:** Natürlich! - Je kleiner die Bewegungsenergie, desto kleiner werden die Ellipsenbahnen - bis der Fall eintritt, dass sie auf der Erdoberfläche enden. Dann kann nur noch ein Teilstück der Ellipse als Bahn eines Raumflugkörpers dienen.

**Daniel:** Genau so war es bei Shepards oder Grissoms Raumflug, nicht wahr?

**Jan:** Exakt!

**Daniel:** Das, was der Weltöffentlichkeit als Parabelflug verkauft wurde, war also genau genommen Bewegung auf einer energiearmen Ellipse, die sehr viel weniger „Saft“ hatte als Juri Gagarins kreisähnlicher Orbit.

**Jan:** Etwas drastisch formuliert, aber völlig richtig!

**Daniel:** Und langsam beginne ich zu ahnen, dass es nicht die Vornehmheit allein ist, die Herrn Zimmer veranlasst hat, nur den Begriff „suborbitale Bahn“ zu gebrauchen. - Zum Schluss noch zwei Fragen. Von Shepards Flug wird in einem der Zeitungsartikel gesagt: „Schon rund 5 Minuten nach dem Start zündeten die Bremsraketen und brachten Freedom 7 auf den Rückweg“.

**Jan:** Ich weiß, worauf du hinauswillst: Den Rückweg hätte Freedom 7 natürlich von allein angetreten, auch ohne Bremsraketen. Aber man wollte dieses Manöver, das für die geplanten Erdumkreisungen lebensnotwendig ist, im Weltraum erproben.

**Daniel:** Meine zweite Frage: Im gleichen Artikel wurde berichtet, dass bei Carpenters Erdumkreisung die automatische Fluglageregelung versagte, so dass der Astronaut die Bremstriebwerke von Hand auslösen musste, was aber drei Sekunden zu spät geschah. Im Beitrag heißt es dann weiter: „Als Folge dieser Verzögerung schoss Aurora 7 mehr als 460 km über den geplanten Landepunkt hinaus.“ Nun legt doch die Raumkapsel ungefähr 8 km in der Sekunde zurück. Das würde höchstens eine Abweichung von 24 km erklären.

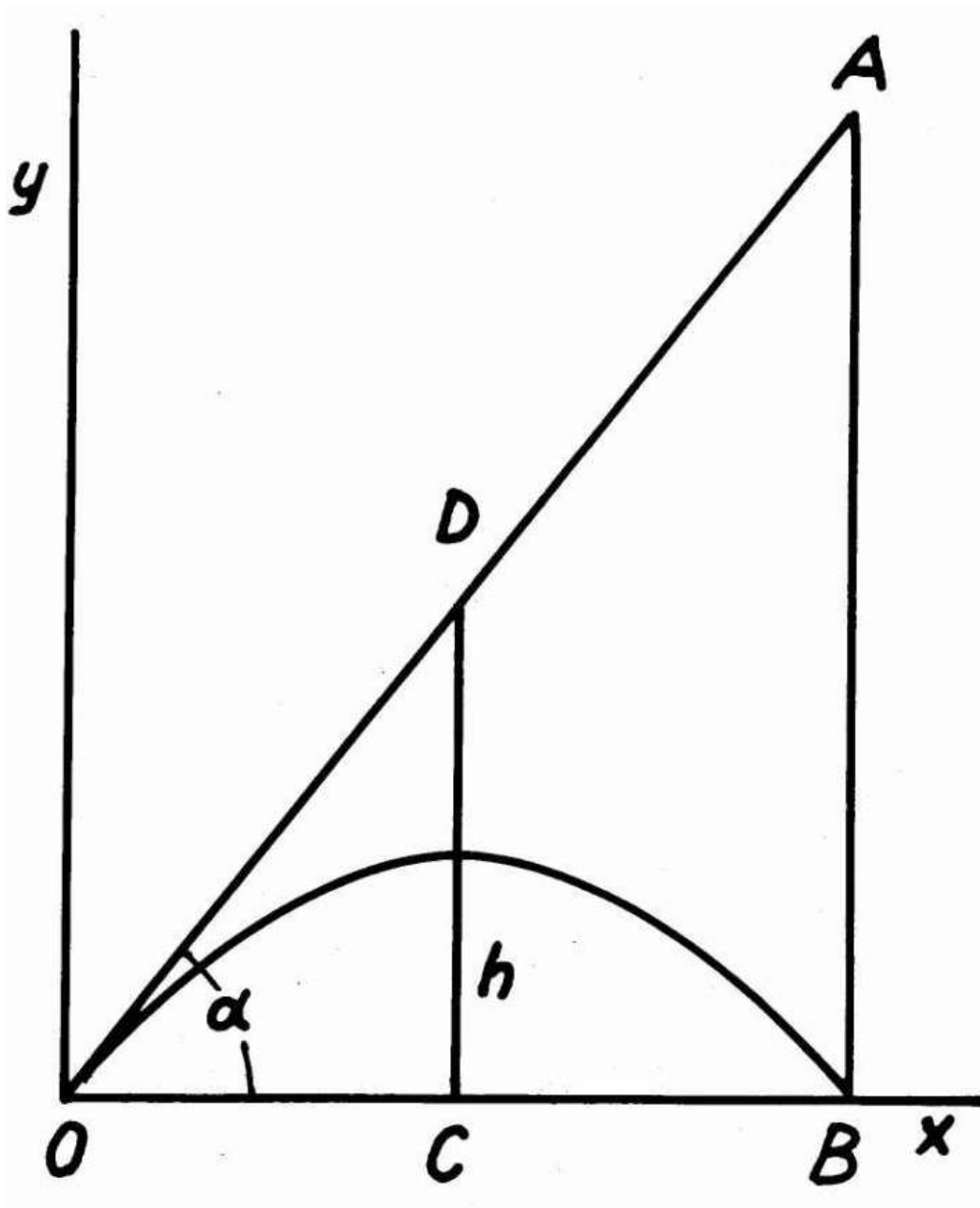
**Jan:** Gut, dass du so kritisch bist und selbst mal nachrechnest, was dir vorgesetzt wird! Es scheint, dass Carpenter auch die manuelle Ausrichtung der Bremstriebwerke nicht ganz so gut hingekriegt hatte.

**Daniel:** Trotzdem! Es war eine tolle Leistung, wenn man bedenkt, dass sich die ersten Astronauten im absoluten Neuland bewegten.

**Aufgabe:**

Mit welcher Geschwindigkeit  $v_0$  und unter welchem Winkel  $\alpha$  müsste ein Geschoss abgefeuert werden, damit es die gleiche Bahn wie Grissoms Raumkapsel beschreibt? (Gipfelhöhe  $h = 190$  km, Ort der Wasserung  $w = 500$  km von der Startrampe entfernt).

Das Gravitationsfeld werde als homogenes Feld angesehen. Der Luftwiderstand werde vernachlässigt.





## Lösung:

Die im Text angegebenen Gleichungen (1) bis (4) reichen aus für die Lösung der Aufgabe. Die Kurvengleichung und die Formeln für Steighöhe, Wurfweite, Flugzeit usw. aus der Formelsammlung herauszusuchen, ist Zeitvergeudung.

Bei fehlender Gravitation würde das im Koordinatenanfangspunkt abgefeuerte Geschoss nach der Zeit  $t$  den Punkt A erreichen. Durch die gleichzeitig nach unten ablaufende Fallbewegung kommt die Kapsel jedoch im Punkt B, dem Ort der Wasserung, an. Da die Fallstrecke quadratisch mit der Zeit

anwächst, ist sie im Gipfelpunkt der Flugbahn, der bei  $x = \frac{\overline{OB}}{2}$  liegt, ein Viertel der Strecke  $\overline{AB}$ .

Da

$$\overline{DC} = \frac{\overline{AB}}{2},$$

ist auch die Gipfelhöhe  $h$  selbst ein Viertel der Strecke  $\overline{AB}$ , oder mit anderen Worten:

$$\overline{AB} = 4 \cdot h.$$

Der Abschusswinkel  $\alpha$  ergibt sich aus  $\tan \alpha = \frac{4 \cdot h}{w} = \frac{4 \cdot 190}{500}$ ,

wobei  $w = \overline{OB}$  die Wurfweite ist. Es folgt:  $\alpha = 56,66^\circ$ .

Um die Abschussgeschwindigkeit  $v_0$  zu bestimmen, wenden wir die Gleichung (4) auf den Punkt der Wasserung an, indem wir  $y = 0$  setzen und die Zeit  $t$  mit Hilfe der Gleichung (3) eliminieren. Es folgt

$$v_0^2 = \frac{g \cdot w}{2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}$$

$$v_0^2 = \frac{9,81 \cdot 10^{-3} \text{ km} \cdot 500 \text{ km}}{2 \cdot 0,835 \cdot 0,549 \text{ s}^2}$$

$$v_0 = 2,31 \text{ km/s.}$$

Dieses Ergebnis stimmt gut mit einem Wert überein, der für Grissoms maximale Geschwindigkeit angegeben wird, nämlich  $8260 \text{ km/h} = 2,29 \text{ km/s}$ .

Unser Vorgehen, die Kepler-Ellipse durch die Wurfparabel im homogenen Gravitationsfeld zu ersetzen, ist offenbar noch eine gute Näherung. Auch eine andere Vereinfachung scheint ohne störende Auswirkung zu sein: Das von uns berechnete  $v_0$  ist die Geschwindigkeit, die zur Zeit  $t = 0$  im Koordinatenanfangspunkt vorliegen muss, damit die entsprechende Bahn durchlaufen wird. Die Rakete jedoch erreicht ihre maximale Geschwindigkeit erst Minuten nach dem Start.