

Der Weg zum Mars

In Bezug zum Beitrag „Aufbruch zu fernen Welten. 50 Jahre interplanetare Raumfahrt (Teil 2)“ von Manfred Gottwald in der Zeitschrift „Sterne und Weltraum“ (SuW) 11/2012, Rubrik: Welt der Wissenschaft

Olaf Fischer

Beim Lesen des oben genannten SuW-Beitrags zur interplanetaren Raumfahrt könnte man darüber ins Grübeln kommen, warum die Start- bzw. Landedaten der Planetenmissionen nicht beliebig verteilt sind, sondern einem Muster folgen. Die Aufklärung dieses Problems (der Startfenster) führt zu weiteren Fragestellungen, die sich im vorliegenden Falle alle auf den Weg zum Mars beziehen.

Das vorliegende WIS-Material enthält Arbeitsblätter, deren Ziel es ist, die genaue [Streckenführung der Marsreise](#) zu konstruieren (zentraler Begriff: [Hohmann-Ellipse](#)) und den [richtigen Reisebeginn](#) zu ermitteln. Fußend auf den Ergebnissen dieser Aufgaben geht es schließlich (als Höhepunkt) in einer [Projektaufgabe](#) darum, eine in Ort und Zeit [maßstabsgetreue Animierung dieser Reise auf dem Computer](#) und für ein [Fingerkino](#) zu erzeugen ([Zusatzmaterial](#): animierte gif-Dateien.)

Übersicht der Bezüge im WIS-Beitrag		
Physik	Mechanik	Keplersche Gesetze (1 , 2 , 3), Kreisbahnbewegung
Astronomie	Raumfahrt	<u>Hohmann-Ellipse</u> , <u>Startfenster</u>
Fächerverknüpfung	Astronomie – Mathematik Astronomie - Informatik	<u>Ellipsen</u> , <u>Gärtnerkonstruktion</u> , <u>Polarkoordinaten</u> <u>Iteration</u> , <u>Gif-Animation</u>
Lehre allgemein	Kompetenzen (Wissen und Erkenntnisgewinnung), Unterrichtsmittel	Formeln anwenden, Ellipse konstruieren, <u>numerische Methode der Iteration</u> , Arbeitsblätter, <u>Fingerkino</u> , <u>Animation</u>

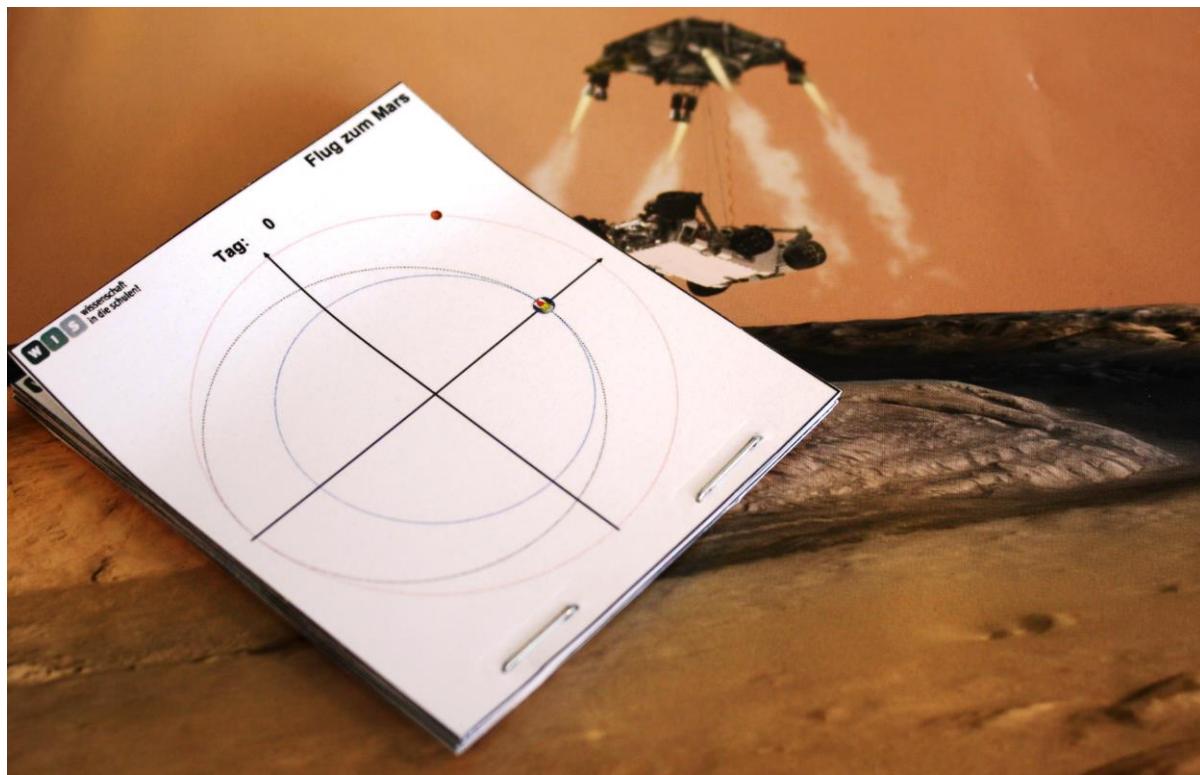


Abbildung 1: Fingerkino des Raumflugs von der Erde zum Mars entlang der Hohmann-Ellipse vor einem Bild (Teil des Titelbildes von SuW 8 / 2012), das die Ankunft der aktuellen Marsmission darstellt. Das im Fingerkino gezeigte Bild der Bahnen von Erde, Mars und Raumschiff ist ein zentrales Element des folgenden WIS-Beitrags.

([→zurück zum Anfang](#))

INFOBLATT: Die Hohmann-Ellipse

Es ist ja bekannt, dass sich die Planeten auf Ellipsenbahnen um die Sonne bewegen, wobei diese in einem ihrer Brennpunkte steht (**1. Keplersches Gesetz**).

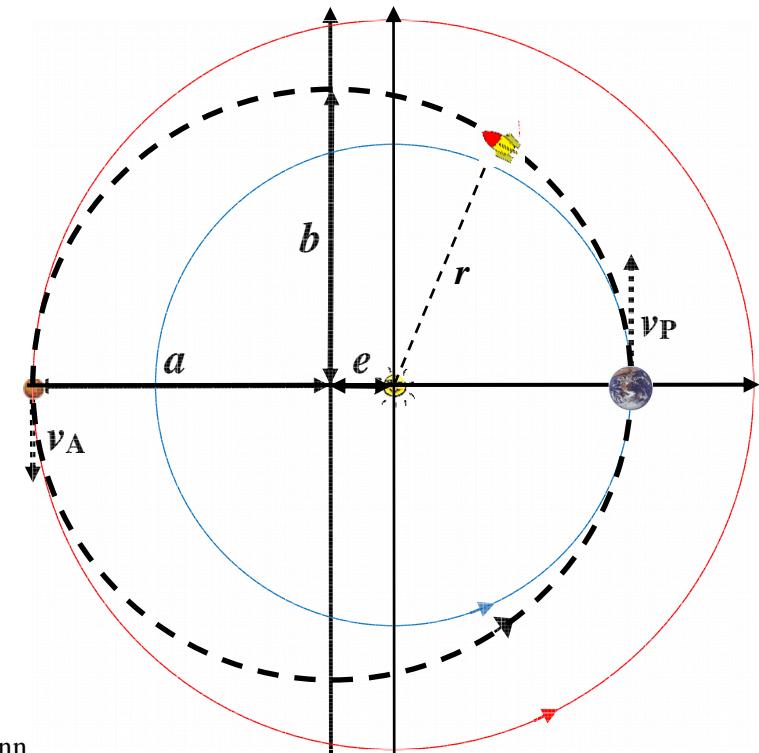
Dies gilt natürlich für jeden Körper, so auch für Sonden, die wir von der Erde aus ins Sonnensystem schicken. Die **Hohmann-Ellipse** (im Bild die dicke gestrichelte Kurve, auch Hohmannbahn genannt) ist diejenige Ellipse, die gerade von der Erdbahn zur Bahn des in der gleichen Ebene und in gleicher Richtung die Sonne umlaufenden Zielobjekts (z. B.: Mars) reicht.

Eine Rakete, die diesen Kurs einschlägt, benötigt die geringste Menge an Treibstoff. Dafür ist sie aber lange unterwegs.

Zur Bahngometrie

Im Folgenden sei zunächst an einige Ellipsengrößen und ihre Beziehung zueinander erinnert (siehe auch im Bild). Die grundlegenden Beschreibungsgrößen einer Ellipse sind ihre große Halbachse **a** und ihre kleine Halbachse **b**. Der Abstand der Brennpunkte vom Mittelpunkt der Ellipse wird als lineare Exzentrizität **e** bezeichnet und hängt mit **a** und **b** wie folgt zusammen:

$$e = \sqrt{a^2 - b^2}$$



Zur Bahnmechanik

Die Geschwindigkeit **v** eines Körpers im Abstand **r** beim Umlauf um die Sonne kann wie folgt berechnet werden:

$$v = \sqrt{\gamma \cdot M_{\text{Sonne}} \cdot \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)}$$

Diese Gleichung nennt man auch Vis-Viva-Gleichung oder Energieerhaltungsgleichung. Für die Raumfahrt ist sie von grundlegender Bedeutung. Folgende weiteren Größen stehen in der Formel: Masse der Sonne **M_{Sonne}** ($\approx 2 \cdot 10^{30}$ kg), die Gravitationskonstante **γ** und die große Halbachse **a**.

Die Bahngeschwindigkeiten **v_P** und **v_A** im Perihel und im Aphel (sonnennächster und sonnenfernster Punkt auf der Umlaufbahn) können bei Kenntnis der Abstände **r = r_P** (Periheldistanz) und **r = r_A** (Apheldistanz) berechnet werden.

Die Perihelgeschwindigkeit (Bahngeschwindigkeit im Perihel) hängt mit den Ellipsengrößen und der Umlaufzeit **T** wie folgt zusammen:

$$v_p = \frac{2\pi}{T} \cdot a \cdot \sqrt{\frac{a+e}{a-e}}$$

Die Umlaufzeit **T** auf der Hohmann-Ellipse kann mit Hilfe des 3. Keplerschen Gesetzes berechnet werden (Umlaufzeit der Erde: ca. 365,25 Tage).

(→zurück zum Anfang)

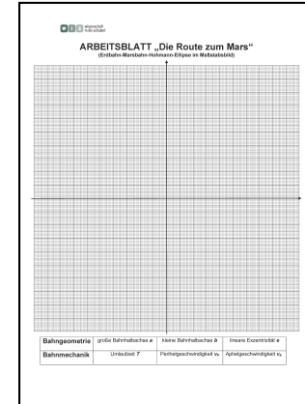
AUFGABE 1: Wo entlang führt die Reise zum Mars?

Ein maßstäbliches Bild der Hohmann-Ellipse die von der Erde zum Mars führt

- 1.) Zeichne auf das anhängende Arbeitsblatt oder ein kleinkariertes A4-Blatt mittig ein Koordinatensystem. Im Ursprung sei die Sonne. Ergänze nun die Bahnen von Erde und Mars (mit Pfeilen für die Umlaufrichtung), welche der Einfachheit halber als Kreise dargestellt werden können. Der Radius der Marsbahn sei 10 cm. Wie groß ist der Radius der Erdbahn in der Maßstabszeichnung? Welcher Maßstab kommt zur Anwendung?

Gegeben sind folgende Werte:

mittlerer Abstand der Erde von der Sonne: 1 AE,
mittlerer Abstand des Mars von der Sonne: 1,52 AE



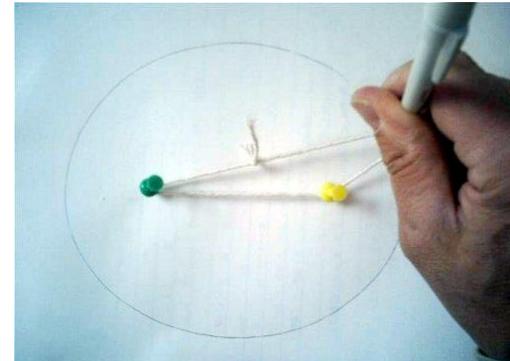
- 2.) Im nächsten Schritt gilt es, die Hohmann-Ellipse, welche die beiden Bahnen verbindet, maßstabsgerecht einzuziehen (wieder mit Pfeil für die Umlaufrichtung).

Zur Festlegung der Ellipsenform sind die Längen von großer und kleiner Halbachse (a und b) zu bestimmen. Der Wert von a steht durch die Notwendigkeit der Verbindung der Planetenbahnen durch die Hohmann-Ellipse fest. Der Wert von b kann ermittelt werden, indem man auf Grundlage der Perihelgeschwindigkeit zunächst die lineare Exzentrizität e der Ellipse bestimmt. Zur Ellipsenkonstruktion muss zunächst die Lage der Brennpunkte festgelegt und in der Zeichnung markiert werden. Es sei daran erinnert, dass die lineare Exzentrizität e den Abstand des Mittelpunktes der Ellipse zu einem Brennpunkt darstellt.

Praktischerweise sollte die Hohmann-Ellipse in ihrer Längsausdehnung auf der Zeichnung waagerecht mit dem rechten Brennpunkt im Ursprung des Koordinatensystems (gut genauerer Ort der Sonne) liegen. Wo befindet sich dann der linke Brennpunkt der maßstabsgerechten Hohmann-Ellipse in der Zeichnung? Welche maßstäblichen Ausmaße hat die Ellipse in a und b ?

Die Hohmann-Ellipse wird nun mittels der Methode der **Gärtnerkonstruktion** erzeugt. Dazu wird die Zeichnung auf eine Unterlage gelegt, in welche Pinwandstifte gestochen werden können. In beide Brennpunkte der Ellipse wird nun ein solcher Stift gedrückt. Um beide Pinwandstifte wird ein Schnurring gelegt, dessen maßstäbliche Länge (Umfang) ermittelt wurde aus: $2 \cdot (a + e)$. Welche Länge hat der Schnurring?

Mittels eines Bleistifts kann nun die Ellipse schließlich entlang des gestrafften Schnurings gezogen werden (siehe Bild rechts).



Gärtnerkonstruktion. ©: Von dino (talk) - I created this work entirely by myself., CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=7827644>.

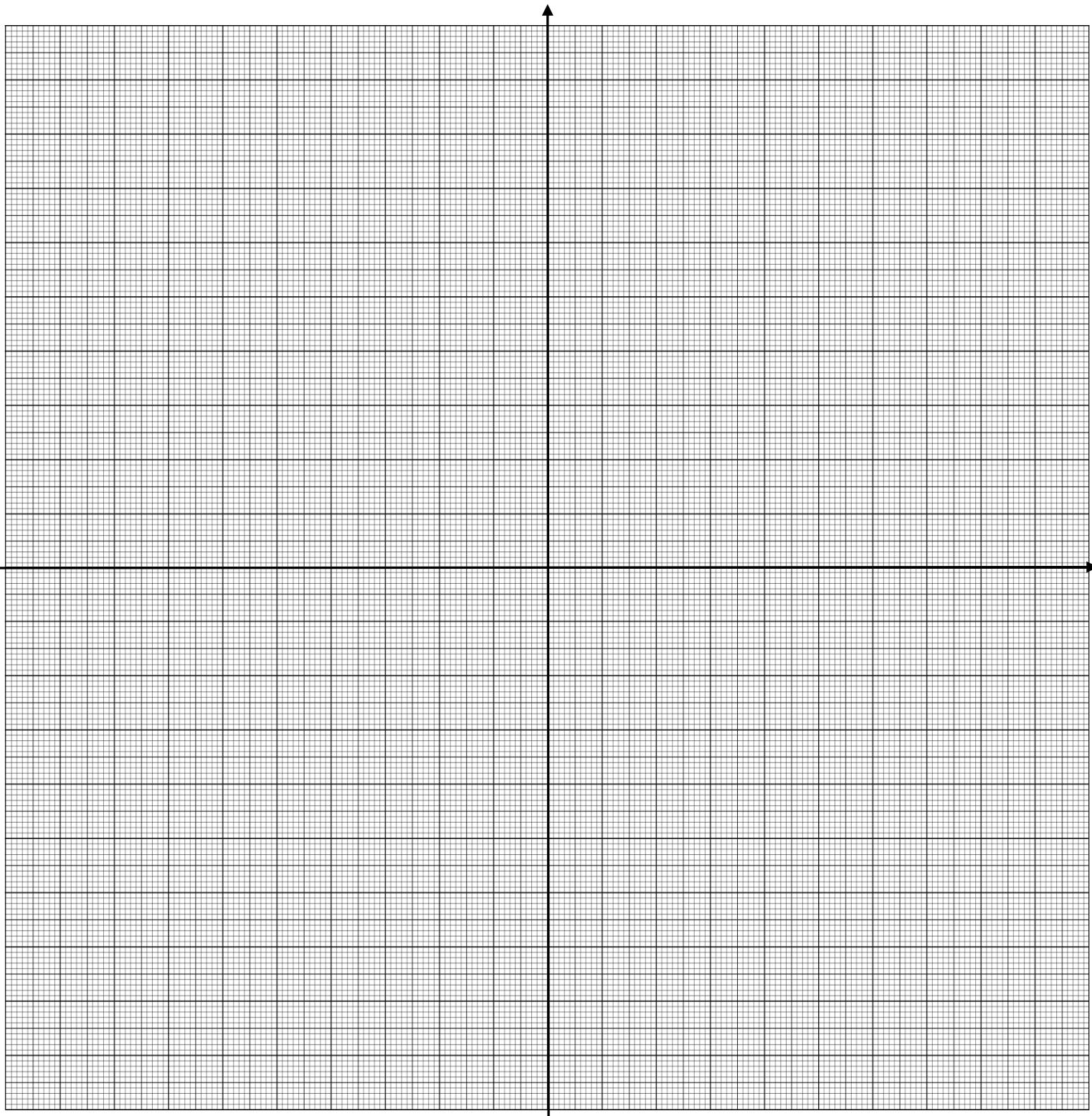
- 3.) Gib in einer Übersicht unter der maßstabsgerechten Zeichnung die Werte für die folgenden Parameter der Hohmann-Ellipse an:

Bahngometrie: große Bahnhalbachse a , kleine Bahnhalbachse b , lineare Exzentrizität e .

Bahnmechanik: Umlaufzeit T , Perihelgeschwindigkeit v_P , Aphelgeschwindigkeit v_A

ARBEITSBLATT „Die Route zum Mars“

(Erdbahn-Marsbahn-Hohmann-Ellipse im Maßstabsbild)



Bahngeometrie	große Bahnhalbachse a	kleine Bahnhalbachse b	lineare Exzentrizität e
Bahnmechanik	Umlaufzeit T	Perihelgeschwindigkeit v_p	Aphelgeschwindigkeit v_A

[\(→zurück zum Anfang\)](#)

AUFGABE 2: Wann kann die Reise beginnen?

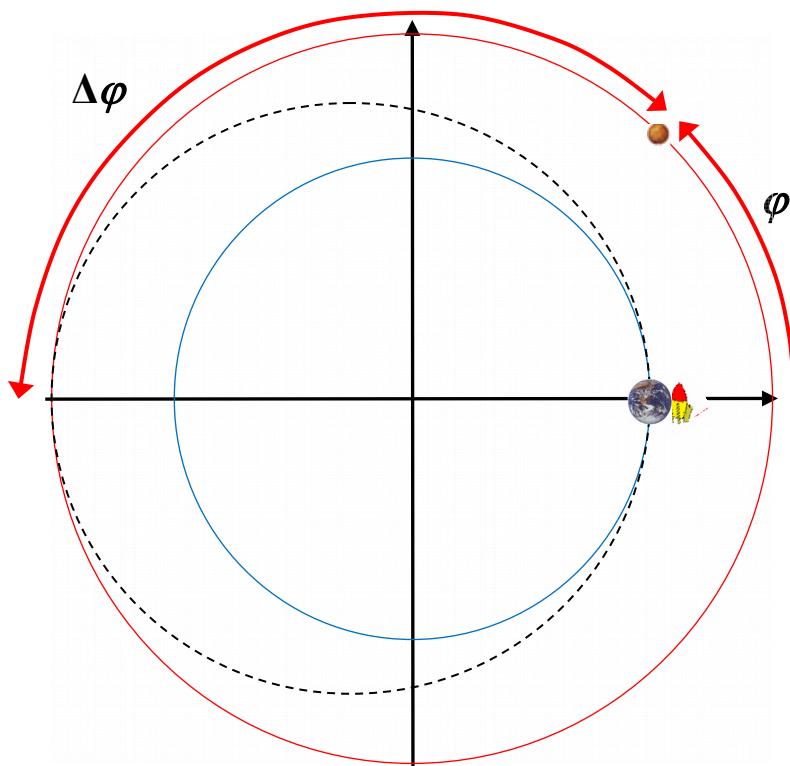
Die Startfenster zum Mars – die Konstellation Erde-Mars muss stimmen



Eine Planetensonde wird am 22. Januar 2014 von der Erde aus in eine Hohmannbahn zum Mars gestartet. Die Erde befindet sich zu dieser Zeit bei einem Polarwinkel von $\phi = 0^\circ$ (siehe Bild).

Die Bahnen von Erde und Mars werden als kreisförmig angenommen.

- 1.) Wann kommt die Sonde bei der Marsbahn (beim Mars) an?
- 2.) An welcher Stelle seiner Bahn (bei welchem **Polarwinkel ϕ**) muss der Mars beim Start der Sonde stehen, damit er bei ihrer Ankunft auch am Ankunftsorbit ankommt?
Die Umlaufzeit des Mars beträgt 686,98 Tage.
- 3.) Nach welcher Zeit wiederholt sich die notwendige Startkonstellation zwischen Erde und Mars, d. h. wann öffnet sich wieder ein **Startfenster**? Welche Planetenkonstellation ist einige Monate nach dem Start zu erwarten?
- 4.) Informiere Dich im Internet z. B. unter der Adresse <http://clowder.net/hop/railroad/sched.html>, wann sich die Startfenster zum Mars öffnen.

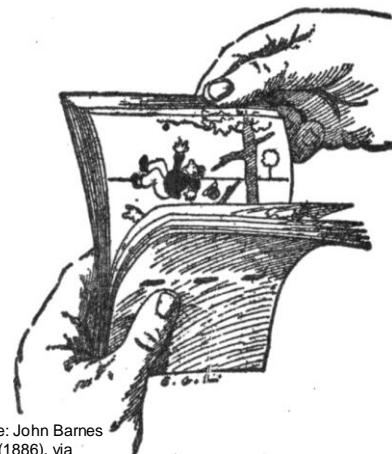


[\(→zurück zum Anfang\)](#)

AUFGABE 3 (PROJEKT): Die Reise zum Mars in bewegten Bildern

Erstelle ein **Daumenkino** oder einen kurzen Trickfilm (z. B. eine **animierte gif-Datei**), welche die Bewegungen von Erde, Mars und der Marssonde entlang der Hohmann-Ellipse darstellt.

Nutze als Vorlage ein (Computer-)Bild mit Erdbahn, Marsbahn und Hohmann-Ellipse, in das für jeden ausgewählten Zeitpunkt die Positionen von Erde, Mars und Raumschiff eingetragen werden. Viele Bilder von aufeinander folgenden Zeitpunkten ergeben den Film. Die Zeitabstände müssen dabei gleich sein.



Daumenkino. ©: Original author is de: John Barnes Linnet - Zeitgenössische Illustration (1886), via de.wikipedia, Gemeinfrei, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=5182776>.

THE KINEOGRAPH.

Vorgehensweise:

- 1.) Der Film soll (zunächst) aus 16 Bildern bestehen. In Bild 1 stehe die Erde samt Raumschiff bei einem Polarwinkel von $\phi = 0^\circ$ (siehe Bild zuvor). In Bild 16 ist das Raumschiff beim Mars ($\phi = 180^\circ$). Bestimme den wahren zeitlichen Abstand zwischen zwei Bildern, indem Du die Reisezeit in 15 gleich große Abschnitte teilst, und trage die aufeinander folgenden Zeitpunkte in die untenstehende Tabelle ein.
- 2.) Lege nun das einheitliche „Grundbild“ mit den Bahnen von Erde, Mars und Raumschiff an. Verschaffe Dir eventuell Bildchen für die Erde, den Mars und das Raumschiff, damit die Animation auch eine künstlerische Note erfährt.
- 3.) Da für Erde und Mars Kreisbahnen angenommen werden, ist die Berechnung ihrer aufeinander folgenden Positionen einfach. Bestimme die jeweiligen Polarwinkel ϕ für die zuvor berechneten Zeitpunkte für die Erde und trage die Ergebnisse in die Tabelle ein.
- 4.) Für Mars besteht die kleine Schwierigkeit, dass die Berechnung der aufeinander folgenden Polarwinkel bei dessen Endpunkt beginnt. Es wird also ausgehend von $\phi = 180^\circ$ rückwärts gerechnet (sukzessive Subtraktion).
- 5.) Die Bestimmung der Bahnpositionen des Raumschiffs gestaltet sich bedeutend schwieriger, da sich dieses auf einer Ellipse bewegt. Das **2. Keplersche Gesetz** liefert die Grundlage für die Berechnung. Danach überstreicht der Leitstrahl Sonne-Raumschiff in allen gleich großen Zeitabschnitten auch gleich großen Flächen (Bahnsektoren in deren Spitze die Sonne steht). Bestimme die Fläche eines Bahnsektors ΔA , indem Du die halbe Ellipsenbahnfläche in 15 gleich großen Sektoren teilst. Die Fläche A einer Ellipse berechnet sich auf Grundlage ihrer Achsen wie folgt: $A = \pi \cdot a \cdot b$.

[\(→zurück zum Anfang\)](#)

- 6.) Jetzt gilt es, den einzelnen Bahnabschnitten ΔA (konstanter Größe) jeweils einen Polarwinkelbereich $\Delta\varphi$ zuzuordnen. Eine mathematische Grundlage dafür liefert folgende Formel zur Berechnung der Ellipsen-Sektorflächen:

$$\Delta A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \sqrt{1 - e^2} \cdot \left(E \cdot \frac{\pi}{180^\circ} - e \cdot \sin E \right),$$

wobei der Winkel E die exzentrische Anomalie darstellt. Diese stellt den Polarwinkel dar, der von der Ellipsenmitte (nicht von der Sonne) aus gemessen wird.

Die Bestimmung von E gestaltet sich recht schwierig (ist nur numerisch möglich):

$$E(t) - \frac{\pi}{180^\circ} \cdot e \cdot \sin E(t) = 360^\circ \cdot \frac{t - t_0}{T}.$$

Deshalb berechnen wir die Flächen ΔA der Bahnsektoren näherungsweise, indem wir die Sektoren mit den Radien $r_B(\varphi)$ und $r_C(\varphi)$ (siehe Abbildung) durch Kreissektoren ABC annähern.

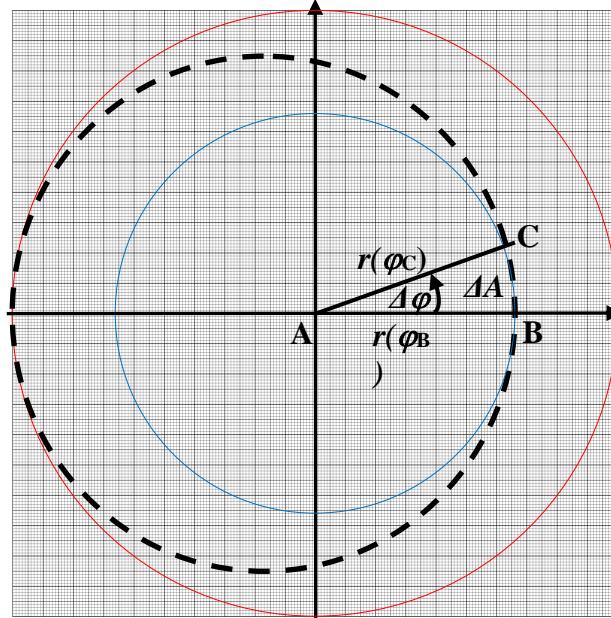
Diese Rechnung erfordert eine **Iteration**.

Zunächst nutzen wir $r_B(\varphi)$ als Startwert für jeden Bahnsektor und erhalten eine erste Näherung für $\Delta\varphi$:

$$\Delta\varphi = \frac{360^\circ \cdot \Delta A}{r_B(\varphi)^2 \cdot \pi}.$$

Nun können wir den Punkt C abtragen und $r_C(\varphi)$ bestimmen (vermessen) und schließlich unter Nutzung des Mittelwertes der Radien $r_B(\varphi)$ und $r_C(\varphi)$ einen verbesserten Wert für $\Delta\varphi$ berechnen:

$$\Delta\varphi = \frac{360^\circ \cdot \Delta A}{\left(\frac{r_B(\varphi) + r_C(\varphi)}{2} \right)^2 \cdot \pi}.$$



Der Punkt C kann nun erneut (genauer) abgetragen werden. Es ergibt sich ein evtl. leicht veränderter Wert für $r_C(\varphi)$, der zugleich den Startwert $r_B(\varphi)$ für den nächsten Bahnsektor darstellt.

(Mit der wiederholten Berechnung von $\Delta\varphi$ „erlebt man“ die **numerische Methode der Iteration**).

Zur Information:

Der neue Radius $r_C(\varphi)$ könnte, anstatt ihn zu messen, auch mit Hilfe der Ellipsengleichung bestimmt werden:

Zur Genauigkeit:

Die Längenmessung sollte auf einen halben Millimeter genau erfolgen. Die berechneten Winkel sollten auf ein Zehntel Grad gerundet werden.

[\(→zurück zum Anfang\)](#)

- 7.) Nun können die 16 Filmbilder auf Grundlage der Informationen in der mittlerweile gefüllten Tabelle gestaltet werden. Dies kann mit der Hand oder mit Hilfe eines Grafikprogramms geschehen. Wichtig ist, dass alle Bilder (bis auf die Positionen von Erde, Mars und Raumschiff und eventuell noch eine Zeitangabe) identisch sind, so dass beim Abspielen des Films keine „Wackelei“ auftritt.

Die Verwendung von kleinen Bildchen für Erde, Mars und Raumschiff macht die Animation etwas schöner anzusehen.

Die Bilder werden als gif-Dateien (gif ... Graphics Interchange Format) gespeichert.



- 8.) Im abschließenden Schritt werden die 16 Filmbilder (16 gif-Dateien) zu einer **animierten gif-Datei** zusammengefasst. Dazu existieren verschiedene Programme.

Hier wurde das von Chip online kostenfrei zur Verfügung (zum Download) gestellte Programm „Gif Animator Animake“ (rechts ein Bildschirmabdruck des Programmfensters) genutzt.

Das Programm ist sehr schnell heruntergeladen und einfach handhabbar. Nach ca. 20-30 min ist die Animation (samt Einarbeitungszeit) fertig.

The screenshot shows two tables of frame data for "Animation Flug Erde - Mars" and "Animation Flug Mars - Erde".

Animation Flug Erde - Mars

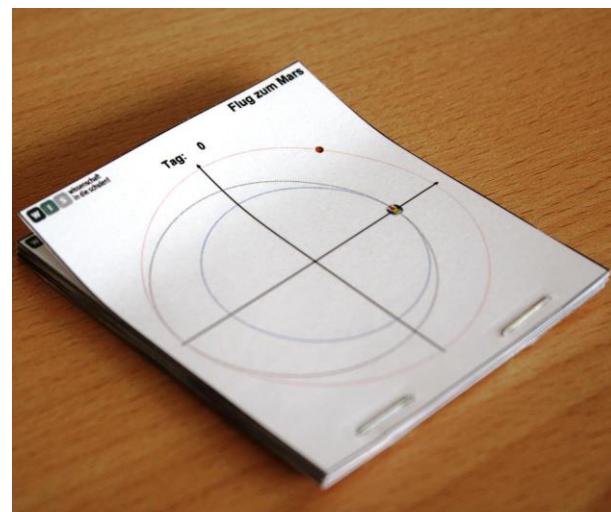
Frame#	Größe	Farben	Transparent	Lokale Pale...	Dauer (ms)	Offset	Name
1	600x690	256	Nein	Ja	3000	0,0	frame 1 -- Animation Flug Erde - Mars.gif
2	600x690	256	Nein	Ja	100	0,0	frame 2 -- Animation Flug Erde - Mars.gif
3	600x690	256	Nein	Ja	100	0,0	frame 3 -- Animation Flug Erde - Mars.gif
4	600x690	256	Nein	Ja	100	0,0	frame 4 -- Animation Flug Erde - Mars.gif
5	600x690	256	Nein	Ja	100	0,0	frame 5 -- Animation Flug Erde - Mars.gif
6	600x690	256	Nein	Ja	100	0,0	frame 6 -- Animation Flug Erde - Mars.gif
7	600x690	256	Nein	Ja	100	0,0	frame 7 -- Animation Flug Erde - Mars.gif
8	600x690	256	Nein	Ja	100	0,0	frame 8 -- Animation Flug Erde - Mars.gif
9	600x690	256	Nein	Ja	100	0,0	frame 9 -- Animation Flug Erde - Mars.gif
10	600x690	256	Nein	Ja	100	0,0	frame 10 -- Animation Flug Erde - Mars.gif
11	600x690	256	Nein	Ja	100	0,0	frame 11 -- Animation Flug Erde - Mars.gif
12	600x690	256	Nein	Ja	100	0,0	frame 12 -- Animation Flug Erde - Mars.gif
13	600x690	256	Nein	Ja	100	0,0	frame 13 -- Animation Flug Erde - Mars.gif
14	600x690	256	Nein	Ja	100	0,0	frame 14 -- Animation Flug Erde - Mars.gif
15	600x690	256	Nein	Ja	100	0,0	frame 15 -- Animation Flug Erde - Mars.gif
16	600x690	256	Nein	Ja	3000	0,0	frame 16 -- Animation Flug Erde - Mars.gif

Animation Flug Mars - Erde

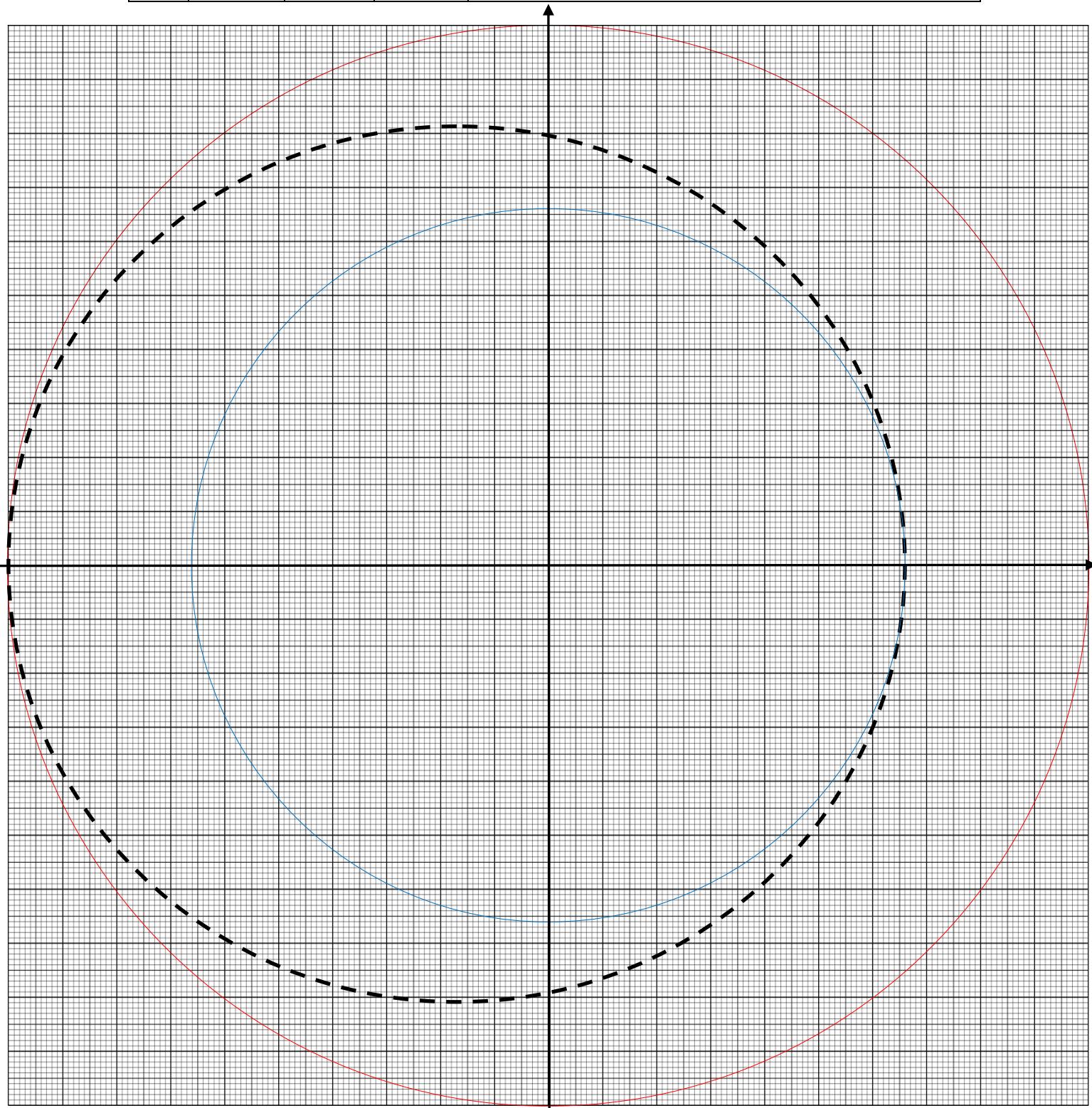
Frame#	Größe	Farben	Transparent	Lokale Pale...	Dauer (ms)	Offset	Name
1	600x690	256	Nein	Ja	3000	0,0	frame 16 -- Animation Flug Erde - Mars.gif
2	600x690	256	Nein	Ja	100	0,0	frame 15 -- Animation Flug Erde - Mars.gif
3	600x690	256	Nein	Ja	100	0,0	frame 14 -- Animation Flug Erde - Mars.gif
4	600x690	256	Nein	Ja	100	0,0	frame 13 -- Animation Flug Erde - Mars.gif
5	600x690	256	Nein	Ja	100	0,0	frame 12 -- Animation Flug Erde - Mars.gif
6	600x690	256	Nein	Ja	100	0,0	frame 11 -- Animation Flug Erde - Mars.gif
7	600x690	256	Nein	Ja	100	0,0	frame 10 -- Animation Flug Erde - Mars.gif
8	600x690	256	Nein	Ja	100	0,0	frame 9 -- Animation Flug Erde - Mars.gif
9	600x690	256	Nein	Ja	100	0,0	frame 8 -- Animation Flug Erde - Mars.gif
10	600x690	256	Nein	Ja	100	0,0	frame 7 -- Animation Flug Erde - Mars.gif
11	600x690	256	Nein	Ja	100	0,0	frame 6 -- Animation Flug Erde - Mars.gif
12	600x690	256	Nein	Ja	100	0,0	frame 5 -- Animation Flug Erde - Mars.gif
13	600x690	256	Nein	Ja	100	0,0	frame 4 -- Animation Flug Erde - Mars.gif
14	600x690	256	Nein	Ja	100	0,0	frame 3 -- Animation Flug Erde - Mars.gif
15	600x690	256	Nein	Ja	100	0,0	frame 2 -- Animation Flug Erde - Mars.gif
16	600x690	256	Nein	Ja	3000	0,0	frame 1 -- Animation Flug Erde - Mars.gif

- 9.) Es könnte auch ein Ziel sein, die Animation mit „traditionellen“ Hilfsmitteln zu gestalten und ein Fingerkino zu gestalten.

Wer alle zuvor genannten Punkte überspringen möchte und nur an dem Fingerkino interessiert ist, für den finden sich im Anhang die für die Animation erzeugten Bilder, die nur noch auf etwas festeres Papier ausgedruckt, ausgeschnitten und zu einem Fingerkino zusammengesetzt werden müssen.



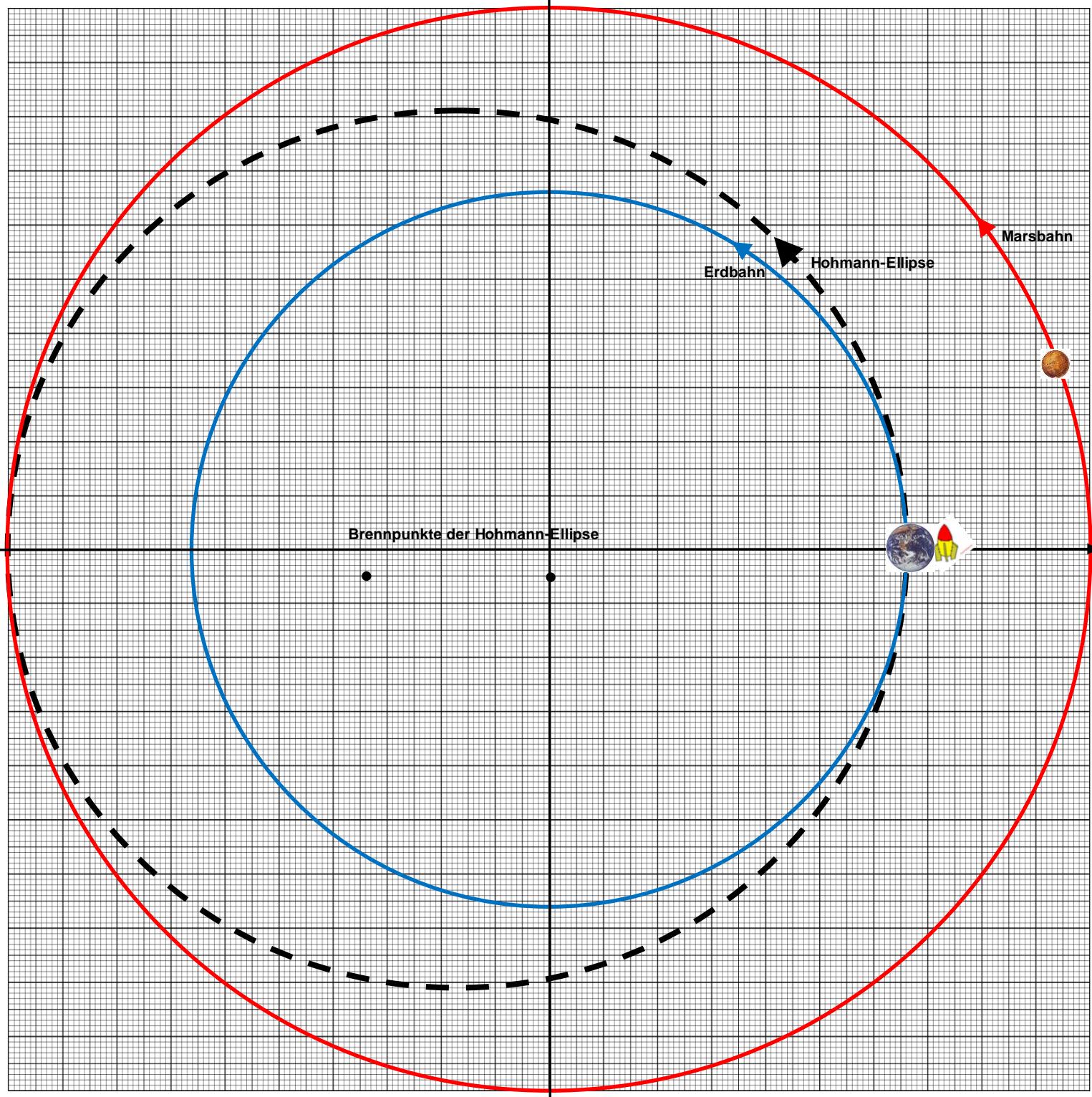
Sektor Nr.	Zeitpunkt [d]	Erde: φ [°]	Mars: φ [°]	Raumschiff: (Radien in cm, Winkel in °) $\varphi_B \rightarrow r(\varphi_B) \rightarrow \Delta\varphi \rightarrow \varphi_C \rightarrow r(\varphi_C) \rightarrow \Delta\varphi \rightarrow \varphi_C \rightarrow r(\varphi_C)$
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				



Ergebnisse

Lösungen zu AUFGABE 1: Wo entlang führt die Reise zum Mars?

ARBEITSBLATT „Die Route zum Mars“
(Erbahn-Marsbahn-Hohmann-Ellipse im Maßstabsbild)



Bahngeometrie (Hohmannellipse)	große Bahnhalbachse a $189 \cdot 10^9$ m	kleine Bahnhalbachse b $185 \cdot 10^9$ m	lineare Exzentrizität e $38 \cdot 10^9$ m
Bahnmechanik (Hohmannellipse)	Umlaufzeit T $516,59$ d	Perihelgeschwindigkeit v_P 32668 m/s	Aphelgeschwindigkeit v_A 21492 m/s

[\(→zurück zum Anfang\)](#)

Zu 1.1)

1,52 AE → 10 cm, 1 AE → x?

$$x = \frac{1 \text{ AE}}{1,52 \text{ AE}} \cdot 10 \text{ cm} \approx \underline{\underline{6,6 \text{ cm}}}.$$

Das bedeutet, 6,6 cm im Bild zeigen 1 AE ($150 \cdot 10^{11}$ cm) in Realität.
Der Maßstab beträgt also etwa 1 : 2270 Milliarden (1 : $22,7 \cdot 10^{11}$)

Zu 1.2)

Die Hohmann-Ellipse von der Erdbahn zur Marsbahn hat ihr Perihel r_P beim Bahnradius der Erde und ihr Aphel r_A beim Bahnradius des Mars. Für die große Halbachse dieser Hohmann-Ellipse gilt:

$$2 \cdot a = r_P + r_A.$$

Die Perihel-Geschwindigkeit v_P der betrachteten Hohmann-Ellipse beträgt:

$$\begin{aligned} v_P &= \sqrt{\gamma \cdot M_{\text{Sonne}} \cdot \left(\frac{2}{r_P} - \frac{1}{0,5 \cdot (r_P + r_A)} \right)} \\ &= \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3}{\text{kg s}^2} \cdot 1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg} \cdot \left(\frac{2}{150 \cdot 10^9 \text{ m}} - \frac{1}{0,5 \cdot (150 + 1,52 \cdot 150) \cdot 10^9 \text{ m}} \right)} \\ &= \sqrt{1,327 \cdot 10^{20} \cdot \left(\frac{2}{150 \cdot 10^9} - \frac{1}{189 \cdot 10^9} \right) \frac{\text{m}}{\text{s}}} \approx \underline{\underline{32668 \frac{\text{m}}{\text{s}}}}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe des **3. Keplerschen Gesetzes** kann die Umlaufzeit auf der betrachteten Hohmann-Ellipse berechnet werden:

$$\begin{aligned} \frac{T^2}{T_{\text{Erde}}^2} &= \frac{a^3}{a_{\text{Erde}}^3} \quad \rightarrow \quad T = \sqrt{\frac{a^3}{a_{\text{Erde}}^3}} \cdot T_{\text{Erde}} = \sqrt{\frac{(r_P + r_A)^3}{r_P^3}} \cdot T_{\text{Erde}} \\ &= \sqrt{\frac{(150 \cdot 10^9 \text{ m} + 1,52 \cdot 150 \cdot 10^9 \text{ m})^3}{(150 \cdot 10^9 \text{ m})^3}} \cdot 365,25 \text{ d} \\ &= \sqrt{\frac{\left(\frac{1+1,52}{2}\right)^3}{(1)^3}} \cdot 365,25 \text{ d} \\ &\approx \underline{\underline{516,59 \text{ d.}}} \end{aligned}$$

[\(→zurück zum Anfang\)](#)

Nun können schließlich die lineare Exzentrizität e der Hohmann-Ellipse und daraus die Länge von deren kleiner Halbachse b berechnet werden:

$$v_p = \frac{2\pi}{T} \cdot a \cdot \sqrt{\frac{a+e}{a-e}} \quad \rightarrow \quad e = \frac{v_p^2 \cdot a - \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot a^3}{v_p^2 + \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot a^2}.$$

Mit $4\pi^2/T^2 \approx 1,982 \cdot 10^{-14} \text{ s}^{-2}$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} e &\approx \frac{\left(32668 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 \cdot 189 \cdot 10^9 \text{ m} - 1,982 \cdot 10^{-14} \text{ s}^{-2} \cdot (189 \cdot 10^9 \text{ m})^3}{\left(32668 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + 1,982 \cdot 10^{-14} \text{ s}^{-2} \cdot (189 \cdot 10^9 \text{ m})^2} \\ &= \frac{32668^2 \cdot 189 \cdot 10^9 - 1,982 \cdot 10^{-14} \cdot (189 \cdot 10^9)^3}{32668^2 + 1,982 \cdot 10^{-14} \cdot (189 \cdot 10^9)^2} \text{ m} \\ &\approx \frac{2,017 \cdot 10^{20} - 1,338 \cdot 10^{20}}{1,775 \cdot 10^9} \approx \underline{\underline{38 \cdot 10^9 \text{ m}}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e &= \sqrt{a^2 - b^2} \quad \rightarrow \quad b = \sqrt{a^2 - e^2} \\ b &= \sqrt{(189 \cdot 10^9 \text{ m})^2 - (38,25 \cdot 10^9 \text{ m})^2} \\ b &\approx \underline{\underline{185 \cdot 10^9 \text{ m}}}. \end{aligned}$$

Die Brennpunkte befinden sich einmal in der Sonne ($x = 0 \text{ cm}$, $y = 0 \text{ cm}$) und einmal bei ($x \approx -3,4 \text{ cm}$, $y = 0 \text{ cm}$). Es sei daran erinnert, dass e den Abstand vom Mittelpunkt zum Brennpunkt einer Ellipse beschreibt; der Abstand zwischen beiden Brennpunkten beträgt also $2e$.

Die Ellipse hat folgende maßstäblichen Ausmaße: $a = 8,3 \text{ cm}$, $b = 8,14 \text{ cm}$.

Die Länge des für die Gärtnerkonstruktion benötigten Schnurtrings beträgt $2 \cdot (a+e) \approx 20 \text{ cm}$.

Zu 1.3)

Geometrie: $a = 189 \cdot 10^9 \text{ m}$, $b = 185 \cdot 10^9 \text{ m}$, $e = 38 \cdot 10^9 \text{ m}$

Bahnmechanik: $T = 516,59 \text{ d}$, $v_p = 32668 \text{ m/s}$, $v_A = 21492 \text{ m/s}$,

$$\begin{aligned} v_A &= \sqrt{\gamma \cdot M_{\text{Sonne}} \cdot \left(\frac{2}{r_A} - \frac{1}{r_p + r_A} \right)} \\ &= \sqrt{1,327 \cdot 10^{20} \cdot \left(\frac{2}{1,52 \cdot 150 \cdot 10^9} - \frac{1}{189 \cdot 10^9} \right) \frac{\text{m}}{\text{s}}} \\ &\approx \underline{\underline{21492 \frac{\text{m}}{\text{s}}}}. \end{aligned}$$

[\(→zurück zum Anfang\)](#)

Lösungen zu AUFGABE 2: Wann kann die Reise beginnen?

Zu 2.1)

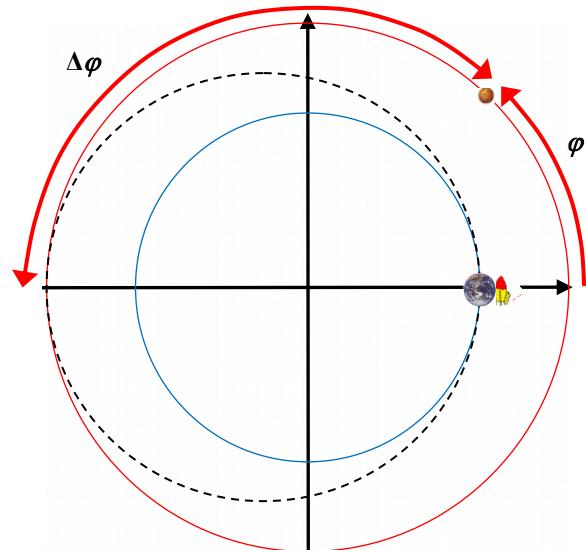
Die Sonde braucht auf ihrem Hohmann-Orbit für einen Umlauf um die Sonne 516,59 Tage (siehe Aufgabe 1.2). Entsprechend kommt sie bei der Marsbahn nach der Hälfte dieser Zeit – nach rund 258,3 Tagen – an, also etwa am 4. Oktober 2014.

Zu 2.2)

Die Frage lautet also, welchen Winkelabschnitt $\Delta\phi$ legt der Mars in 258,3 Tagen zurück (Annahme: Kreisbahnbewegung). Eine einfache Verhältnisgleichung führt zur Lösung:

$$\frac{\Delta\phi}{360^\circ} = \frac{258,3 \text{ d}}{686,98 \text{ d}} \Rightarrow \Delta\phi \approx 135^\circ.$$

Für die Startkonstellation der Planeten muss gelten: Wenn die Erde bei $\varphi = 0^\circ$ steht, dann muss Mars bei $\varphi \approx 45^\circ$ stehen.



Zu 2.3)

Die Frage nach dem nächsten Startfenster könnte nun auch so formuliert werden: Nach welcher Zeit ist Mars in seiner Umlaufbahn der Erde erneut um ca. 45° voraus?

Ausgangspunkt sei das im Bild rechts oben dargestellte Startfenster (Erde: $\varphi_E = 0^\circ$, Mars: $\varphi_M = 45^\circ$). Für diese Situation gilt: $\varphi_M - \varphi_E = 45^\circ$.

Die Winkelgeschwindigkeiten ω_M und ω_E von Mars und Erde betragen:

$$\omega_M = \frac{360^\circ}{686,98 \text{ d}} \approx 0,524^\circ/\text{d} \quad \text{und} \quad \omega_E = \frac{360^\circ}{365,25 \text{ d}} \approx 0,986^\circ/\text{d}.$$

Da die Winkelgeschwindigkeit der Erde größer ist als die des Mars, ist leicht einzusehen, dass die schnellere Erde den Mars überrunden muss ($+360^\circ$), damit sich das nächste Startfenster öffnet.

Für das nächste Startfenster nach der Zeit T_H gilt also:

$$(\varphi_M + T_H \cdot \omega_M) - (\varphi_E + T_H \cdot \omega_E + 360^\circ) = 45^\circ.$$

$$T_H \cdot \omega_M - T_H \cdot \omega_E + \varphi_M - \varphi_E = T_H \cdot (\omega_M - \omega_E) + \varphi_M - \varphi_E = -315^\circ,$$

$$T_H = \frac{-315^\circ - \varphi_M + \varphi_E}{(\omega_E - \omega_M)} = \frac{-315 - 45 + 0}{0,524^\circ/\text{d} - 0,986^\circ/\text{d}} = \frac{-360}{-0,462^\circ/\text{d}} \approx 779 \text{ d}.$$

Das Startfenster für einen Raumflug zum Mars, d. h. die notwendige Startkonstellation zwischen Erde und Mars wiederholt sich also etwa alle 779 Tage (2,13 Jahre). Man kann sich merken, dass sich das Startfenster immer einige Monate vor der Oppositionsstellung öffnet.

Zu 2.4)

Unter der URL <http://clowder.net/hop/railroad/sched.html> findet man einen „Cosmic Train Schedule“. Darin finden sich für den Mars u. a. die in rechts stehender Tabelle aufgeführten Daten für die Start(-fenster) und die Ankunft (hier nur auf den Monat genau).

Das genauere „Öffnungsschema“ eines Startfensters kann man z. B. auf der Seite zur aktuellen (gerade gelandeten) Marsmission „Mars Science Laboratory“ ersehen: <http://mars.jpl.nasa.gov/msl/mission/timeline/launch/launchwindow/>.

Start	Ankunft
Mai 2003	Februar 2004
Juli 2005	März 2006
August 2007	Mai 2008
Oktober 2009	Juni 2010
Dezember 2011	August 2012
Januar 2014	Oktober 2014
März 2016	November 2016
April 2018	Januar 2019

(→zurück zum Anfang)

Lösungen zu AUFGABE 3: Die Marsmission in bewegten Bildern

Zu 3.1)

Für die Umlaufzeit auf der Hohmann-Ellipse wurden 516,59 Tagen bestimmt. Das heißt, dass das Raumschiff von der Erde zum Mars (und später wieder zurück) die halbe Zeit – 258,3 Tage – benötigt. Ein Zeitabschnitt ist also 17,22 Tage lang (258,3 / 15). Die aufeinander folgenden Zeitpunkte für den Beginn des Durchlaufens der Bahnsektoren (gezählt ab Tag 0) können nun in Spalte 2 der Tabelle eingetragen werden.

Zu 3.2)

Die Berechnung der aufeinanderfolgenden Bahnpositionen von Erde und Mars erfordert die Kenntnis ihrer Umlaufzeiten. Diese lauten für die Erde rund 365,256 Tage und den Mars 686,98 Tage.

Die Erde überstreicht in 17,22 Tage einen Winkel von rund $16,9722^\circ$; für den Mars sind es $9,0238^\circ$. Mit Hilfe dieser Werte können die Polarwinkel (Spalten 3 und 4 in Tabelle) berechnet werden.

Zu 3.5)

Die Fläche eines Bahnsektors beträgt in Realität

$$A = \frac{\pi \cdot a \cdot b}{2 \cdot 15} = \frac{\pi \cdot 189 \cdot 10^9 \text{ km} \cdot 185 \cdot 10^9 \text{ km}}{2 \cdot 15} \approx 3,661 \cdot 10^{21} \text{ km}^2$$

und in der maßstäblichen Zeichnung

$$A = \frac{\pi \cdot a \cdot b}{2 \cdot 15} = \frac{\pi \cdot 8,3 \cdot \text{cm} \cdot 8,14 \cdot \text{cm}}{2 \cdot 15} \approx 7,08 \text{ cm}^2.$$

Zu 3.6)

Spalte 5 in der Tabelle zeigt die Ergebnisse zu dieser Teilaufgabe.

Beispiel für Bahnsektor Nr. 1:

Zunächst wird mit dem Wert von $r_B(\varphi) = 6,6 \text{ cm}$ (Erbahnradius, siehe Aufgabe 1) gerechnet:

$$\Delta\varphi = \frac{360^\circ \cdot 7,08 \text{ cm}^2}{(6,6 \text{ cm})^2 \cdot \pi} \approx 18,6^\circ.$$

Bei $\varphi = 18,6^\circ$ erhält man rund $r_C(\varphi) = 6,65 \text{ cm}$.

Nun kann man den verbesserten Wert von $\Delta\varphi$ ermitteln:

Es ergibt sich auch ein neuer Wert von $r_C(\varphi)$.

$r_C(\varphi)$ ist zugleich der Startwert $r_B(\varphi)$ für den nächsten Bahnsektor.

$$\Delta\varphi = \frac{360^\circ \cdot 7,08 \text{ cm}^2}{\left(\frac{6,6 \text{ cm} + 6,65 \text{ cm}}{2} \right)^2 \cdot \pi} \approx 18,5.$$

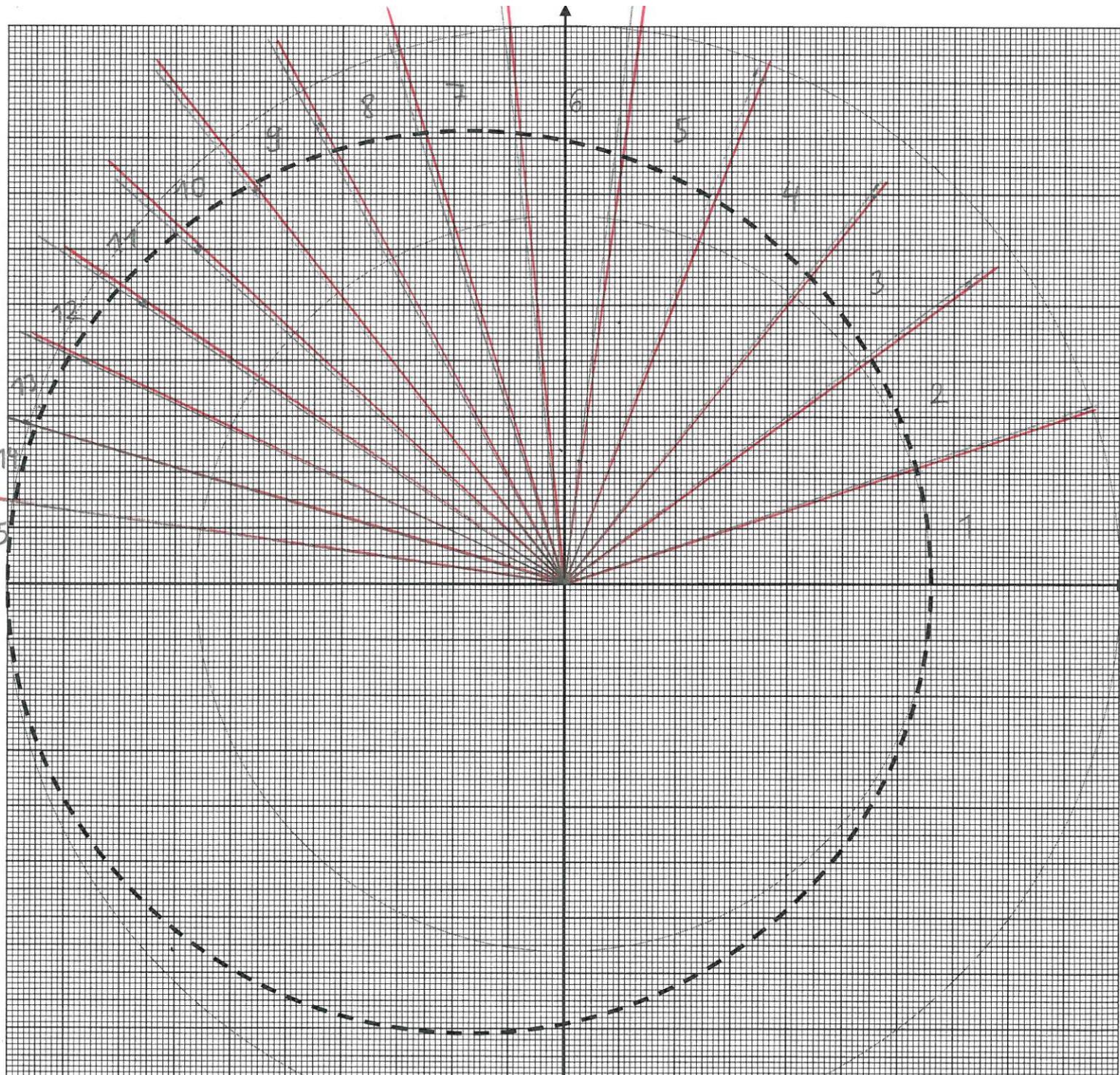
Sektor Nr.	Zeitpunkt [d]	Raumschiff: (Radien in cm, Winkel in °)	
		Erde: φ [°]	Mars: φ [°]
1	0	0	44,6
2	17,22	17,0	53,7
3	34,44	33,9	62,7
4	51,66	50,9	71,7
5	68,88	67,9	80,7
6	86,10	84,9	89,8
7	103,32	101,8	98,8
8	120,54	118,8	107,8
9	137,76	135,8	116,8
10	154,98	152,7	125,9
11	172,20	169,7	134,9
12	189,42	186,7	143,9
13	206,64	203,7	152,9
14	223,86	220,6	161,9
15	241,08	237,6	171,0
	258,30	254,6	180,0

Tabelle: Ergebnisse der Bahnberechnungen. Die rechte Spalte zeigt das schrittweise und iterative Vorgehen zur Bestimmung der Polarwinkel φ_B des Raumschiffs. Die blau hervorgehobenen Ergebnisse sind für die Erstellung der Filmbilder wichtig. Die zugehörige Grafik findet sich auf der Folgeseite.

Sukzessive und iterative Konstruktion zu Teilaufgabe 3.6

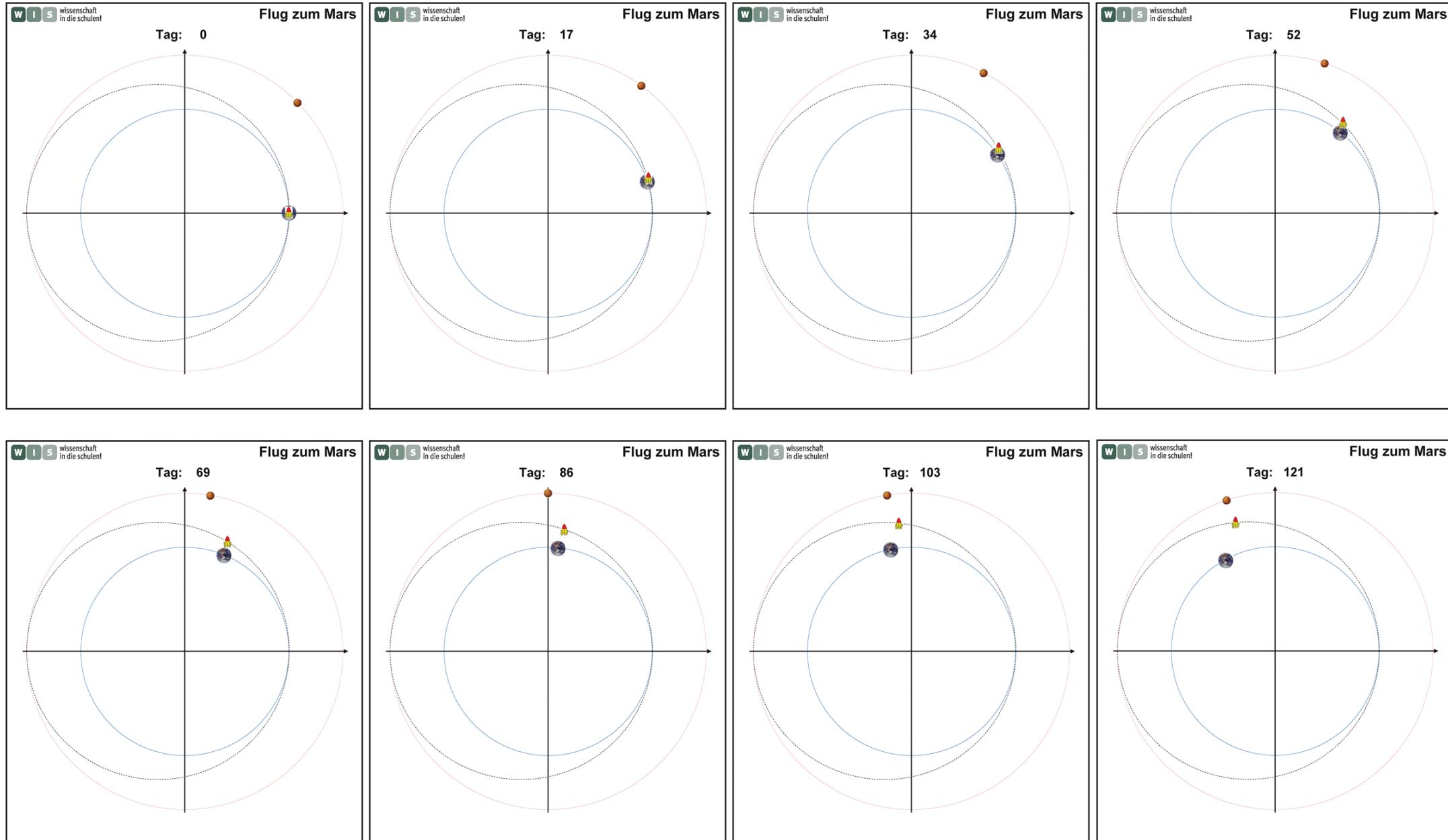
Im ersten Konstruktionsschritt wurde jeweils für jeden Bahnsektor der Bleistiftstrich (hier schwarz) gezogen.

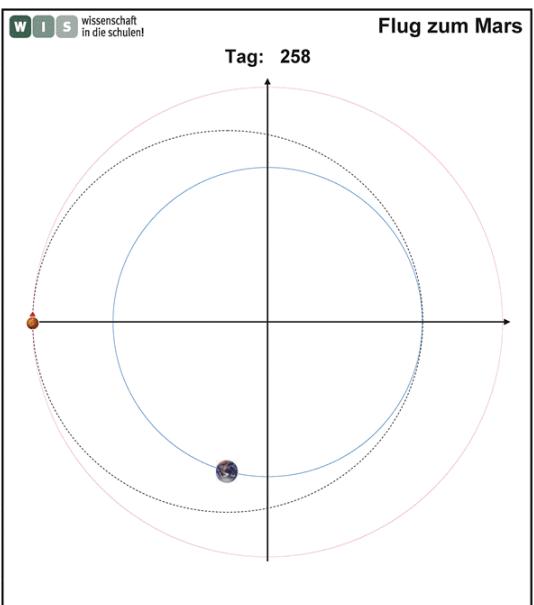
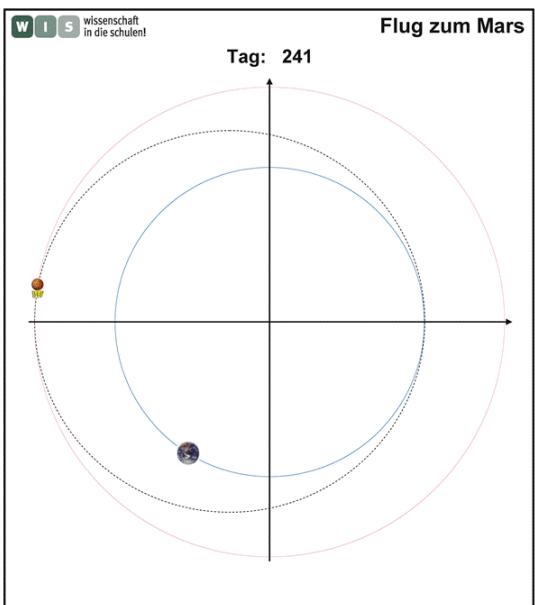
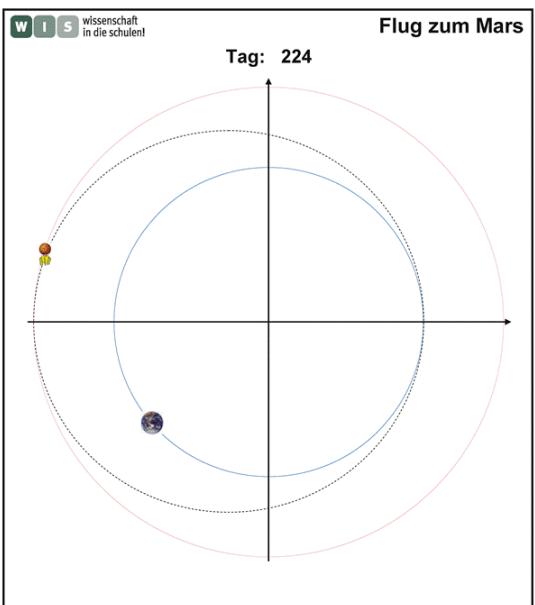
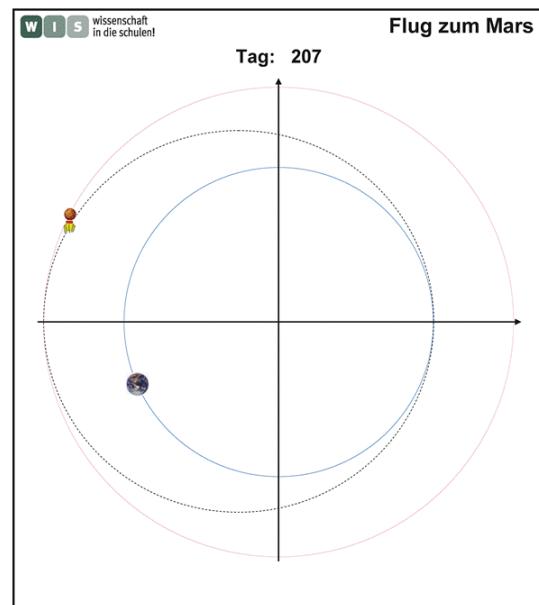
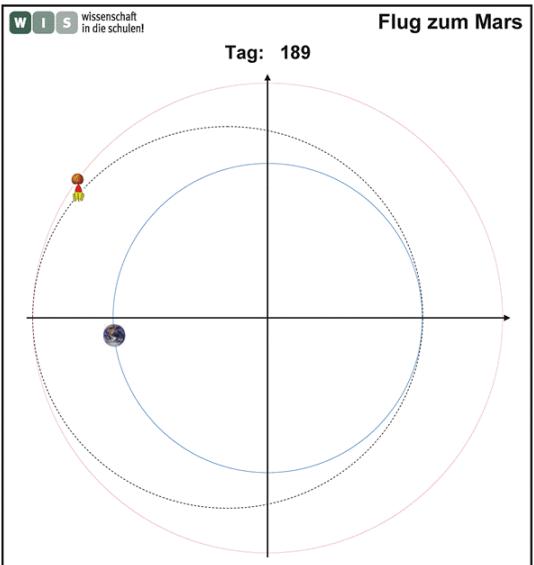
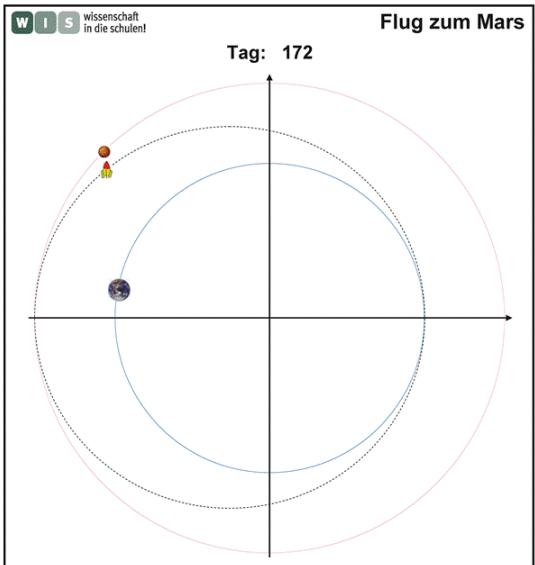
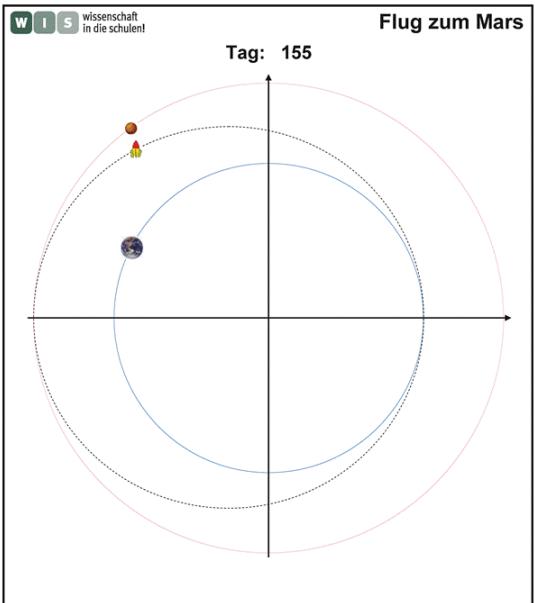
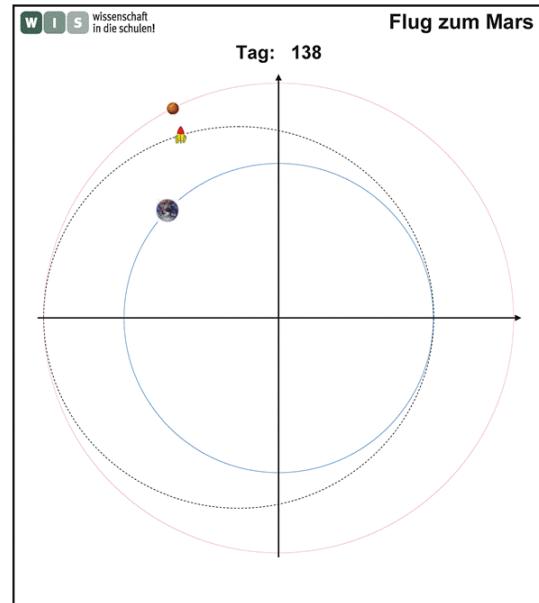
Die nach der ersten Iteration verbesserten Werte der Bahnwinkel der Sektoren werden durch die roten Striche illustriert.



Anlage: Bildvorlagen für ein Fingerkino

[\(→zurück zum Anfang\)](#)





[\(→zurück zum Anfang\)](#)

Zum Zusatzmaterial

Anhängend an das zentrale WIS-Dokument findet man 4 animierte gif-Dateien:

- ,Animation Flug Erde - Mars‘
Bildstandzeit: 100 ms
- ,Animation Flug Erde - Mars langsam‘
Bildstandzeit: 500 ms
- ,Animation Flug Mars - Erde‘
,Animation Flug Erde - Mars‘ in umgekehrte Richtung und vertikal gespiegelt
- ,Animation Flug Mars - Erde langsam‘
,Animation Flug Erde – Mars langsam‘ in umgekehrte Richtung und vertikal gespiegelt

Die letzten beiden Animationen zeigen den Rückflug vom Mars zur Erde in der gleichen Richtung (!) wie den Hinflug – der Umlaufrichtung der Planeten (Tageszählung dann rückwärts, Beschriftungen gespiegelt).

