Little „Armageddon"

In Bezug zum Beitrag „Mit AIDA zum Kleinplaneten Didymos" in der Zeitschrift „Sterne und Weltraum" 5/2013 (Blick in die Forschung, S. 16)

Natalie Fischer

Ist es möglich, die Bahn eines Asteroiden durch künstliche äußere Einwirkungen zu verändern? Dieses Missionsziel der ESA und ihrer Partner erinnert schon ein wenig an den Film „Armageddon" mit Bruce Willis und Ben Affleck aus dem Jahr 1998. Doch während es in dem Film galt, die Erde vor dem Einschlag eines Kometenkerns zu retten, werden hier zwei Raumsonden in sicherer Entfernung von der Erde zu dem Asteroiden Didymos (griechisch „Zwilling") – eigentlich einem Asteroidenpaar – ausgesendet. Die Sonde DART soll in den kleineren der beiden Asteroiden einschlagen und die Sonde AIM die Veränderungen in dessen Bahn beobachten. Mit Hilfe des Impulserhaltungssatzes und einfacher Gleichungen aus dem Bereich der Bewegungen in einem Zentralkraftfeld werden wir diese Veränderungen untersuchen.

Übersicht der Bezüge im WIS-Beitrag		
Astronomie	Planeten	3. Keplersches Gesetz, Asteroiden
Physik	Mechanik	Impulserhaltungssatz, unelastischer Stoß, kinetische Energie, potentielle Energie, 2. kosmische Geschwindigkeit, Zentralkraftfeld, Schwerpunkt
Fächer-verknüpfung	Astro-Mathematik	Kegelschnitte
Lehre allgemein	Fachwissens- und Erkenntnisgewinnungs-kompetenz	Lesen von Fachtexten, Suchen von Informationen, Zusammenfügen von Teilproblemen

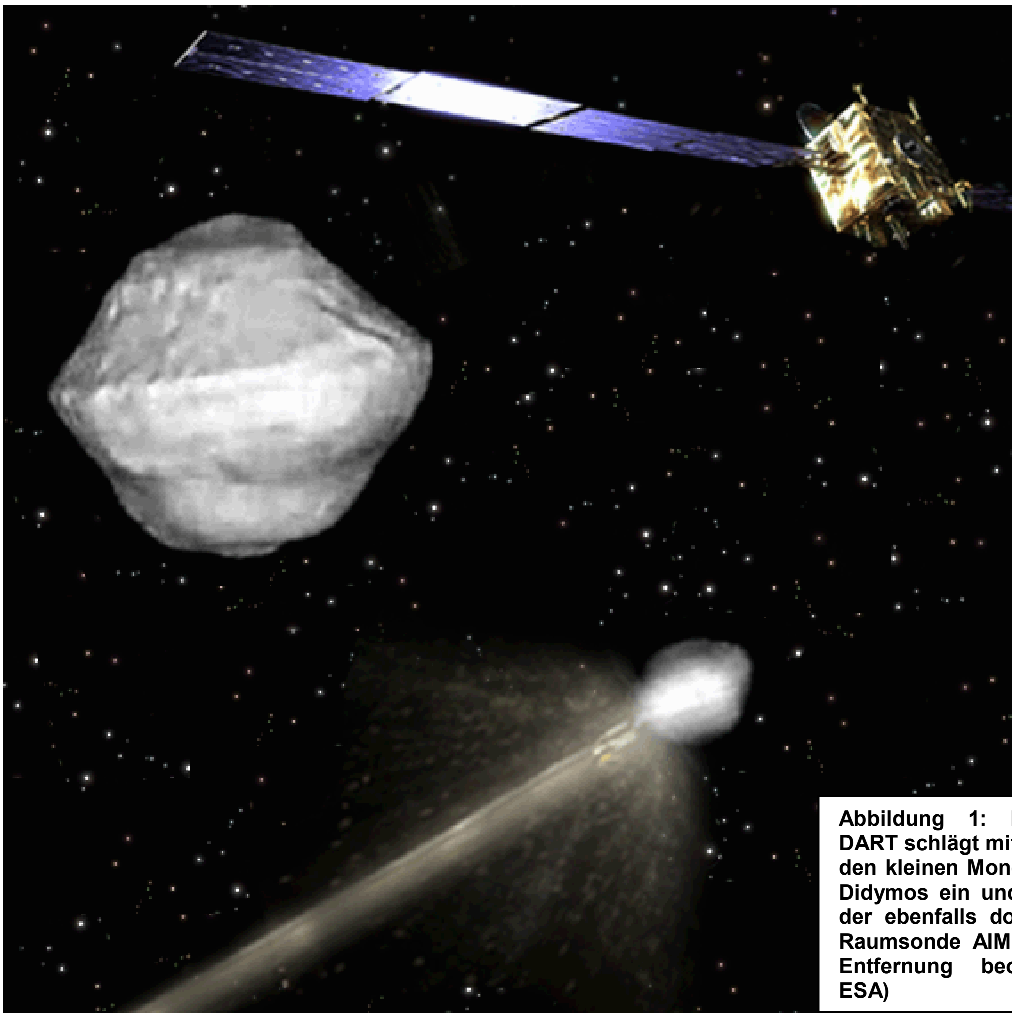

Abbildung 1: Die Raumsonde DART schlägt mit ca. 6300 m/s auf den kleinen Mond des Asteroiden Didymos ein und wird dabei von der ebenfalls dorthin entsandten Raumsonde AIM in etwa 100 km Entfernung beobachtet. (Foto: ESA)

Die Motivation der Mission

„Ist es möglich, die Bahn eines Asteroiden durch künstliche äußere Einwirkungen zu verändern?“ Dies ist durchaus keine akademische Frage. Erst vor ein paar Wochen wurde es uns wieder bewusst gemacht, dass wir alle Bewohner des Planeten Erde und damit Teil des Weltalls sind, mit allem was dazugehört. Während tausende Amateur- und Profiastronomen am 15.02.2012 auf den Asteroiden 2012 DA 14 warteten, der in den Abendstunden in einem sicheren aber doch recht nahen Abstand unseren Planeten passieren sollte, erhielt die Erde Besuch von einem unangekündigten Gast. Um 4:20 Uhr MEZ trat ein natürliches, 17 Meter großes und etwa 7.000 bis 10.000 Tonnen schweres Objekt mit einer geschätzten Geschwindigkeit von etwa 64.000 km/h in die Erdatmosphäre ein und verglühte am Himmel über Tscheljabinsk in Russland. Das Objekt explodierte in einer Höhe von etwa 15–20 Kilometern über der Erdoberfläche und setzte eine Energie frei, die ungefähr der 30-fachen bei der Hiroshima-Bombe freigesetzten Energie entspricht. 1500 Menschen wurden verletzt.
Solche Ereignisse sind in Abständen von einigen Jahrzehnten bis zu 100 Jahren zu erwarten und damit gar nicht so selten. Daher stellt sich schon die Frage, wie und ob wir solche Katastrophen verhindern können, vorausgesetzt, wir haben etwas mehr Vorlaufzeit…
Die folgende Mission AIDA ist daher nicht die erste dieser Art. Bereits 2005 schlug eine Raumsonde in den etwa 7,6 km großen Kometen „Tempel 1“ ein, was diesen aber nicht im Geringsten beeindruckte. Mal sehen, was die Mission AIDA im Jahr 2022 ergibt!

Die Daten

Aufgabe 1

Entnehme dem SuW-Beitrag alle wichtigen Informationen bzw. Zahlenwerte zu der Raumsonde DART und den zwei Asteroiden, und wandle alle Daten in SI-Einheiten um! Fertige, wenn möglich, entsprechende Skizzen an. Zur Vertiefung lese dazu auch den Beitrag von Cheng, A.F. et al „DART: Double Asteroid Redirection Test“, EPSC, sowie die Projektseiten der ESA zu diesem Thema. Eine Google-Suche liefert ebenfalls interessante deutschsprachige Informationen.

Lösung 1

Daten zu der Raumsonde DART:

Masse	$m_{DART} = 235\ \text{kg}$
Geschwindigkeit	$v_{DART} = 6{,}3\ \text{km/s} = 6300\ \text{m/s}$

Daten zum Asteroiden Didymos:

Durchmesser	$D_D = 800\ \text{m}$
Umlaufperiode	$T_D = 2{,}1\ \text{a}$

Daten zum „Mond“ von Didymos:

Durchmesser	$D_M = 500\ \text{m}$
Abstand Didymos – Mond	$r_{DM} = 1100\ \text{m}$
Periode Mond	$T_M = 11{,}9\ \text{h} = 42840\ \text{s}$

Im **Internet** finden sich u. a. noch folgende Informationen:

Rotationsgeschwindigkeit Didymos	$T_{Rotation\ Didymos} = 2{,}259\text{h} = 8132\text{s}$
Dichte Didymos	$\rho_{Didymos} = 1{,}7 \pm 0{,}4\ \text{g/cm} = 1{,}7 \pm 0{,}4 \cdot 10^3\ \text{kg/m}^3$

Die ersten Schritte

Aufgabe 2
Welche Größen ließen sich aus dem Daten errechnen? Welche wären interessant?

Lösung 2
Geschwindigkeit des Mondes v_M, Masse der Asteroiden m_D und m_M, Dichte ρ, Geschwindigkeit des Mondes nach dem Zusammenstoß v_{M2}, Bahnform nach dem Zusammenstoß, Energie des Systems,…

Die Geschwindigkeit des Mondes um Didymos

Aufgabe 3
Mit welcher Geschwindigkeit v_M bewegt sich der Mond um Didymos herum? Vergleiche den Wert mit der Umlaufgeschwindigkeit unseres Erdmondes um die Erde
(siderische Periode $T_{Erdmond} = 27{,}322\ \mathrm{d}$, mittlerer Bahnabstand $r_{Erde-Erdmond} = 384\ 399\ \mathrm{km}$).

Lösung 3
Die Geschwindigkeit errechnet sich aus der Periodendauer. Allgemein gilt für eine Kreisbewegung:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{2\pi r}{T}$$

$$v_M = \frac{2\pi r_{Didymos-Mond}}{T_{Mond}}$$

$$v_M = \frac{2\pi \cdot 1100\ \mathrm{m}}{42840\ \mathrm{s}}$$

$$v_M = 0{,}16133\ \mathrm{m/s} = 0{,}58\ \mathrm{km/h}$$

Für den Erdmond ergibt sich analog $v_{Erdmond} = 1023\ \mathrm{m/s} = 3682{,}3\ \mathrm{km/h}$.

Wie sich auf Grund der sehr unterschiedlichen Umlaufperioden und Abstände schon vermuten ließ, ist die Geschwindigkeit unseres Erdmondes um ein Vielfaches höher als die des Mondes um Didymos!

Die Massen der beiden Asteroiden und ihr gemeinsamer Schwerpunkt

Bei der Formulierung der Keplerschen Gesetze ging Kepler davon aus, dass sich die Planeten um eine ruhende Sonne bewegen. Seit Newton wissen wir aber, dass Gravitation eine wechselseitige Kraft ist: Auch die Planeten ziehen die Sonne ziehen an. Sie bewegen sich auf Ellipsenbahnen um die Sonne, doch wenn wir genau schauen, dann bewegen sich die Körper auf Umlaufbahnen um ihren gemeinsamen Schwerpunkt. Die fiktive Zentralmasse entspricht dann der Summe beider Einzelmassen.

Im Fall unseres Sonnensystems liegt der Schwerpunkt des Sonnensystems übrigens weit innerhalb der Sonne, was dazu führt, dass die Sonne unter dem Einfluss der sie umlaufenden Planeten lediglich ein klein wenig „ausweichen“ muss. (Auf diese Weise ist es übrigens auch möglich, die Existenz von Planeten nachzuweisen, die fremde Sterne umlaufen.)

Betrachten wir, wie im Fall des Asteroiden Didymos und seines Mondes, nur zwei Massen, so lässt sich die Gesamtmasse des Systems einfach aus der Messung der Umlaufdauer und des Abstandes der beiden Himmelskörper bestimmen.

Aufgabe 4

Wie groß ist die Gesamtmasse des Systems?

Lösung 4

Eine Skizze hilft bei der Berechnung:

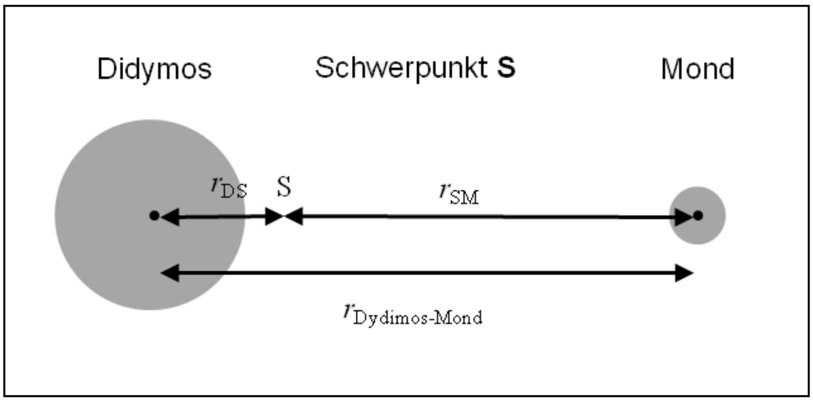

Abbildung 2: Der kleine Mond und Dydimos umkreisen ihren gemeinsamen Schwerpunkt S im Abstand von r_{DS} bzw. r_{SM}. (Abbildung: N. Fischer)

Für den Schwerpunkt S des Systems gilt

$m_D \cdot r_{DS} = m_M \cdot r_{SM}$ mit $r_{DM} = r_{DS} + r_{SM}$.

Für die Gravitationskraft zwischen Didymos und seinem Mond gilt das Newtonsche Gravitationsgesetz:

$F_G = \mathrm{G} \cdot \frac{m_D m_M}{r_{DM}^2}$ mit der Gravitationskonstante $\mathrm{G} = 6{,}67384 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^2}$.

Die Gravitationskraft ist der Zentrifugalkraft entgegen gerichtet. Sie errechnet sich zu

$F_Z = m_M \cdot \frac{v_M^2}{r_{SM}^2}$ mit einer Bahngeschwindigkeit von $v_M = \frac{2\pi r_{SM}}{T_M}$.

Damit ergibt sich durch Gleichsetzen der Zentripetalkraft mit der Gravitationskraft

$$\frac{T_M^2}{r_{DM}^3} = \frac{4\pi^2}{(m_D + m_M) \cdot \mathrm{G}}$$

das dritte Keplersche Gesetz.

Aufgelöst nach $m_D + m_M$ ergibt sich für die Gesamtmasse des Systems:

$$m_D + m_M = \frac{4\pi^2 \cdot r_{DM}^3}{T_M^2 \cdot G} = \frac{4\pi^2 \cdot (1100\mathrm{m})^3}{(42840\ \mathrm{s})^2 \cdot \mathrm{G}} = 429{,}25 \cdot 10^9 \mathrm{kg}.$$

Aufgabe 5

Wie schwer sind die Teilmassen, wenn wir davon ausgehen, dass beide Himmelskörper kugelförmig sind und die gleiche Dichte haben (Durchmesser $\mathrm{D}_D = 800\ \mathrm{m}$ bzw. $\mathrm{D}_M = 150\ \mathrm{m}$)?

Lösung 5

Das Volumen einer Kugel ist proportional zu seinem Durchmesser und bei konstanter Dichte proportional zur Masse. Daraus folgt:

$$\frac{V_D}{V_M} = \frac{D_D^3}{D_M^3} = 151{,}7 = \frac{m_D}{m_M}$$

$$m_D = 151{,}7 \cdot m_M = 151{,}7 \cdot (m_D + m_M) - 151{,}7 \cdot m_D)$$

$$m_D = \frac{151{,}7 \cdot (m_D + m_M)}{151{,}1 + 1} = 426{,}44 \cdot 10^9 \mathrm{kg}$$

Daraus ergeben sich die folgenden Massen:

$m_D = 426{,}44 \cdot 10^9 \mathrm{kg}$
$m_M = 2{,}81 \cdot 10^9 \mathrm{kg}$

und eine Dichte von
$\rho = \frac{m}{V} = 1{,}59\ \mathrm{g/cm^3}$.

Der Literaturwert liegt bei
$\rho = 1{,}7 \pm 0{,}4 \mathrm{g/cm^3}$.

Die Abweichung ist darauf zurückzuführen, dass sowohl der Asteroid als auch sein Mond in Wirklichkeit nicht kugelförmig sind (siehe Abbildung 3)!

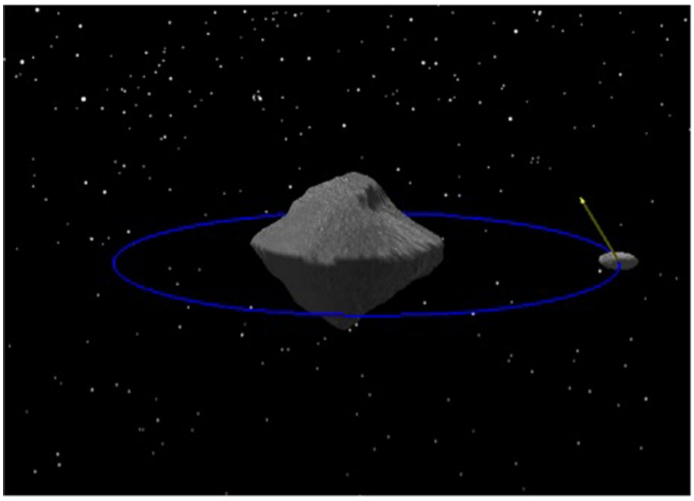

Abbildung 3: Didymos und der kleine Mond. (Abbildung: ESA)

Aufgabe 6
Wo liegt der Schwerpunkt des Systems?

Lösung 6
Für den Schwerpunkt gilt:

$$m_D \cdot r_{DS} = m_M \cdot r_{SM}$$

$$\frac{m_D}{m_M} = 151{,}7 = \frac{r_{SM}}{r_{DS}} = \frac{r_{SM}}{r_{DM} - r_{SM}}$$

$$r_{SM} = \frac{151{,}7 \cdot r_{DM}}{151{,}7 + 1} = \frac{151{,}7 \cdot 1100\text{m}}{151{,}7 + 1} = 1092{,}8\text{m}$$

$$r_{DS} = r_{DM} - r_{SM} = 1100\text{m} - 1092{,}8\text{m} = 7{,}2\text{m}$$

Das heißt, der Schwerpunkt des Systems liegt dicht am Zentrum des Asteroiden Didymos, wie aufgrund des Massenverhältnisses von 1:151,7 zu erwarten war. Daher werden wir bei den nächsten Berechnungen Didymos als Zentralmasse behandeln.

DART schlägt auf den Mond auf

Aufgabe 7
Bestimme die Geschwindigkeit des Mondes nach dem Zusammenstoß mit der Sonde DART. Sie soll den Mond von hinten, also in Flugrichtung zentral treffen. Laut dem SuW-Artikel wird die gesamte Energie auf den Mond übertragen. Wir nehmen daher bei unserer Berechnung an, dass es sich um einen unelastischen Stoß handelt.

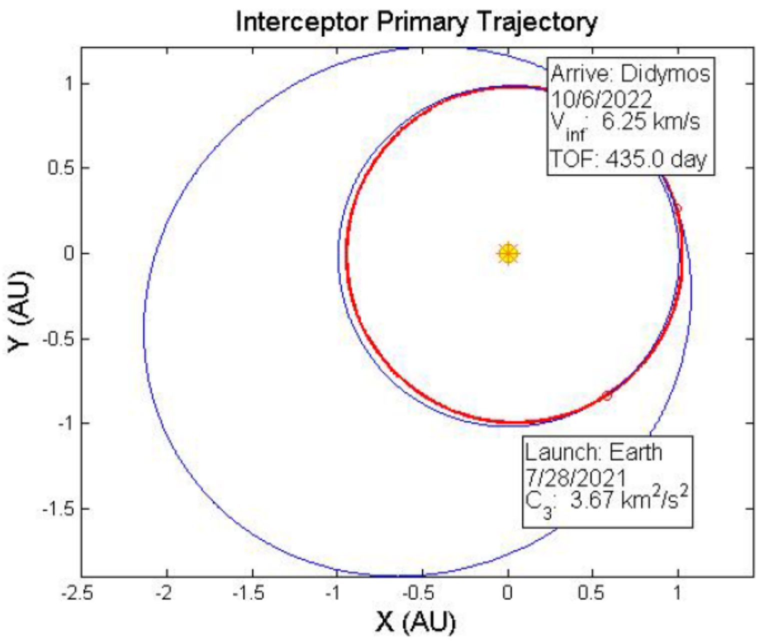

Abbildung 4: Die Flugbahn der Raumsonde DART bevor sie auf den kleinen Mond von Didymos aufschlägt. Die Beobachtungsbedingungen von der Erde aus sind hervorragend! (Abbildung: EPSC)

Lösung 7
Die Geschwindigkeit des Mondes nach dem Zusammenstoß berechnet sich aus dem Impulserhaltungssatz:
$p_1 = p_2$

Der Impuls p_1 vor dem Zusammenstoß setzt sich zusammen aus
$p_1 = p_M + p_{DART} = m_M v_M + m_{DART} v_{DART}$.

Daraus ergibt sich
$p_1 = 2{,}81 \cdot 10^9 \text{kg} \cdot 0{,}16133 \text{ m/s} + 235 \text{ kg} \cdot 6300 \text{ m/s}$
$p_1 = 4{,}5352 \cdot 10^8 \text{ kg m/s} + 1{,}4805 \cdot 10^6 \text{ kg m/s}$
$p_1 = 4{,}5500 \cdot 10^8 \text{kg m/s}$

Bei dem Zusammenstoß handelt es sich um einen unelastischen Stoß. Für den Impuls nach dem Zusammenstoß gilt daher
$p_2 = p_{M+DART} = (m_M + m_{DART}) v_{M2}$
$p_2 = (2{,}81 \cdot 10^9 \text{kg} + 235 \text{ kg}) \cdot v_{M2}$
$p_2 = 2{,}8111 \cdot 10^9 \text{kg} \cdot v_{M2}$

Damit ergibt sich für die Geschwindigkeit des Mondes
$$v_{M2} = \frac{4{,}5500 \cdot 10^8 \text{kg m/s}}{2{,}8111 \cdot 10^9 \text{kg}} = 0{,}16186 \text{ m/s}$$

Im Vergleich zu seiner ursprünglichen Geschwindigkeit hat der kleine Mond an Geschwindigkeit gewonnen:
$\Delta v = v_{M2} - v_M = 0{,}00053 \text{ m/s}$
Das entspricht einer Änderung um 0,33%.

Kreisbahn, Ellipse oder doch eine Parabel?

Nach dem Zusammenstoß hat der kleine Mond eine größere Geschwindigkeit als vorher. Es stellt sich nun die Frage, wie seine Bahnform nach dem Stoß aussieht.

Wovon hängt dies ab?
Allgemein gilt, dass die Bahn einer im Gravitationsfeld einer Zentralmasse frei beweglichen Masse stets die Gestalt eines Kegelschnittes hat. Das Zentralgestirn befindet sich in einem der Brennpunkte des Kegelschnitts. Die Bahnform hängt davon ab, ob die Geschwindigkeit in jedem beliebigen Punkt ihrer Bahn kleiner (Ellipse), gleich (Parabel) oder größer (Hyperbel) als die Fluchtgeschwindigkeit in diesem Punkt ist. (Die Kreisbahn ist ein Spezialfall der Ellipse, hier muss die Geschwindigkeit dem $1/\sqrt{2}$-fachen der Fluchtgeschwindigkeit entsprechen, s.u.)

Als **Fluchtgeschwindigkeit** (oder auch 2. kosmische Geschwindigkeit) bezeichnet man die Geschwindigkeit, die ein Massepunkt haben muss, um dem Schwerefeld seiner Zentralmasse zu entkommen. Sie lässt sich ganz einfach bestimmen:

Bei einer frei beweglichen Masse *m* im Zentralkraftfeld einer Masse *M* findet ein ständiger verlustfreier Austausch zwischen kinetischer und potentieller Energie statt. Es gilt:

$$\frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = GMm\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

Die Masse *m* soll nun im Unendlichen bei $r_2 = \infty$ die Geschwindigkeit $v_2 = 0$ haben. Daher vereinfacht sich sie Gleichung zu

$$v_1^2 = 2GM\frac{1}{r_1}$$

Damit lässt sich für jeden Abstand *r* vom Massezentrum die Fluchtgeschwindigkeit angeben, die ein Körper zum Verlassen des Schwerefeldes benötigt:

$$v_{Fl} = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

Vergleichen wir dies mit der Gleichung, die die Geschwindigkeit eines Massenpunktes auf einer stabilen Kreisbahn um eine Zentralmasse *M* angibt

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}},$$

so stellen wir fest:

$$v_{Fl} = \sqrt{2}v.$$

Beispiel:

Ein Satellit befindet fliegt mit einer Geschwindigkeit von $v_1 = 5400\ \mathrm{m/s}$ in einer Entfernung von $r_1 = 20385\ \mathrm{km}$ von der Erde ($M = 5{,}976 \cdot 10^{24}\mathrm{kg}$). Welche Bahn beschreibt er?

$(G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg \cdot s}^2})$

Seine Fluchtgeschwindigkeit in der Höhe r_1 beträgt

$$v_{Fl} = \sqrt{2}v = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

$$v_{Fl} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg \cdot s}^2} \cdot 5{,}976 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}}{20385\ \mathrm{km}}}$$

$$v_{Fl} = 6253{,}56\ \mathrm{m/s}$$

$$\frac{v_{Fl}}{v} = \frac{6253{,}56\ \mathrm{m/s}}{5400\ \mathrm{m/s}} = 1{,}158 \neq \sqrt{2}$$

Da seine Geschwindigkeit v_1 kleiner als die Fluchtgeschwindigkeit v_{Fl} ist und ihr Quotient $\neq \sqrt{2}$, handelt es sich bei der Bahn um eine Ellipse.

Aufgabe 8
Welche Bahn beschreibt unser Mond nach dem Aufprall? Führe die oben gemachten Überlegungen nun für unseren Mond durch!
$r_{DM} = 1100$ m, $v_{M2} = 0{,}16186$ m/s, $m_D = 426{,}44 \cdot 10^9$kg

Lösung 8

$$v_{Fl} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg \cdot s}^2} \cdot 426{,}44 \cdot 10^9 \mathrm{kg}}{1100\ \mathrm{m}}}$$

$$v_{Fl} = 0{,}2274\ \mathrm{m/s}$$

$$\frac{v_{Fl}}{v} = \frac{0{,}2274\ \mathrm{m/s}}{0{,}16186\ \mathrm{m/s}} = 1{,}404 \neq \sqrt{2}$$

Da die Geschwindigkeit des Mondes kleiner als die Fluchtgeschwindigkeit ist, bewegt sich der Mond auf einer Ellipse, die fast aber fast kreisförmig ist.

Aufgabe 9
Wie sieht die Energiebilanz des Aufpralls aus?

Lösung 9
Die Energiebilanz gestaltet sich nicht ganz so einfach, da wir nicht wissen, wie viel Energie tatsächlich bei dem Zusammenstoß übertragen wird. Da es sich um einen unelastischen Stoß handelt, lässt sich der Energiesatz auch nur bedingt anwenden:
$$E_2 = E_1 - U$$

Hier wird ein Teil der kinetischen Energie in innere Energie *U* umgewandelt, z. B. durch Verformung einer oder beider Körper. Die innere Energie *U* lässt sich berechnen durch
$$U = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_1}(v_1 - v_2)^2$$

Für unseren Fall ergibt sich daraus eine Energie von $U = 4{,}6633 \cdot 10^9$J, die dem System verloren geht.
Die Energiebilanz im Einzelnen gilt:
Für die potentielle Energie in einem Zentralkraftfeld
$$E_{pot} = -\mathrm{G}\frac{Mm}{r}$$
Und für die kinetischen Energie
$$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$$

Die Gesamtenergie berechnet sich dann zu
$$E = E_{pot} + E_{kin} = -\mathrm{G}\frac{Mm}{r} + \frac{1}{2}mv^2$$
mit $m_D = 426{,}44 \cdot 10^9$kg, $m_M = 2{,}81 \cdot 10^9$kg, $v_M = 0{,}16133$ m/s, $r_{DM} = 1100$ m

$E_1 = E_{pot} + E_{kin}$
$E_1 = -G\frac{m_D m_M}{r_{DM}} + \frac{1}{2} m_M v_M^2$
$E_1 = -6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^2} \cdot \frac{426{,}44 \cdot 10^9 \mathrm{kg} \cdot 2{,}81 \cdot 10^9 \mathrm{kg}}{1100 \mathrm{~m}} + \frac{1}{2} 2{,}81 \cdot 10^9 \mathrm{kg} \cdot (0{,}16133 \mathrm{~m/s})^2$
$E_1 = -7{,}266 \cdot 10^7 \mathrm{~J} + -3{,}6568 \cdot 10^7 \mathrm{~J}$
$E_1 = -3{,}6092 \cdot 10^7 \mathrm{~J}$

mit
$E_{pot} = -7{,}266 \cdot 10^7 \mathrm{~J}$
$E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2 = 3{,}6568 \cdot 10^7 \mathrm{~J}$.

Die Sonde DART steuert kinetische Energie bei:

$m_{DART} = 235 \mathrm{~kg}$
$v_{DART1} = 6{,}3 \mathrm{~km/s} = 6300 \mathrm{~m/s}$

$E_{DART} = \frac{1}{2} \cdot m_{DART} \cdot v_{DART1}^2 = \frac{1}{2} \cdot 235 \mathrm{~kg} \cdot (6300 \mathrm{~m/s})^2 = 4{,}6636 \cdot 10^9 \mathrm{J}$
Das entspricht in etwa dem Energiegehalt eines Blitzes.

Zusammen ergibt dies
$E_{1\,gesamt} = 4{,}6275 \cdot 10^9 \mathrm{J}$

Nach dem Zusammenstoß verfügt das System über die folgende Gesamtenergie:

$E_{2\,gesamt} = E_{1\,gesamt} - U = -4{,}6275 \cdot 10^9 \mathrm{~J} - 4{,}6633 \cdot 10^9 \mathrm{J} = -3{,}58 \cdot 10^7 \mathrm{J}$

mit $U = 4{,}6633 \cdot 10^9 \mathrm{J}$.

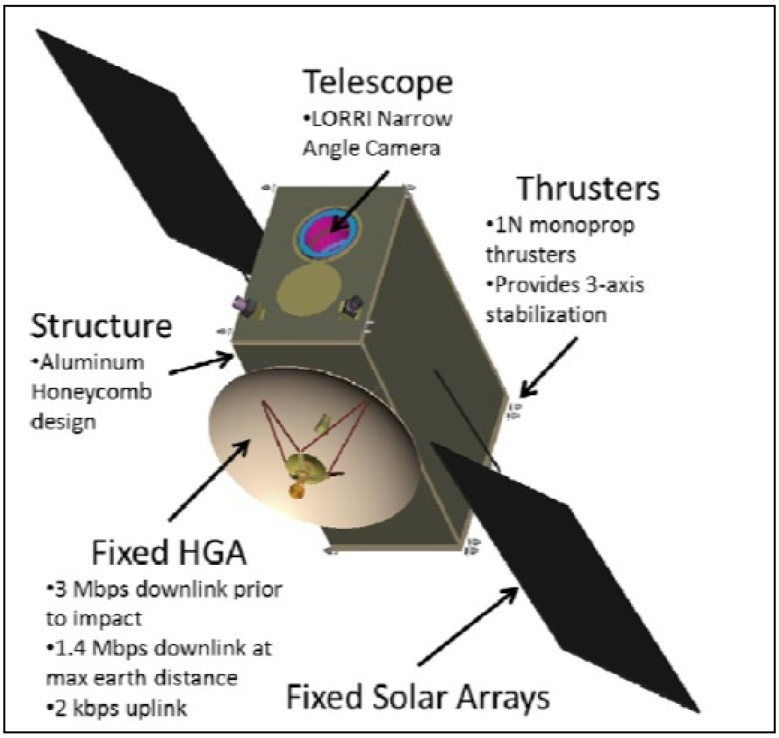

Abbildung 5: DART (Abbildung: EPSC)

Änderung der Periodendauer

Aufgabe 10
Wir wollen nun abschätzen, in wie weit sich die Periode der Umlaufbahn ändert.

Lösung 10
Nach dem 3. Keplerschen Gesetz berechnet sich die Periode *T* zu

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(M+m)}$$

a ist die große Halbachse einer Ellipse ($a = (r_A + r_A)/2$) und kann aus dem kleinsten Abstand zwischen Asteroid und Mond r_p und der Geschwindigkeit v_p in diesem Punkt bestimmt werden.
Es gilt (siehe Literatur):

$$v_P^2 = \frac{2GM}{r_A + r_P}\frac{r_A}{r_P}$$

Aufgelöst nach r_A ergibt sich

$$r_A = \frac{v_P^2 r_P^2}{2GM - v_P^2 r_p}$$

Für unser System ergab sich nach dem Zusammenstoß

$$v_P = v_{M2} = 0{,}16186 \text{ m/s}$$
$$r_P = r_{DM} = 1100 \text{ m}$$
$$M = m_D = 426{,}44 \cdot 10^9 \text{kg}$$
$$r_A = \frac{v_P^2 r_P^2}{2GM - v_P^2 r_p} = 1129{,}39\text{m}$$

Eingesetzt in

$$a = (r_A + r_A)\frac{1}{2} = 1114{,}7\text{m}$$

ergibt sich für

$$T_{M2} = \sqrt{a^3 \frac{4\pi^2}{G(m_D + m_D)}} = 43701 s$$
$$\Delta T = T_{M2} - T_M = 861\text{s}$$

Dies entspricht einer Änderung von 2%.

Die ESA hat eine Abweichung von 0,5 - 1% angegeben. Unsere Abweichungen sind darauf zurückzuführen, dass wir zur Vereinfachung der Rechnungen von einer Zentralmasse m_D ausgegangen sind.

Links und Literatur

- Himmelsmechanik und Raumfahrt, Ernst Klett Verlag, 2002
- Grehn et al., Metzler Physik, Metzler 1982
- http://www.esa.int/Our_Activities/Technology/NEO/Asteroid_Impact_Deflection_Assessment_AIDA_study
- http://www.gps.caltech.edu/~sue/TJA_LindhurstLabWebsite/ListPublications/Papers_pdf/Seismo_1621.pdf
- http://www.sueddeutsche.de/wissen/raumforschung-wissenschaftler-wollen-asteroiden-aus-der-flugbahn-schiessen-1.1609339
- http://meetingorganizer.copernicus.org/EPSC2012/EPSC2012-935-1.pdf
- http://en.wikipedia.org/wiki/65803_Didymos