Landung auf einem Kometenkern – etwas Schulphysik

Anlässlich der Landung der Sonde ‚Philae' auf dem Kometenkern von 67P/Tschurjumow-Gerassimenko am 12. 11. 2014 und Bezug nehmend auf den Beitrag »Rosetta/Philae: Landung auf einem Kometen« in SuW 11/2014, S. 28 – 29.

Olaf Fischer

Landungen auf anderen Himmelskörpern gehören zu den spektakulärsten Ereignissen der Raumfahrt. Diesmal ist das Zielobjekt ein Kometenkern, unveränderte Materie aus der Anfangszeit unseres Sonnensystems. Mit großer Spannung fiebern wir der Landung entgegen.
Die Landesonde ‚Philae' wird am 12. 11. 2014 vom Orbiter ‚Rosetta' in Richtung zum Kometenkern abgestoßen werden und antriebslos auf einer ballistischen Bahn den Kern treffen.
Ziel des folgenden WIS-Beitrags ist es, das Landeszenario mit Schulkenntnissen nachvollziehbar (und zum Teil auch nachrechenbar) zu machen. Dazu werden zunächst einige stark vereinfachende Betrachtungen angestellt, die auch die Nutzung einfacher Formalismen ermöglichen (Kl. 9/10, Aufgaben 1-4). Mit den Aufgaben 5 und 6 kann sich der WIS-Nutzer dem realen Geschehen weiter nähern, braucht dafür aber Oberstufenkenntnisse.

Übersicht der Bezüge im WIS-Beitrag		
Physik	**Mechanik**	**Kreisbahngeschwindigkeit, freier Fall (für a=const und a~1/r²), potentielle Energie a~1/r², kinetische Energie, Geschwindigkeit nach freiem Fall im Gravitationsfeld, ballistische Kurve, zusammengesetzte Bewegung (waagerechter Wurf), durch Fliehkraft reduzierte potentielle Energie**
Fächerver-knüpfung	**Astro – Mathematik, Astro - Informatik**	**Integration: 1/x², 1/x, numerische Integration, Programmieraufgabe**
Lehre allgemein	**Kompetenzen (Wissen und Erkenntnisgewin-nung), Unterrichtsmittel**	**Anwendung physikalischer Prinzipien und Gesetze, Freihandexperiment zur zusammengesetzten Bewegung (waagerechter Wurf)**

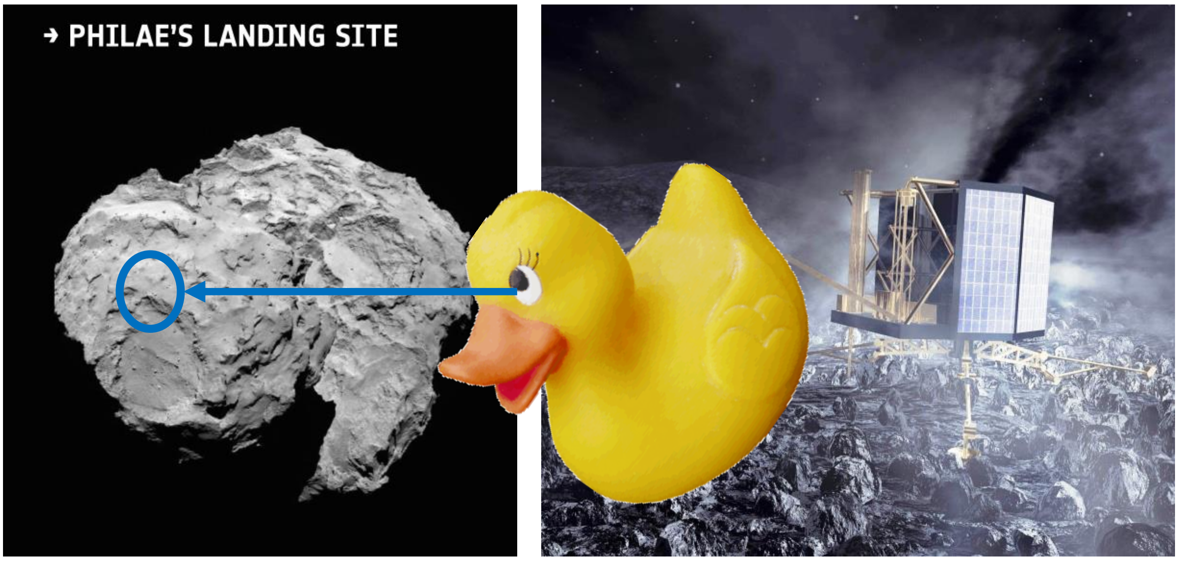
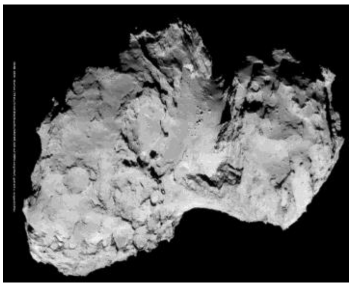


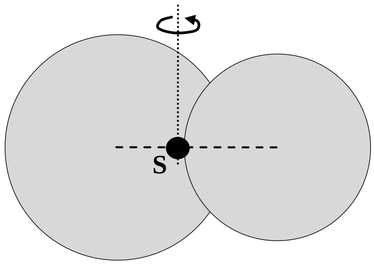
Abbildung 1: Links: ‚Philae' soll möglichst an der Landestelle J (der besten unter 5 möglichen Landeplätzen) auf dem Kern niedergehen, ©: ESA/http://www.esa.int/spaceinimages/Images/2014/09/Philae_s_primary_landing_site_in_context. Wegen der Form seines Kerns wird der Komet 67P/Tschurjumow-Gerassimenko lustigerweise auch „Quitscheentchen-Komet" genannt. Der Landeort liegt dann nahe dem Auge der Ente. Rechts: ‚Philae' auf dem Kometenkern (künstlerische Darstellung, ©: DLR Philae/http://dlr.de/dlr/desktopdefault.aspx/tabid-10204/296_read-8935/year-all/#gallery/12180).

(→zurück zum Anfang)

1. Gegebenheiten

In der offiziellen Verlautbarung der ESA [1] heißt es, dass die Landesonde ‚Philae' am 12. 11. 2014 um 9.35 Uhr MEZ in einem Abstand von 22,5 km vom Zentrum des Kometenkerns abgesetzt wird und nach ca. 7 Stunden auf dem Kern auftrifft. (Dies gilt für den Landeort J, siehe Abb. 1).
An anderer Stelle [2] ist nachzulesen, dass die Abstoßung von ‚Philae' vom Orbiter ‚Rosetta' mit einer Relativgeschwindigkeit von 2,5 km/h erfolgt.
Der Kern des Kometen 67P/ Tschurjumow-Gerassimenko hat in erster Näherung die Form einer Hantel mit ungleichen Teilen. Seine Bemaßung kann Abb. 2 entnommen werden. Er rotiert mit einer Periode von rund 12,4 h um eine Achse, die senkrecht zur Verbindungslinie der beiden „Hantelmassen" steht (siehe Abb. 2). Seine Masse beträgt ca. $m_{\mathrm{Kern}}=10^{13}\,\mathrm{kg}$ [3].





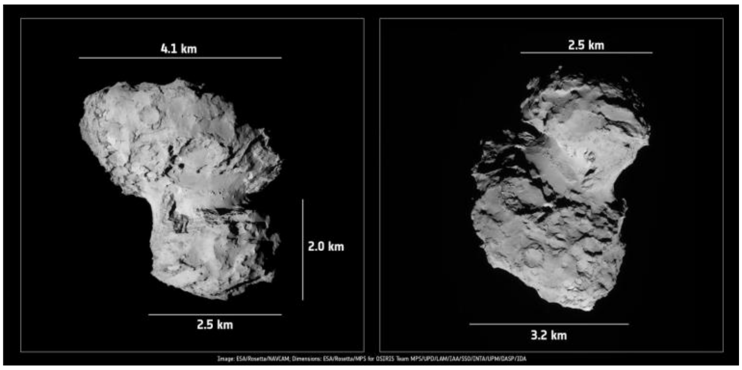
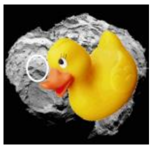


Abbildung 2: Oben links: Kern von 67P/Tschurjumow-Gerassimenko (© ESA/Roset-ta/NAVCAM, http://www.esa.int/spacein-images-/Images/2014/08/Comet_on_19_August_2014_-_NavCam).
Oben rechts: Hantelvorstellung vom Kometenkern. Die durch den Schwerpunkt S der Hantel verlaufende Rotationsachse ist gepunktet angedeutet. Unten: Bemaßung des Kometenkerns.

(→zurück zum Anfang)

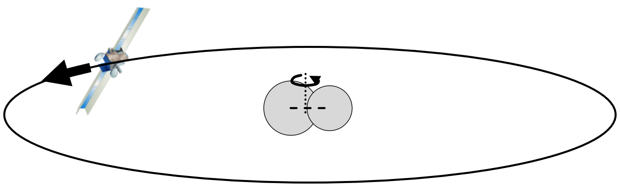
2. Kreisbahngeschwindigkeiten der ISS und der Kometensonde ‚Rosetta'



Die Internationale Raumstation (ISS) umrundet die Erde einmal in rund 93 Minuten. In guter Näherung bewegt sie sich dabei auf einer Kreisbahn in einer Höhe von ca. 400 km.

Aufgabe 2.1
Wie groß ist die Kreisbahngeschwindigkeit der ISS (mittlerer Erddurchmesser: 12.742 km)?
Bestimme nun die Geschwindigkeiten für die Kometensonde ‚Rosetta', wenn diese den Kometenkern auf einer Kreisbahn mit folgenden Radien r umrunden würde: r = 22,5 km (Bahn von ‚Rosetta') und $r = R$ = 2 km (Oberfläche des Kometenkerns). Vergleiche die Ergebnisse mit dem für die ISS.

Die Kreisbahngeschwindigkeit v kann nach Einführung des Gravitationsgesetzes durch die Gleichsetzung von Gravitationskraft F_{G} und Radialkraft F_{R} wie rechts gezeigt berechnet werden.



$$F_{\mathrm{R}} = F_{\mathrm{G}},$$

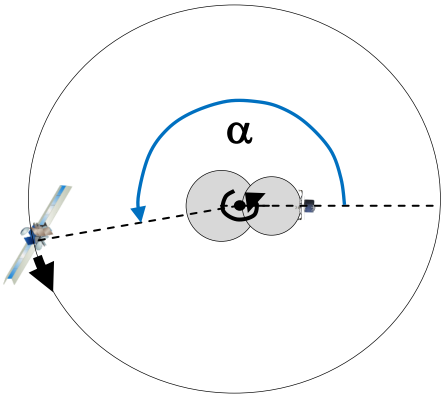
$$\frac{m_{\mathrm{Rosetta}} \cdot v^2}{r} = \gamma \cdot \frac{m_{\mathrm{Kern}} \cdot m_{\mathrm{Rosetta}}}{r^2}.$$

$$v = \sqrt{\gamma \cdot \frac{m_{\mathrm{Kern}}}{r}}.$$

(→zurück zum Anfang)

3. Start des Landemanövers

Damit die Sonde ‚Philae‘ den Landeplatz J trifft, müssen sich der Orbiter ‚Rosetta‘ und der Kometenkern zum Zeitpunkt der Abstoßung von ‚Philae‘ in wohldefinierter Lage zueinander befinden.

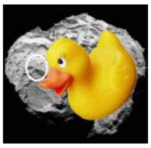


Aufgabe 3.1
Hierbei nehmen wir an, dass die Landung nur im freien Fall erfolgt (also ohne Tangentialbewegung der Landesonde ‚Philae‘). Das Landemanöver muss so gestartet werden, dass der Kern in der Abstiegszeit von ‚Philae‘ (7 h) genau so weit rotiert, dass die Sonde ihn beim gewollten Landeplatz trifft.
Bestimme den Winkel α zwischen dem Bahnort über dem Landeort auf dem Kometenkern und dem Bahnort des Abstoßens der Landesonde.

Aufgabe 3.2
Wie verändert sich der Winkel α, wenn ‚Philae‘ die Tangentialbewegung von Rosetta „mitnimmt“? Beschreibe!

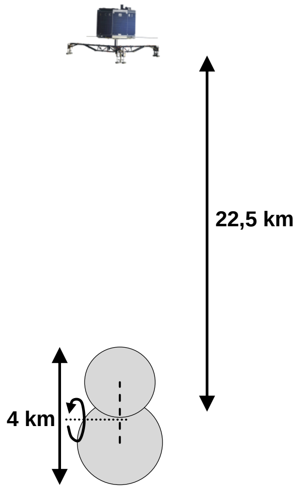
(→zurück zum Anfang)

4. Landung nur im freien Fall mit a = konstant



Zunächst nehmen wir an, die Landesonde ‚Philae‘ gelangt direkt im freien Fall auf die Oberfläche des Kometenkerns, wobei mit einer konstanten (mittleren) Fallbeschleunigung gerechnet wird.
Um die Endgeschwindigkeit und die Fallzeit zumindest abzuschätzen, kann man dann die bekannten Gesetzmäßigkeiten der gleichmäßig beschleunigten Bewegung (Physik in Klasse 9/10) anwenden.
Als Mittelwert für die Fallbeschleunigung a von ‚Philae‘ wird der Einfachheit halber der Wert angenommen, den a im halben Abstand (10,25 km) zur Oberfläche des Kometenkerns hat.
Zur Bestimmung der Fallbeschleunigung a muss das Newtonsche Gravitationsgesetz herangezogen werden:

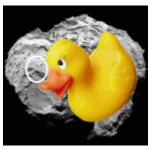
$$a = \frac{F}{m_{\text{Philae}}}, \quad F = \gamma \cdot \frac{m_{\text{Kern}} \cdot m_{\text{Philae}}}{r^2} \Rightarrow \quad a = \gamma \cdot \frac{m_{\text{Kern}}}{r^2}.$$



Aufgabe 4.1
Bestimme nun die Fallzeit und die Auftreffgeschwindigkeit von ‚Philae‘ bei Annahme einer konstanten mittleren Fallbeschleunigung a, welche bei r = 12,25 km (10,25 km + 2 km Radius) vorliegt.

(→zurück zum Anfang)

5. Landung nur im freien Fall mit a ~ 1/r²



Im Folgenden sollen die Endgeschwindigkeit des Falls und die Fallzeit genauer bestimmt werden. Eine Formel für die Fallgeschwindigkeit kann mit den mathematischen Kenntnissen der Oberstufe (Integration) wie folgt hergeleitet werden:
Nach dem Fall im Gravitationsfeld des Kometenkerns (als Zentralkraftfeld betrachtet) erlangt ‚Philae‘ (Masse m_{Philae}) die kinetische Energie $E_{\text{kin}} = m_{\text{Philae}} / 2 \cdot v^2$, wobei v die gesuchte Endgeschwindigkeit

darstellt. Die **kinetische Energie** speist sich aus der **potentiellen Energie** E_{pot}, welche ‚Philae' erlangt, wenn man sie von der Kometenkernoberfläche bis hin zum Startpunkt des freien Falls gegen die Gravitationskraft F_{Grav} anhebt. Diese ermittelt sich, indem man die Kraft über den Weg r **integriert**:

$$E_{\text{pot}} = \int_{r_{\text{Oberfläche}}}^{r_{\text{Start}}} F_{Grav} \cdot dr = \int_{r_{\text{Oberfläche}}}^{r_{\text{Start}}} \gamma \cdot \frac{m_{\text{Kern}} \cdot m_{\text{Philae}}}{r^2} \cdot dr = \left[-\gamma \cdot \frac{m_{\text{Kern}} \cdot m_{\text{Philae}}}{r} \right]_{r_{\text{Oberfläche}}}^{r_{\text{Start}}}$$

$$E_{\text{pot}} = \gamma \cdot m_{\text{Kern}} \cdot m_{\text{Philae}} \cdot \left[\frac{1}{r_{\text{Oberfläche}}} - \frac{1}{r_{\text{Start}}} \right].$$

Nach Gleichsetzung mit der kinetischen Energie lässt sich die **Endgeschwindigkeit** berechnen:

$$E_{\text{kin}} = E_{\text{pot}},$$

$$\frac{m_{\text{Philae}}}{2} \cdot v^2 = \gamma \cdot m_{Kern} \cdot m_{Philae} \cdot \left[\frac{1}{r_{\text{Oberfläche}}} - \frac{1}{r_{\text{Start}}} \right],$$

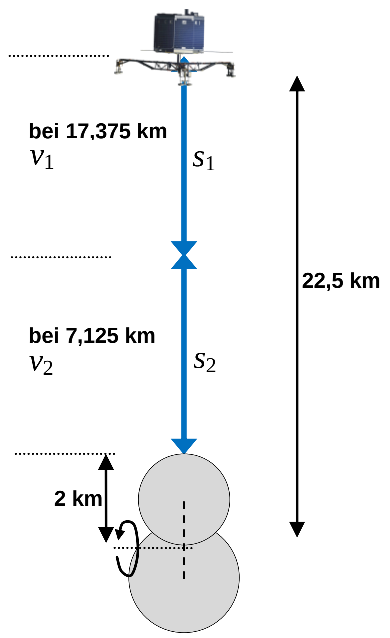
$$v = \sqrt{2 \cdot \gamma \cdot m_{\text{Kern}} \cdot \left(\frac{1}{r_{\text{Oberfläche}}} - \frac{1}{r_{\text{Start}}} \right)}.$$

Aufgabe 5.1
Bestimme die Auftreffgeschwindigkeit von ‚Philae' mit Hilfe der obigen Formel (Gravitationskonstante $\gamma = 6{,}6784 \cdot 10^{-11}\ \text{m}^3 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2}$)!

Ersetzt man die Geschwindigkeit v in der Formel durch den Differentialkoeffizienten dr/dt, so lässt sich auch die Fallzeit t für eine Strecke von r_{Start} bis $r_{\text{Oberfläche}}$ nach Integration wie folgt berechnen:

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \sqrt{2 \cdot \gamma \cdot m_{\text{Kern}} \cdot \left(\frac{1}{r_{\text{Oberfläche}}} - \frac{1}{r_{\text{Start}}} \right)}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \gamma \cdot m_{\text{Kern}}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{r_{\text{Oberfläche}}} - \frac{1}{r_{\text{Start}}} \right)}} \cdot \mathrm{d}r.$$



Die Lösung des Integrals übersteigt jedoch in der Regel die Schulkenntnisse, weswegen hier die Methode der numerischen Integration (der Einstieg in dieses Denken) vorgeschlagen wird.

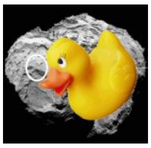
Dazu wird die Fallstrecke einfach in Teilstrecken unterteilt (z. B. für n=2 Teilstrecken: Halbierung in s_1 und s_2 mit jeweils (22,5-2)/2=10,25 km, siehe Bild,), für die mit obiger Formel jeweils eine mittlere Geschwindigkeit v ermittelt wird.
Die gesamte Fallzeit t ergibt sich dann aus der Summe der Fallzeiten t_1 … t_n in den jeweiligen Teilstrecken, die jeweils mit der als konstant angenommenen mittleren Geschwindigkeit durchlaufen werden.

Aufgabe 5.2
Bestimme die Fallzeit von ‚Philae' erst mit Hilfe von n = 2, dann von n = 4 und schließlich von n = 8 Teilstrecken.
Vergleiche die Ergebnisse und triff eine Aussage über ihre Genauigkeit.

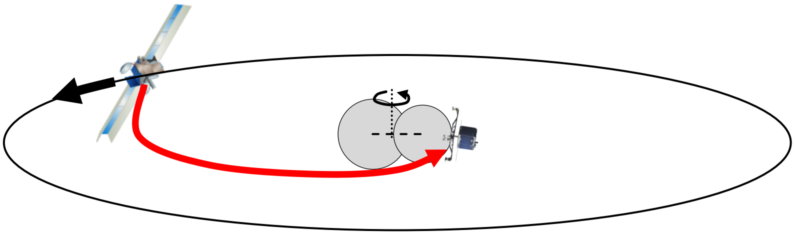
Zusatz: Programmieraufgabe
Die Mühe der Berechnungen kann dazu motivieren, diese dem Computer zu überlassen (numerische Integration). Dazu benötigt dieser jedoch klare Anweisungen, d. h. ein Programm.
Erstelle ein Programm zur Bestimmung der Fallzeit im Gravitationsfeld!

(→zurück zum Anfang)

6. Landung mit ballistischer Kurve
(freier Fall mit a ~ 1/r² und gleichzeitiger Tangentialbewegung)



Bisher wurde die Abstoßung von ‚Philae' so betrachtet, dass diese entgegen der Bahnbewegung erfolgt und die Bahngeschwindigkeit gerade kompensiert, so dass der Lander nur im freien Fall auf die Kometenkernoberfläche gelangen kann. Dies führt aber zu sehr großen Abstiegszeiten. Deshalb ist eine Abstoßung senkrecht zur Bahnbewegung (eine Anfangsgeschwindigkeit zum Kern hin: 2,5 km/h) nötig, um den verlautbarten Wert für die Abstiegszeit von ca. 7 Stunden zu erzielen.



Die Landesonde bewegt sich dabei entlang einer ballistischen Kurve, bei der die Sonde sowohl fällt (mit Anfangsgeschwindigkeit) als Tangentialbewegung ausführt. Beide Bewegungen finden gleichzeitig und unabhängig voneinander statt, was in einem **Freihandexperiment** (siehe Anhang) gezeigt werden kann.

Im Folgenden soll der schon zuvor verwendete Ausdruck zur Ermittlung der Fallgeschwindigkeit für einen gegebenen Abstand vom Kernzentrum (siehe Abschnitt 4) wegen der vorhandenen Tangentialbewegung ergänzt werden. Die Tangentialbewegung führt zu einer radial nach außen gerichteten Kraft F_R, die der Gravitationskraft F_G entgegenwirkt. Entsprechend wird Letztere reduziert ($F = F_G - F_R$), was schließlich (nach **Integration über 1/*r***) zu einer **reduzierten potentiellen Energie E_{pot}** führt:

$$F = F_G - F_R = \gamma \cdot \frac{m_{\text{Kern}} \cdot m_{\text{Philaea}}}{r^2} - \frac{m_{\text{Philae}} \cdot v_{\text{Start}}^2}{r}.$$

$$E_{pot} = \int_{r_{\text{Oberfläche}}}^{r_{\text{Start}}} F \cdot dr = \int_{r_{\text{Oberfläche}}}^{r_{\text{Start}}} \left(\gamma \cdot \frac{m_{\text{Kern}} \cdot m_{\text{Philaea}}}{r^2} - \frac{m_{\text{Philae}} \cdot v_{\text{Start}}^2}{r} \right) dr,$$

$$E_{pot} = \left[-\gamma \cdot \frac{m_{\text{Kern}} \cdot m_{\text{Philae}}}{r} - m_{\text{Philae}} \cdot v_{\text{Start}}^2 \cdot \ln(r) \right]_{r_{\text{Oberfläche}}}^{r_{\text{Start}}},$$

$$E_{pot} = \left(-\gamma \cdot \frac{m_{\text{Kern}} \cdot m_{\text{Philae}}}{r_{\text{Start}}} - m_{\text{Philae}} \cdot v_{\text{Start}}^2 \cdot \ln(r_{\text{Start}}) \right) - \left(-\gamma \cdot \frac{m_{\text{Kern}} \cdot m_{\text{Philae}}}{r_{\text{Oberfläche}}} - m_{\text{Philae}} \cdot v_{\text{Start}}^2 \cdot \ln(r_{\text{Oberfläche}}) \right),$$

$$E_{pot} = \gamma \cdot m_{\text{Kern}} \cdot m_{\text{Philae}} \cdot \left(\frac{1}{r_{\text{Oberfläche}}} - \frac{1}{r_{\text{Start}}} \right) + m_{\text{Philae}} \cdot v_{\text{Start}}^2 \cdot \left(\ln(r_{\text{Oberfläche}}) - \ln(r_{\text{Start}}) \right),$$

$$E_{pot} = \gamma \cdot m_{\text{Kern}} \cdot m_{\text{Philae}} \cdot \left(\frac{1}{r_{\text{Oberfläche}}} - \frac{1}{r_{\text{Start}}} \right) + m_{\text{Philae}} \cdot v_{\text{Start}}^2 \cdot \ln\left(\frac{r_{\text{Oberfläche}}}{r_{\text{Start}}} \right).$$

$$E_{kin} = E_{pot},$$

$$\frac{m_{\text{Philae}}}{2} \cdot v^2 = \gamma \cdot m_{\text{Kern}} \cdot m_{\text{Philae}} \cdot \left(\frac{1}{r_{\text{Oberfläche}}} - \frac{1}{r_{\text{Start}}} \right) + m_{\text{Philae}} \cdot v_{\text{Start}}^2 \cdot \ln\left(\frac{r_{\text{Oberfläche}}}{r_{\text{Start}}} \right),$$

$$v = \sqrt{2 \cdot \gamma \cdot m_{\text{Kern}} \cdot \left(\frac{1}{r_{\text{Oberfläche}}} - \frac{1}{r_{\text{Start}}} \right) + 2 \cdot v_{\text{Start}}^2 \cdot \ln\left(\frac{r_{\text{Oberfläche}}}{r_{\text{Start}}} \right)}.$$

Aufgabe 6.1

Bestimme erneut die Abstiegszeit und die Endgeschwindigkeit von ‚Philae' mit Hilfe von $n = 8$ Teilstrecken für den Fall, dass ‚Philae' mit einer Geschwindigkeit von 2,5 km/h in Richtung zum Kometenkernzentrum abgestoßen wird (und dabei seine Tangentialbewegung beibehält).
Vergleiche dein Ergebnis mit dem von Aufgabe 5.2.

(→zurück zum Anfang)

Quellen

[1] http://www.esa.int/ger/ESA_in_your_country/Germany/Rosetta_-_Landung_fuer_12._November_geplant

[2] http://www.universetoday.com/114873/esas-rosetta-mission-sets-november-12th-as-the-landing-date-for-philae/

[3] http://de.wikipedia.org/wiki/Tschurjumow-Gerassimenko

[4] http://www.bernd-leitenberger.de/europaeische-raumsonden.shtml

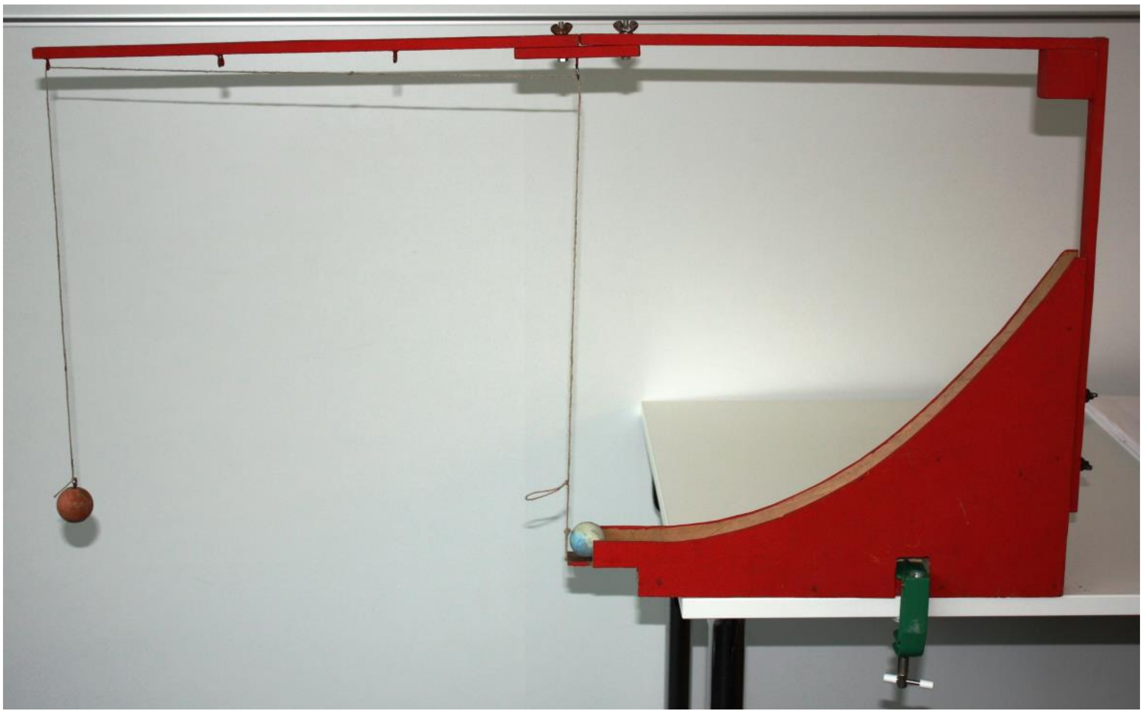
WIS-Quellen, die das Thema berühren

[5] Olaf Fischer: Kometen in der Schule (WIS 5/2006), http://www.wissenschaft-schulen.de/alias/material/kometen-in-der-schule/1051514

Anhang

Freihandexperiment

zur Gleichzeitigkeit von Fallbewegung und Tangentialbewegung bei einer ballistischen Kurve



Die Gleichzeitigkeit von Fallbewegung und Horizontalbewegung bei einem Wurf (entlang einer ballistischen Kurve) lässt sich mit dem oben dargestellten Freihandexperiment wie folgt eindrucksvoll demonstrieren: Eine Kugel wird mit Hilfe einer Rollbahn waagerecht abgeworfen. Nach dem Abwurf fällt sie gleichzeitig und beschreibt dabei eine ballistische Kurve. Beim Abwurf löst sie die alleinige Fallbewegung einer zweiten Kugel aus. Beide Kugeln treffen sich, was bedeutet, dass die Fallbewegung der Kugel auf der ballistischen Kurve gleichzeitig mit und unabhängig von der waagerechten Bewegung erfolgt. (©: Olaf Fischer)

Ergebnisse

Zu 2.1.: Kreisbahngeschwindigkeiten der ISS und der Kometensonde ‚Rosetta‘

ISS, r = 12742/2 km, T = 93 min, H = 400 km

$$v = \frac{2\pi \cdot (r + H)}{T} = \frac{2\pi \cdot \left(12742/2 \cdot 10^3\,\mathrm{m} + 400000\,\mathrm{m}\right)}{93 \cdot 60\,\mathrm{s}} \approx 7624\,\mathrm{m/s}.$$

Rosetta, r = 22,5 km

$$v = \sqrt{\gamma \cdot \frac{m_{\mathrm{Kern}}}{r}} = \sqrt{6{,}6784 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^2} \cdot \frac{10^{13}\,\mathrm{kg}}{22{,}5 \cdot 10^3\,\mathrm{m}}} \approx 0{,}17\,\mathrm{m/s}.$$

Rosetta, R = 2 km

$$v = \sqrt{\gamma \cdot \frac{m_{\mathrm{Kern}}}{R}} = \sqrt{6{,}6784 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^2} \cdot \frac{10^{13}\,\mathrm{kg}}{2 \cdot 10^3\,\mathrm{m}}} \approx 0{,}58\,\mathrm{m/s}.$$

Erwartungsgemäß sind die Kreisbahngeschwindigkeiten von ‚Rosetta‘ deutlich kleiner als die der ISS (Masse der Erde >> Masse Kometenkern).
Des Weiteren ist die Kreisbahngeschwindigkeit von ‚Rosetta‘ auf der Oberfläche höher als im Orbit (Radiusabhängigkeit).

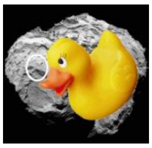
Zu 3.1.: Start des Landemanövers

$$\frac{\alpha}{360°} = \frac{7\,\mathrm{h}}{12{,}4\,\mathrm{h}},$$

$$\alpha \approx 203°.$$

α muss kleiner sein, wenn ‚Philae‘ auch eine Tangentialbewegung ausführt.

Zu 4.1.: Freier Fall mit a = konstant



$$a = \gamma \cdot \frac{m_{Kern}}{r^2} = 6{,}6784 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^2} \cdot \frac{10^{13}\,\mathrm{kg}}{(12{,}25 \cdot 10^3\,\mathrm{m})^2} = 4{,}45 \cdot 10^{-6}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

$$s = \frac{a}{2} \cdot t^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 20{,}5 \cdot 10^3\,\mathrm{m}}{4{,}45 \cdot 10^{-6}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} \approx 95987\,\mathrm{s} \approx 26{,}7\,\mathrm{h}.$$

$$v = a \cdot t \approx 0{,}43\,\mathrm{m/s}.$$

Zu 5.1.: Freier Fall bei a ~ 1/r^2: Endgeschwindigkeit

$$v = \sqrt{2 \cdot \gamma \cdot m_{\mathrm{Kern}} \cdot \left(\frac{1}{r_{\mathrm{Oberfläche}}} - \frac{1}{r_{\mathrm{Start}}}\right)}.$$

$$v = \sqrt{2 \cdot 6{,}6784 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^2} \cdot 10^{13}\,\mathrm{kg} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot 10^3\,\mathrm{m}} - \frac{1}{22{,}5 \cdot 10^3\,\mathrm{m}}\right)}$$

$$v = \sqrt{2 \cdot 6{,}6784 \cdot 10^2\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}^2} \cdot \left(\frac{22{,}5 \cdot 10^3\,\mathrm{m}}{22{,}5 \cdot 10^3\,\mathrm{m} \cdot 2 \cdot 10^3\,\mathrm{m}} - \frac{2 \cdot 10^3\,\mathrm{m}}{2 \cdot 10^3\,\mathrm{m} \cdot 22{,}5 \cdot 10^3\,\mathrm{m}}\right)}$$

$$v = \sqrt{2 \cdot 6{,}6784 \cdot 10^2\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}^2} \cdot \left(\frac{(22{,}5 - 2) \cdot 10^3\,\mathrm{m}}{22{,}5 \cdot 10^3\,\mathrm{m} \cdot 2 \cdot 10^3\,\mathrm{m}}\right)} = \sqrt{2 \cdot 6{,}6784 \cdot 10^2\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} \cdot \left(\frac{20{,}5}{45 \cdot 10^3}\right)} \approx 0{,}78\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Zu 5.2.: Freier Fall bei a ~ 1/r²: Fallzeit

1 Intervall mit 20,5 km Länge:
Intervallmitte bei: 10,25 km

$$v=\sqrt{2\cdot\gamma\cdot m_{\text{Kern}}\cdot\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_{\text{Start}}}\right)}.$$

$$v_1=\sqrt{2\cdot 6{,}6784\cdot 10^{-11}\,\frac{\text{m}^3}{\text{kg}\cdot\text{s}^2}\cdot 10^{13}\ \text{kg}\cdot\left(\frac{1}{10{,}25\cdot 10^3\,\text{m}}-\frac{1}{22{,}5\cdot 10^3\,\text{m}}\right)}\approx 0{,}27\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

$$t_1=\frac{s}{v_1}=\frac{20{,}5\cdot 10^3\ \text{m}}{0{,}27\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}\approx 75926\,\text{s}\approx 21{,}1\,\text{h}.$$

$$t=t_1\approx 21{,}1\,\text{h}.$$

2 Intervalle mit je 10,25 km Länge:
Intervallmitten bei: 17,375 km und 7,125 km

$$v=\sqrt{2\cdot\gamma\cdot m_{\text{Kern}}\cdot\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_{\text{Start}}}\right)}.$$

$$v_1=\sqrt{2\cdot 6{,}6784\cdot 10^{-11}\,\frac{\text{m}^3}{\text{kg}\cdot\text{s}^2}\cdot 10^{13}\ \text{kg}\cdot\left(\frac{1}{17{,}375\cdot 10^3\,\text{m}}-\frac{1}{22{,}5\cdot 10^3\,\text{m}}\right)}\approx 0{,}13\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_2=\sqrt{2\cdot 6{,}6784\cdot 10^{-11}\,\frac{\text{m}^3}{\text{kg}\cdot\text{s}^2}\cdot 10^{13}\ \text{kg}\cdot\left(\frac{1}{7{,}125\cdot 10^3\,\text{m}}-\frac{1}{22{,}5\cdot 10^3\,\text{m}}\right)}\approx 0{,}36\,\frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$t_1=\frac{s}{v_1}=\frac{10{,}25\cdot 10^3\ \text{m}}{0{,}13\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}\approx 78846\,\text{s}\approx 21{,}9\,\text{h},\quad t_2=\frac{s}{v_2}=\frac{10{,}25\cdot 10^3\ \text{m}}{0{,}36\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}\approx 28472\,\text{s}\approx 7{,}9\,\text{h}.$$

$$t=t_1+t_2\approx 29{,}8\,\text{h}.$$

4 Intervalle mit je 5,125 km Länge:
Intervallmitten bei: 19,9375 km, 14,8125 km, 9,6875 km und 4,5625 km

$$v=\sqrt{2\cdot\gamma\cdot m_{\text{Kern}}\cdot\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_{\text{Start}}}\right)}.$$

$$v_1=\sqrt{2\cdot 6{,}6784\cdot 10^{-11}\,\frac{\text{m}^3}{\text{kg}\cdot\text{s}^2}\cdot 10^{13}\ \text{kg}\cdot\left(\frac{1}{19{,}9375\cdot 10^3\,\text{m}}-\frac{1}{22{,}5\cdot 10^3\,\text{m}}\right)}\approx 0{,}087\,\frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_2=\sqrt{2\cdot 6{,}6784\cdot 10^{-11}\,\frac{\text{m}^3}{\text{kg}\cdot\text{s}^2}\cdot 10^{13}\ \text{kg}\cdot\left(\frac{1}{14{,}8125\cdot 10^3\,\text{m}}-\frac{1}{22{,}5\cdot 10^3\,\text{m}}\right)}\approx 0{,}175\,\frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_3=\sqrt{2\cdot 6{,}6784\cdot 10^{-11}\,\frac{\text{m}^3}{\text{kg}\cdot\text{s}^2}\cdot 10^{13}\ \text{kg}\cdot\left(\frac{1}{9{,}6875\cdot 10^3\,\text{m}}-\frac{1}{22{,}5\cdot 10^3\,\text{m}}\right)}\approx 0{,}28\,\frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_4=\sqrt{2\cdot 6{,}6784\cdot 10^{-11}\,\frac{\text{m}^3}{\text{kg}\cdot\text{s}^2}\cdot 10^{13}\ \text{kg}\cdot\left(\frac{1}{4{,}5625\cdot 10^3\,\text{m}}-\frac{1}{22{,}5\cdot 10^3\,\text{m}}\right)}\approx 0{,}483\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

$$t_1=\frac{s}{v_1}=\frac{5{,}125\cdot 10^3\ \text{m}}{0{,}087\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}\approx 58908\,\text{s}\approx 16{,}4\,\text{h},\quad t_2=\frac{s}{v_2}=\frac{5{,}125\cdot 10^3\ \text{m}}{0{,}175\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}\approx 29286\,\text{s}\approx 8{,}1\,\text{h},$$

$$t_3=\frac{s}{v_3}=\frac{5{,}125\cdot 10^3\ \text{m}}{0{,}28\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}\approx 18304\,\text{s}\approx 5{,}1\,\text{h},\quad t_4=\frac{s}{v_4}=\frac{5{,}125\cdot 10^3\ \text{m}}{0{,}483\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}\approx 10611\,\text{s}\approx 2{,}9\,\text{h}.$$

$$t=t_1+t_2+t_3+t_4\approx 32{,}5\,\text{h}.$$

8 Intervalle mit je 2,5625 km Länge:

Intervallmitten bei: 21,21875 km, 18,65625 km, 16,09375 km, 13,53125 km, 10,96875 km, 8,40625 km, 5,84375 km und 3,28125 km.

$$v=\sqrt{2\cdot\gamma\cdot m_{\text{Kern}}\cdot\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_{\text{Start}}}\right)}.$$

$$v_1=\sqrt{2\cdot 6{,}6784\cdot 10^{-11}\,\frac{\text{m}^3}{\text{kg}\cdot\text{s}^2}\cdot 10^{13}\ \text{kg}\cdot\left(\frac{1}{21{,}21875\cdot 10^3\,\text{m}}-\frac{1}{22{,}5\cdot 10^3\,\text{m}}\right)}\approx 0{,}06\,\frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_2=\sqrt{2\cdot 6{,}6784\cdot 10^{-11}\,\frac{\text{m}^3}{\text{kg}\cdot\text{s}^2}\cdot 10^{13}\ \text{kg}\cdot\left(\frac{1}{18{,}65625\cdot 10^3\,\text{m}}-\frac{1}{22{,}5\cdot 10^3\,\text{m}}\right)}\approx 0{,}11\,\frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_3=\sqrt{2\cdot 6{,}6784\cdot 10^{-11}\,\frac{\text{m}^3}{\text{kg}\cdot\text{s}^2}\cdot 10^{13}\ \text{kg}\cdot\left(\frac{1}{16{,}09375\cdot 10^3\,\text{m}}-\frac{1}{22{,}5\cdot 10^3\,\text{m}}\right)}\approx 0{,}15\,\frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_4=\sqrt{2\cdot 6{,}6784\cdot 10^{-11}\,\frac{\text{m}^3}{\text{kg}\cdot\text{s}^2}\cdot 10^{13}\ \text{kg}\cdot\left(\frac{1}{13{,}53125\cdot 10^3\,\text{m}}-\frac{1}{22{,}5\cdot 10^3\,\text{m}}\right)}\approx 0{,}2\,\frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_5=\sqrt{2\cdot 6{,}6784\cdot 10^{-11}\,\frac{\text{m}^3}{\text{kg}\cdot\text{s}^2}\cdot 10^{13}\ \text{kg}\cdot\left(\frac{1}{10{,}96875\cdot 10^3\,\text{m}}-\frac{1}{22{,}5\cdot 10^3\,\text{m}}\right)}\approx 0{,}25\,\frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_6=\sqrt{2\cdot 6{,}6784\cdot 10^{-11}\,\frac{\text{m}^3}{\text{kg}\cdot\text{s}^2}\cdot 10^{13}\ \text{kg}\cdot\left(\frac{1}{8{,}40625\cdot 10^3\,\text{m}}-\frac{1}{22{,}5\cdot 10^3\,\text{m}}\right)}\approx 0{,}31\,\frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_7=\sqrt{2\cdot 6{,}6784\cdot 10^{-11}\,\frac{\text{m}^3}{\text{kg}\cdot\text{s}^2}\cdot 10^{13}\ \text{kg}\cdot\left(\frac{1}{5{,}84375\cdot 10^3\,\text{m}}-\frac{1}{22{,}5\cdot 10^3\,\text{m}}\right)}\approx 0{,}41\,\frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_8=\sqrt{2\cdot 6{,}6784\cdot 10^{-11}\,\frac{\text{m}^3}{\text{kg}\cdot\text{s}^2}\cdot 10^{13}\ \text{kg}\cdot\left(\frac{1}{3{,}28125\cdot 10^3\,\text{m}}-\frac{1}{22{,}5\cdot 10^3\,\text{m}}\right)}\approx 0{,}59\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

$$t_1=\frac{s}{v_1}=\frac{2{,}5625\cdot 10^3\ \text{m}}{0{,}06\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}\approx 42708\,\text{s}\approx 11{,}8\,\text{h},\quad t_2=\frac{s}{v_2}=\frac{2{,}5625\cdot 10^3\ \text{m}}{0{,}11\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}\approx\ 23295\,\text{s}\approx 6{,}5\,\text{h},$$

$$t_3=\frac{s}{v_3}=\frac{2{,}5625\cdot 10^3\ \text{m}}{0{,}15\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}\approx\ 17083\,\text{s}\approx 4{,}7\,\text{h},\quad t_4=\frac{s}{v_4}=\frac{2{,}5625\cdot 10^3\ \text{m}}{0{,}2\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}\approx\ 12812\,\text{s}\approx 3{,}6\,\text{h},$$

$$t_5=\frac{s}{v_5}=\frac{2{,}5625\cdot 10^3\ \text{m}}{0{,}25\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}\approx\ 10250\,\text{s}\approx 2{,}8\,\text{h},\quad t_6=\frac{s}{v_6}=\frac{2{,}5625\cdot 10^3\ \text{m}}{0{,}31\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}\approx\ 8266\,\text{s}\approx 2{,}3\,\text{h},$$

$$t_7=\frac{s}{v_7}=\frac{2{,}5625\cdot 10^3\ \text{m}}{0{,}41\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}\approx\ 6250\,\text{s}\approx 1{,}7\,\text{h},\quad t_8=\frac{s}{v_8}=\frac{2{,}5625\cdot 10^3\ \text{m}}{0{,}59\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}\approx\ 4343\,\text{s}\approx 1{,}2\,\text{h}.$$

$$t=t_1+t_2+t_3+t_4+t_5+t_6+t_7+t_8\approx 34{,}6\,\text{h}.$$

Mit zunehmender Zahl n der Teilstrecken wird das Ergebnis immer größer. Der Zuwachs verlangsamt sich aber, d. h., für ein $n\to\infty$ wird ein Grenzwert angestrebt.

Zu 6.1: Landung mit ballistischer Kurve
(freier Fall mit a ~ 1/r² und gleichzeitiger Tangentialbewegung)

Bei 8 Intervallen mit je 2,5625 km Länge:
Intervallmitten (Werte für *r*) bei: 21,21875 km, 18,65625 km, 16,09375 km, 13,53125 km, 10,96875 km, 8,40625 km, 5,84375 km und 3,28125 km.

$$v_{\text{Abstoßung}} \approx 0{,}69 \text{ m/s}$$

$$v = \sqrt{2\cdot\gamma\cdot m_{\text{Kern}}\cdot\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_{\text{Start}}}\right)+2\cdot v_{\text{Start}}{}^{2}\cdot\ln\left(\frac{r}{r_{\text{Start}}}\right)}+v_{\text{Abstoßung}},$$

$$v_1 = \sqrt{2\cdot 6{,}6784\cdot 10^{-11}\,\frac{\text{m}^3}{\text{kg}\cdot\text{s}^2}\cdot 10^{13}\text{ kg}\cdot\left(\frac{1}{21{,}21875\cdot 10^3\text{m}}-\frac{1}{22{,}5\cdot 10^3\text{m}}\right)+2\cdot\left(0{,}17\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2\cdot\ln\frac{21{,}21875\cdot 10^3\text{m}}{22{,}5\cdot 10^3\text{m}}}+0{,}69\,\frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_1 = \sqrt{1335{,}68\,\frac{\text{m}^3}{\text{s}^2}\cdot\left(\frac{1}{21{,}21875\cdot 10^3\text{m}}-\frac{1}{22{,}5\cdot 10^3\text{m}}\right)+0{,}0578\,\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}\cdot\ln\frac{21{,}21875\cdot 10^3\text{m}}{22{,}5\cdot 10^3\text{m}}}+0{,}69\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\approx 0{,}704\,\frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_2 = \sqrt{1335{,}68\,\frac{\text{m}^3}{\text{s}^2}\cdot\left(\frac{1}{18{,}65625\cdot 10^3\text{m}}-\frac{1}{22{,}5\cdot 10^3\text{m}}\right)+0{,}0578\,\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}\cdot\ln\frac{18{,}65625\cdot 10^3\text{m}}{22{,}5\cdot 10^3\text{m}}}+0{,}69\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\approx 0{,}727\,\frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_3 = \sqrt{1335{,}68\,\frac{\text{m}^3}{\text{s}^2}\cdot\left(\frac{1}{16{,}09375\cdot 10^3\text{m}}-\frac{1}{22{,}5\cdot 10^3\text{m}}\right)+0{,}0578\,\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}\cdot\ln\frac{16{,}09375\cdot 10^3\text{m}}{22{,}5\cdot 10^3\text{m}}}+0{,}69\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\approx 0{,}755\,\frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_4 = \sqrt{1335{,}68\,\frac{\text{m}^3}{\text{s}^2}\cdot\left(\frac{1}{13{,}53125\cdot 10^3\text{m}}-\frac{1}{22{,}5\cdot 10^3\text{m}}\right)+0{,}0578\,\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}\cdot\ln\frac{13{,}53125\cdot 10^3\text{m}}{22{,}5\cdot 10^3\text{m}}}+0{,}69\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\approx 0{,}790\,\frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_5 = \sqrt{1335{,}68\,\frac{\text{m}^3}{\text{s}^2}\cdot\left(\frac{1}{10{,}96875\cdot 10^3\text{m}}-\frac{1}{22{,}5\cdot 10^3\text{m}}\right)+0{,}0578\,\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}\cdot\ln\frac{10{,}96875\cdot 10^3\text{m}}{22{,}5\cdot 10^3\text{m}}}+0{,}69\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\approx 0{,}835\,\frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_6 = \sqrt{1335{,}68\,\frac{\text{m}^3}{\text{s}^2}\cdot\left(\frac{1}{8{,}40625\cdot 10^3\text{m}}-\frac{1}{22{,}5\cdot 10^3\text{m}}\right)+0{,}0578\,\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}\cdot\ln\frac{8{,}40625\cdot 10^3\text{m}}{22{,}5\cdot 10^3\text{m}}}+0{,}69\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\approx 0{,}896\,\frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_7 = \sqrt{1335{,}68\,\frac{\text{m}^3}{\text{s}^2}\cdot\left(\frac{1}{5{,}84375\cdot 10^3\text{m}}-\frac{1}{22{,}5\cdot 10^3\text{m}}\right)+0{,}0578\,\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}\cdot\ln\frac{5{,}84375\cdot 10^3\text{m}}{22{,}5\cdot 10^3\text{m}}}+0{,}69\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\approx 0{,}992\,\frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_8 = \sqrt{1335{,}68\,\frac{\text{m}^3}{\text{s}^2}\cdot\left(\frac{1}{3{,}28125\cdot 10^3\text{m}}-\frac{1}{22{,}5\cdot 10^3\text{m}}\right)+0{,}0578\,\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}\cdot\ln\frac{3{,}28125\cdot 10^3\text{m}}{22{,}5\cdot 10^3\text{m}}}+0{,}69\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\approx 1{,}176\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

$$t_1 = \frac{s}{v_1} = \frac{2{,}5625\cdot 10^3\text{ m}}{0{,}704\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}\approx 3640\text{ s}\approx 1{,}01\text{ h},\quad t_2 = \frac{s}{v_2} = \frac{2{,}5625\cdot 10^3\text{ m}}{0{,}727\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}\approx 3525\text{ s}\approx 0{,}98\text{ h},$$

$$t_3 = \frac{s}{v_3} = \frac{2{,}5625\cdot 10^3\text{ m}}{0{,}755\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}\approx 3394\text{ s}\approx 0{,}94\text{ h},\quad t_4 = \frac{s}{v_4} = \frac{2{,}5625\cdot 10^3\text{ m}}{0{,}79\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}\approx 3244\text{ s}\approx 0{,}90\text{ h},$$

$$t_5 = \frac{s}{v_5} = \frac{2{,}5625\cdot 10^3\text{ m}}{0{,}835\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}\approx 3069\text{ s}\approx 0{,}85\text{ h},\quad t_6 = \frac{s}{v_6} = \frac{2{,}5625\cdot 10^3\text{ m}}{0{,}896\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}\approx 2860\text{ s}\approx 0{,}79\text{ h},$$

$$t_7 = \frac{s}{v_7} = \frac{2{,}5625\cdot 10^3\text{ m}}{0{,}992\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}\approx 2583\text{ s}\approx 0{,}72\text{ h},\quad t_8 = \frac{s}{v_8} = \frac{2{,}5625\cdot 10^3\text{ m}}{1{,}176\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}\approx 2179\text{ s}\approx 0{,}60\text{ h}.$$

$$t = t_1+t_2+t_3+t_4+t_5+t_6+t_7+t_8\approx 6{,}4\text{ h}.$$

$$v_{\text{Oberfläche}} = \sqrt{1335{,}68\,\frac{\text{m}^3}{\text{s}^2}\cdot\left(\frac{1}{2\cdot 10^3\text{m}}-\frac{1}{22{,}5\cdot 10^3\text{m}}\right)+0{,}0578\,\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}\cdot\ln\frac{2\cdot 10^3\text{m}}{22{,}5\cdot 10^3\text{m}}}+0{,}69\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\approx 1{,}37\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Aufgabe 5.2 hat gezeigt, dass durch weitere Verfeinerung der Teilstrecken noch ein Zuwachs an Abstiegszeit zu erwarten ist, so dass die angegebenen 7 Stunden erreicht werden.