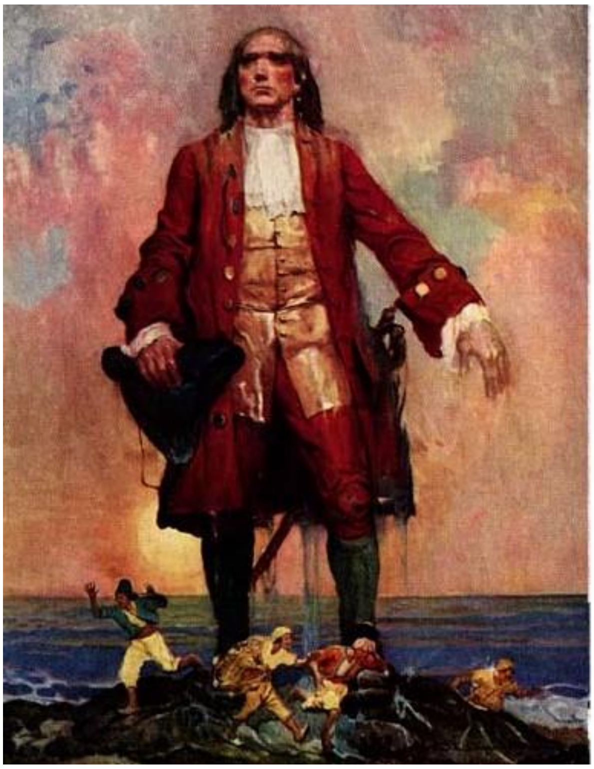
Gulliver und die Weißen Zwerge

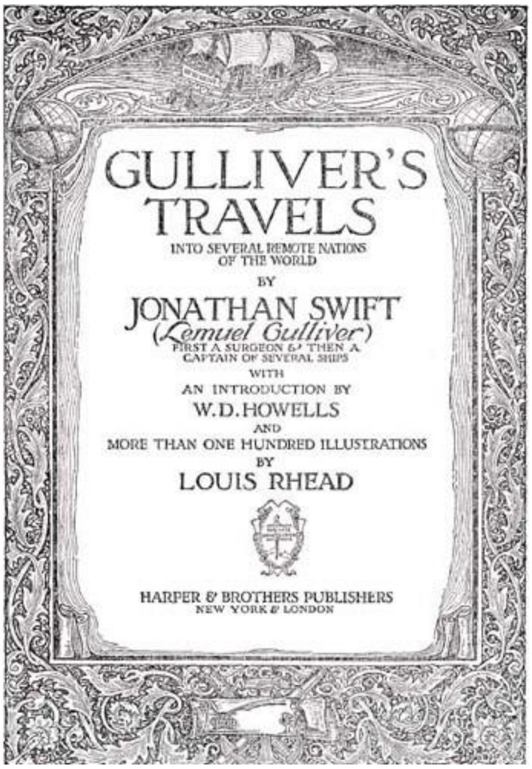
In Bezug zu "Weißer Zwerg mit Sauerstoffhülle" in der Zeitschrift „Sterne und Weltraum“ 7/2016, Zielgruppe: obere Mittelstufe und Oberstufe, WIS-ID: 1285880

Lutz Clausnitzer

Weiße Zwerge sind einerseits exotische Objekte, weil sie es ganz ohne Kernfusion oft auf hohe Oberflächentemperaturen bringen. Andererseits gehören sie zum Alltag des Weltalls, denn so enden die meisten Sterne. Auch die Sonne wird in einigen Milliarden Jahren ein Weißer Zwerg sein. Im folgenden Arbeitsblatt lernt man aus diesem Entwicklungsprozess heraus die besonderen physikalischen Eigenschaften Weißer Zwerge kennen. Indem man ihre Größe, Dichte, die auf der Oberfläche herrschende Fallbeschleunigung und die Fluchtgeschwindigkeit berechnet, bekommt man ein „Gefühl“ für diese Spezies des Universums. Ein Größenvergleich mit Hauptreihensternen erinnert vielleicht ein wenig an Jonathan Swifts „Gullivers Reisen“, einem Klassiker der englischen Literatur. Darin begegnet der Arzt Gulliver bei seiner Reise in das Land der Zwerge winzigen menschlichen Wesen. Ob ein Mensch, den wir uns auf die Dichte eines Weißen Zwerges zusammengeschrumpft denken, wohl in einem Fingerhut Platz finden könnte?

Übersicht der Bezüge im WIS-Beitrag		
Astronomie	Sterne	Sonne, Grundgrößen der Sterne, Sternentwicklung, Hauptreihensterne, Riesensterne, Weiße Zwerge
Physik	Mechanik	Größe, Dichte, freier Fall, Fallbeschleunigung, Fluchtgeschwindigkeit, Gravitation, Kreisbewegung, Radialkraft
Fächerverknüpfung	Astro-Deutsch	Satire, Jonathan Swift (1667-1745), Roman „Gullivers Reisen“
Lehre allgemein	Kompetenzen (Wissen und Erkenntnis), Unterrichtsmittel	Verstehendes Lesen, Text hinsichtlich gegebener Größen analysieren, Umgang mit Größen und Einheiten, Arbeitsblatt





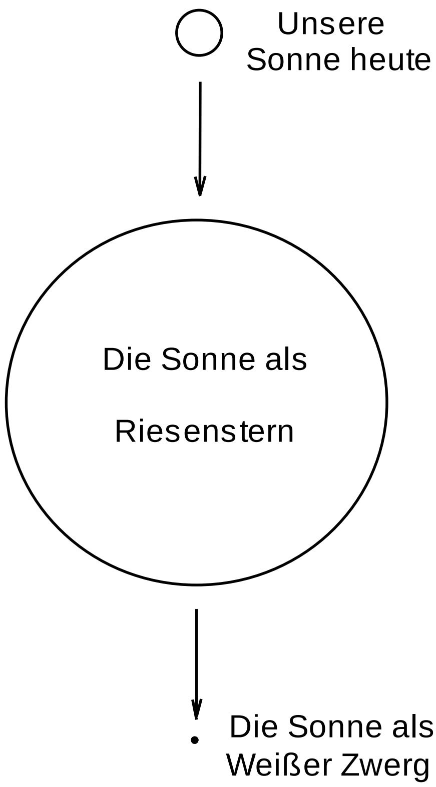
GULLIVER'S TRAVELS
INTO SEVERAL REMOTE NATIONS OF THE WORLD
BY
JONATHAN SWIFT
(Lemuel Gulliver)
FIRST A SURGEON & THEN A CAPTAIN OF SEVERAL SHIPS
WITH
AN INTRODUCTION BY
W. D. HOWELLS
AND
MORE THAN ONE HUNDRED ILLUSTRATIONS
BY
LOUIS RHEAD
HARPER & BROTHERS PUBLISHERS
NEW YORK & LONDON

Abbildung 1: Gulliver im Land der Zwerge. © Bild von Louis Read im Roman “Gulliver‘s Travels“ von Jonathan Swift (Harper & Brothers, New York & London, 1913): http://www.childrensbooksonline.org/Gullivers_Travels/index.htm.

ARBEITSBLATT:
Gulliver und die Weißen Zwerge

In Jonathan Swifts (1667-1745) satirischem Roman „Gullivers Reisen" reist der Arzt Gulliver auch in das Land der Zwerge. Das inspiriert uns zu der Frage, ob ein Mensch, den wir uns auf die Dichte eines Weißen Zwerges zusammengeschrumpft denken, in einem Fingerhut Platz finden könnte.

Die Sonne ist, wie jeder Stern, eine selbstleuchtende Gaskugel hoher Temperatur. Ihre für irdische Verhältnisse riesige Masse von $1{,}99 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$ erzeugt ein mächtiges Gravitationsfeld. Es ermöglicht ihren eigenen Zusammenhalt und die Bewegung der Planeten um sie. Die acht Planeten unseres Sonnensystems ergeben zusammengenommen erst den 750sten Teil der Sonnenmasse. Im Zentrum der Sonne verschmelzen seit 4,6 Milliarden Jahren Atomkerne des Wasserstoffs zu Heliumkernen. Der gewaltige Energiestrom hält die Sonnenoberfläche beständig auf etwa 5500°C, was eine kräftige Energieabstrahlung in den freien Raum bewirkt. Im Widerstreit des von innen nach außen gerichteten Gas- und Strahlungsdruckes und der nach innen wirkenden Gravitation erfreut sich die Sonne seit der Zeit ihrer Entstehung eines stabilen Gleichgewichts, das ihr einen nahezu konstanten Durchmesser von $d_S = 1392000\,\mathrm{km}$ verleiht.



Nachdem unser Zentralgestirn in einigen Milliarden Jahren aber die letzten 10% seines „Lebens" als Riesenstern verbracht, Merkur und Venus in seinem Innern verdampft und alles irdische Leben verbrannt haben wird, werden keine Atomkerne mehr miteinander verschmelzen und die zentralen Energievorräte erschöpft sein. Der innere Druck, welcher heute der Gravitation Paroli bietet, wird stark abfallen und das Volumen des mächtigen Gasballs nicht mehr aufrechterhalten können. Die Sonne wird in einer astronomisch kurzen Zeit von einigen Millionen Jahren auf Erdgröße $(R_E = 6371\,\mathrm{km})$ schrumpfen. Dabei wird ihre Temperatur zwar noch einmal ansteigen, doch der so entstandene Weiße Zwerg wird mangels Energienachschubes langsam auskühlen.

1. Nach ihrem Riesenstadium wird die Sonne wesentlich kleiner sein als heute? Begründen Sie das.
2. In welchem Verhältnis stehen Sonnen- und Erdradius zueinander?
3. Errechnen Sie die mittlere Dichte der Sonne und die Dichte des künftigen Weißen Zwerges unter der Annahme, dass die Sonne bis dahin 30% ihrer Masse verliert.
4. Bekanntlich unterliegt ein Körper an der Erdoberfläche der Fallbeschleunigung von ca. $9{,}81\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$. Wie groß ist die Fallbeschleunigung an der Oberfläche der heutigen Sonne und auf der Oberfläche des späteren Weißen Zwerges?
5. Ein Satellit umfliege die Erde, ein zweiter die Sonne, ein dritter den Weißen Zwerg. Die Höhe der Satelliten über den Oberflächen sei jeweils 10% des Himmelskörperradius'. Errechnen Sie die jeweiligen Kreisbahngeschwindigkeiten und Umlaufperioden!
6. Überschlagen Sie, welche Masse ein Mensch hätte, wenn sein Volumen mit der Materie eines Weißen Zwerges ausgefüllt wäre!
7. Passt ein Mensch, den man sich auf Weiße-Zwerg-Dichte geschrumpft vorstellt, in einen Fingerhut?

Lösung:

1. Am Ende des Riesenstadiums erlischt im Zentrum der Sonne jegliche Kernfusion. Der von innen nach außen gerichtete Druck sinkt auf einen viel kleineren Wert ab als er heute in der Sonne herrscht. Die unter dem Einfluss der Gravitation erfolgende Kontraktion führt so zu einem kleineren Durchmesser als er heute ist.

2. $$\frac{R_S}{R_E} = \frac{696000\,\text{km}}{6371\,\text{km}} = \underline{\underline{109}}$$

   Bemerkung: In der Astronomie wird der Radius kugelförmiger Himmelskörper mit R bezeichnet, um Verwechselungen mit dem Abstand r zwischen den Schwerpunkten zweier Himmelskörper (wie im Newton'schen Gravitationsgesetz) zu vermeiden.

3. $$\rho = \frac{m_S}{V_S} = \frac{m_S}{\frac{4}{3}\pi \cdot R_S^3} = \frac{1{,}99 \cdot 10^{30}\,\text{kg}}{\frac{4}{3}\pi \cdot (696000\,\text{km})^3} = \underline{\underline{1{,}41\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}}}$$

   $$\rho = \frac{m_{WZ}}{V_{WZ}} = \frac{0{,}7 \cdot m_S}{\frac{4}{3}\pi \cdot R_{WZ}^3} = \frac{1{,}39 \cdot 10^{30}\,\text{kg}}{\frac{4}{3}\pi \cdot (6371\,\text{km})^3} = \underline{\underline{1{,}29 \cdot 10^6 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}}} = 1{,}29\frac{\text{t}}{\text{cm}^3}$$

4. Aus der Gleichheit von Gewicht und Gravitationskraft $m \cdot g_S = G \cdot \frac{m_S \cdot m}{r^2}$ ergibt sich

   $$g_S = \frac{G \cdot m_S}{R_S^2} = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\text{m}^3 \cdot 1{,}99 \cdot 10^{30}\text{kg}}{(696000\,\text{km})^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^2} = \underline{\underline{274\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}$$

   $$g_{WZ} = \frac{G \cdot m_{WZ}}{R_{WZ}^2} = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\text{m}^3 \cdot 1{,}39 \cdot 10^{30}\text{kg}}{(6371\,\text{km})^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^2} = \underline{\underline{2284000\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}$$

5. Aus der Gleichheit von Radialkraft und Gravitationskraft $\frac{m \cdot v^2}{r} = G \cdot \frac{m_S \cdot m}{r^2}$ folgt

   $$v_E = \sqrt{\frac{G \cdot m_E}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\text{m}^3 \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24}\text{kg}}{7008\,\text{km} \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^2}} = \underline{\underline{7{,}538\frac{\text{km}}{\text{s}}}}$$

   $$T_E = \frac{2\pi \cdot r}{v} = \frac{2\pi \cdot 7008\,\text{km} \cdot \text{s}}{7{,}538\,\text{km}} = 5841\,\text{s} = 97{,}36\,\text{min} = \underline{\underline{1{,}62\,\text{h}}}$$

   Analog erhält man für die Sonne $\underline{\underline{v_S = 419\frac{\text{km}}{\text{s}}}}$ und $\underline{\underline{T_S = 3{,}189\,\text{h}}}$

   und für den Weißen Zwerg $\underline{\underline{v_{WZ} = 3637\frac{\text{km}}{\text{s}}}}$ und $\underline{\underline{T_{WZ} = 12{,}1\,\text{s}}}$ (!).

6. Für die Überschläge 5. und 6. gelte für die Dichte $\rho_{Mensch} = 1\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ und $\rho_{WZ} = 1\frac{\text{t}}{\text{cm}^3}$.

$$V_{Mensch} \approx 170\,\text{cm} \cdot 30\,\text{cm} \cdot 20\,\text{cm} = 102000\,\text{cm}^3$$

$$m = \rho_{WZ} \cdot V_{Mensch} = 1\frac{t}{cm^3} \cdot 102000cm^3 \approx \underline{\underline{100000\,\text{t}}}$$

7. $$\frac{\rho_{WZ}}{\rho_{Mensch}} = \frac{10^6\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}}{1\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}} \quad \rightarrow \quad \frac{V_{Mensch,WZ}}{V_{Mensch}} = \frac{1}{10^6} \quad \rightarrow \quad \frac{l_{Mensch,WZ}}{l_{Mensch}} = \frac{1}{100} \quad \rightarrow$$

$$l_{Mensch,WZ} = \frac{170\,\text{cm}}{100} = \underline{\underline{1{,}7\,\text{cm}}}$$

Oder ohne Gleichungen: Bei zwei Körpern gleicher Masse sind Volumen und Dichte indirekt proportional. Unterscheiden sich die linearen Abmessungen zwei formgleicher Körper durch den Faktor k, so hat der größere das k^3-fache Volumen des anderen. Folglich hätte ein Mensch bei 1000000-facher (k^3) Dichte ein Millionstel Volumen und bei gleich bleibender Masse den 100sten Teil (k^{-1}) seiner Körpergröße. Eine 1,7 m große Person wäre dann 1,7 cm groß und fände in einem Fingerhut Platz.