

Flug zum Mond – selbst berechnet

In Bezug zum SuW-Beitrag „Apollo 13 – Odyssee im Weltraum“ von Eugen Reichl, in SuW 4/2020, Rubrik „Welt der Wissenschaft / Raumfahrtgeschichte“, Zielgruppe: Oberstufe, WIS-ID: 1571154

Dr. Bernd Loibl (Hamburg)

Vor gut einem halben Jahrhundert hat die Menschheit erstmals das Gravitationsfeld ihres Heimatplaneten verlassen und hat sich in das eines anderen Himmelskörpers begeben. Das mag Anlass genug sein, sich einmal näher anzuschauen, wie man die Bahnen der Apollo-Missionen zum Mond berechnen kann. Es zeigt sich, dass man auch ohne tiefere Kenntnisse in höherer Mathematik durchaus zu einem Grundverständnis von interplanetaren Flugbahnen gelangen kann. Mit einem PC und Grundkenntnissen in Tabellenkalkulation kann man gut experimentieren und eigene Bahnen berechnen.

Übersicht der Bezüge im WIS-Beitrag		
Astronomie	Raumfahrt	Apollo-Missionen, Flug zum Mond, Swing-by, Gravity-Assist, interplanetare Flugbahn
Physik	Mechanik	Bewegung im Gravitationsfeld
Fächer- verknüpfung	Astronomie – Informatik	Tabellenkalkulation , Näherungsverfahren nach Euler , Halbschrittverfahren , Runge-Kutta-Verfahren
Lehre allgemein	Fachwissen Lehr-/ Sozialformen	Näherungsverfahren zur Berechnung der Bewegung im Gravitationsfeld Praktikumsaufgabe, Projektarbeit

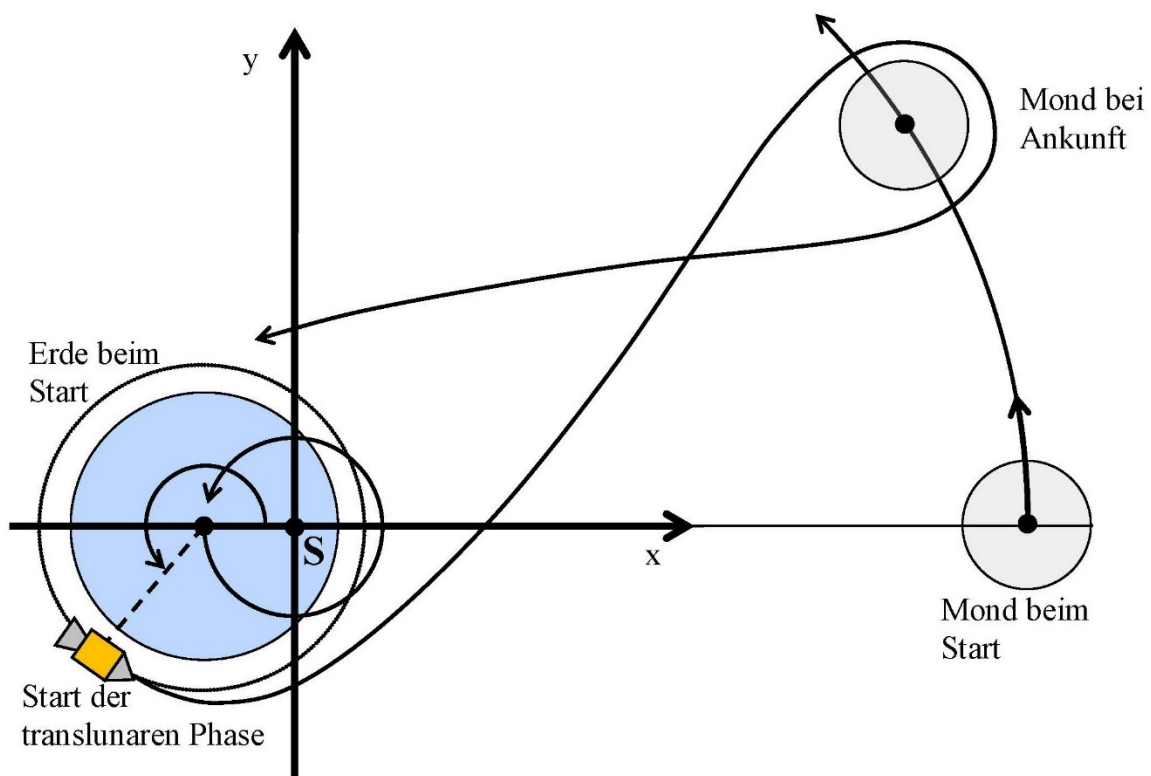


Abbildung 1: Geometrische Konfiguration einer Mondumrundung: Beginn der Berechnungen im Moment, in dem bei den Apollo-Missionen die Motoren der 3. Saturnstufe gezündet wurden und die Mondsonde in die translunare Bahn einschwenkt. Eine ähnliche Bahn musste Apollo 13 wählen. © Bernd Loibl.

[zurück zum Anfang](#)

Einführung

Um zum Mond zu gelangen, muss zur Überwindung der Anziehungskraft der Erde Energie aufgewendet werden. Die Größe der Energie richtet sich dabei nach der gewählten Bahn, deren Gestalt frei wählbar ist. Bei den Planungen der Apollo-Missionen stand auf der einen Seite die Reisedauer im Vordergrund, um die Belastungen der Astronauten möglichst gering zu halten. Andererseits musste sichergestellt werden, dass die für diese Reisedauer benötigte Energie auch von der Raketentechnik zur Verfügung gestellt werden konnte. Die Wahl fiel auf eine Zeitspanne von 60-80 Stunden für die Hinreise.

Es gibt aber auch Bahnen, die mit erheblich weniger Energie auskommen, dafür aber recht lange Reisezeiten benötigen. Die SMART-1 Raumsonde der ESA ließ sich im Jahr 2003 13 Monate Zeit und kam dafür aber mit einem sparsamen Ionenantrieb ans Ziel.

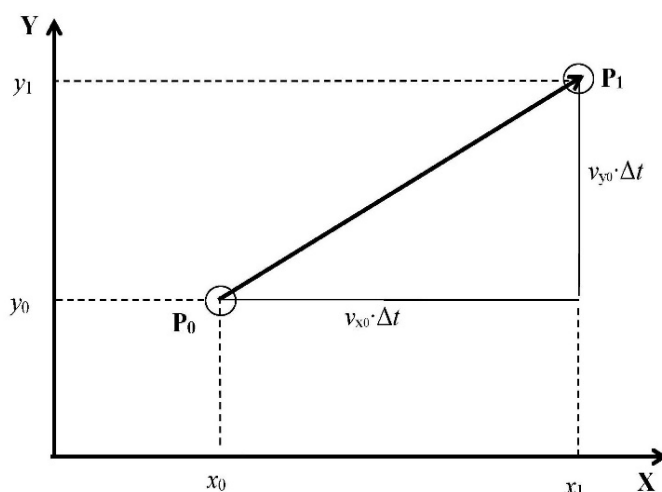
Den direkten Weg zum Mond dagegen wählte Jules Verne, der in seinem, Mitte des 19. Jahrhunderts veröffentlichten Roman "Von der Erde zum Mond" drei tapfere Männer auf direktem Wege zum Mond schießen ließ. Dafür sorgte eine senkrecht im Boden Floridas beim Breitengrad 28° Nord eingebaute knapp 300 Meter lange Kanone, die mit reichlich Schießbaumwolle versehen war. Das Projektil war hohl und bot den Abenteurern ausreichend Platz. Allerdings musste das bemannte Projektil die Kanone mit einer Geschwindigkeit von rund 35.000 km/h verlassen, um den Mond zu erreichen. Die dafür notwendige Beschleunigung innerhalb des nur 300 Meter langen Kanonenrohrs dürfte allerdings kaum einer der Mondfahrer überlebt haben. Jules Verne ließ das Schicksal der tapferen Männer wohlweislich auch ungeklärt. Die Geschichte endete jedenfalls damit, dass mit dem Fernrohr eines eigens in den Rocky Mountains gebauten Observatoriums das Projektil als kleiner Punkt in Mondnähe entdeckt wurde.

Es gibt also gute Gründe dafür, warum die NASA ihre Apollo-Astronauten mit moderater Beschleunigung an der Spitze einer Saturn-V-Rakete abheben und zunächst in einen Erdorbit in rund 180 km Höhe einschwenken ließ. Dazu musste die Geschwindigkeit der Apollokapsel einen Wert von 7,8 km/s erreichen. Nur dann ist die Fliehkraft in der Lage, die Gravitationskraft der Erde auszugleichen. Um nun aber den Mond zu erreichen, war die Zufuhr weiterer Energie notwendig.

Wie die nachfolgenden Rechnungen zeigen werden, ist eine Zunahme der Geschwindigkeit auf 10,9 km/s erforderlich, also auf einen Wert, der nur geringfügig unterhalb der Fluchtgeschwindigkeit der Erde liegt. Bei den Apollo-Missionen sorgte die 3. Stufe der Saturn-V-Rakete für den nötigen Schub, um den Übergang vom Erdorbit in die translunare Bahn einzuleiten. Dabei sind der genaue Startzeitpunkt sowie die Größe und die Richtung der Beschleunigung von entscheidender Bedeutung.

Die Bewegungsgleichungen

Um die Bahn einer Sonde rechnerisch festzulegen, müssen wir von einem genau bekannten Ort $P_0(x_0, y_0)$ (siehe Abb. 2) ausgehen und die Geschwindigkeit v_{x0}, v_{y0} an diesem Ort kennen. Bei konstanter Geschwindigkeit lässt sich der neue Ort $P_1(x_1, y_1)$ nach Ablauf der Zeitspanne Δt einfach berechnen:



$$x_1 = x_0 + \Delta t \cdot v_{x0}, \quad y_1 = y_0 + \Delta t \cdot v_{y0}.$$

Bei einer **Bewegung im Gravitationsfeld** einer Masse ist aber die Gleichförmigkeit der Bewegung nicht mehr gegeben. Die Gravitationskraft bewirkt eine Beschleunigung, die die Geschwindigkeit verändert. Dem Problem ist aber durch ein Näherungsverfahren beizukommen.

Abbildung 2: Berechnung des Ortes P_1 bei gleichförmiger Geschwindigkeit nach Ablauf der Zeitspanne Δt . © Bernd Loibl.

[zurück zum Anfang](#)

Als ersten Einstieg werden wir die Bahn einer fiktiven Sonde betrachten, die die Erde auf einer Kreisbahn in einem Abstand umläuft, der identisch ist mit dem mittleren Abstand des Erdmonds. Wir nehmen an, dass die Erde eine Punktmasse darstellt und keine weiteren gravitativen Kräfte wirken.

Der Betrag, der zwischen der Sonde und der Erde wirkenden Kraft F , ist durch Newtons Gravitationsgesetz gegeben:

$$F = \frac{G \cdot M \cdot m}{r^2}. \quad (1)$$

Dabei bezeichnet m die Masse der Sonde, M die Masse der Erde, r den Abstand beider Massen und G die Gravitationskonstante. Die Sondenmasse ist gegenüber der Erdmasse zu vernachlässigen, so dass die Erde ruht und der Ursprung des Koordinatensystems, in dem wir unsere Berechnungen durchführen wollen, mit dem Mittelpunkt der Erde zusammenfällt.

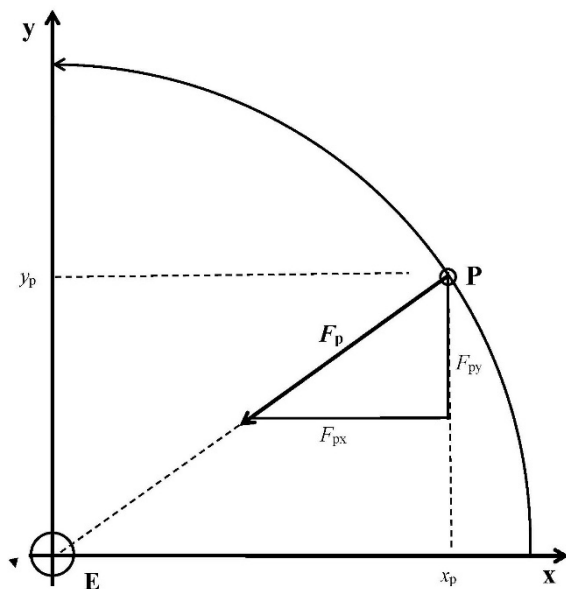


Abbildung 3: Die Komponenten F_{Px} und F_{Py} der Gravitationskraft F_P einer die Erde E umkreisenden Sonde am Ort P . © Bernd Loibl.

Die Abb. 3 zeigt, wie sich die Kraftkomponenten in x- und y-Richtung einer Sonde im Punkt P ihrer Bahn bestimmen lassen. Sie leiten sich ab aus den beiden Dreiecken, die aus den Seiten F_P , F_{Px} , F_{Py} und r_P , x_P , y_P bestehen.

Da die Dreiecke geometrisch ähnlich sind, gilt mit der Strecke $\overline{EP} = r_P$

$$\frac{F_P}{r_P} = \frac{F_{Px}}{x_P} \quad \text{und} \quad \frac{F_P}{r_P} = \frac{F_{Py}}{y_P}.$$

Unter Berücksichtigung, dass die Gravitation zum Zentrum gerichtet ist erhält man schließlich

$$F_{Px} = \frac{-F_P \cdot x_P}{r_P}, \quad F_{Py} = \frac{-F_P \cdot y_P}{r_P}.$$

Einsetzen von F aus Gleichung (1) liefert uns die zwischen Sonde und Erde wirkenden Kraftkomponenten in x- und y-Richtung

$$F_{Px} = \frac{-G \cdot M \cdot m \cdot x_P}{r_P^3}, \quad F_{Py} = \frac{-G \cdot M \cdot m \cdot y_P}{r_P^3}. \quad (2)$$

Die Gravitationskraft der Erde beschleunigt unserer Raumsonde mit der Masse m . Nach dem zweiten Gesetz von Newton gelten für die Beschleunigungen a_x und a_y in Komponentenschreibweise

$$a_{Px} = \frac{F_{Px}}{m}, \quad a_{Py} = \frac{F_{Py}}{m}.$$

Durch Einsetzen von F_{Px} und F_{Py} aus den Gleichungen (2) ergeben sich die Bewegungsgleichungen der Sonde zu

$$a_{Px} = \frac{-G \cdot M \cdot x_P}{r_P^3}, \quad a_{Py} = \frac{-G \cdot M \cdot y_P}{r_P^3}.$$

[zurück zum Anfang](#)

Es fällt auf, dass die Beschleunigung der Sonde durch die Erde unabhängig von ihrer Masse m ist. Die Raumsonde befindet sich daher im Zustand der Schwerelosigkeit. Das gilt übrigens auch für die Internationale Raumstation (ISS) und ihre Besatzung, obwohl sie nur in rund 400 km Höhe die Erde umrundet und daher einer starken Gravitation durch die Erdmasse ausgesetzt ist. Ganz allgemein werden Bewegungen bei denen nur die Schwerkraft wirkt in der Physik als freier Fall bezeichnet. Sehenswert sind dazu die folgenden zwei Videoclips auf YouTube:

Der Link <https://youtu.be/oYEgdZ3iEKA>

zeigt das Experiment von Dave Scott von Apollo15, bei dem eine Feder und ein Hammer gleich schnell fallen.

Und der Link <https://www.youtube.com/watch?v=E43-CfukEgs>

von BBC-Moderator Brian Cox führt zu einem Video von einem ähnlichen Experiment in einem Vakuumturm der NASA.

Auch der Mond befindet sich im Zustand des freien Falls. Aufgrund seiner nicht mehr zu vernachlässigenden Masse fällt er ebenso wie die Erde um den gemeinsamen Schwerpunkt.

Das Gravitationsgesetz von Newton und sein zweites Bewegungsgesetz haben uns also zu den obigen Bewegungsgleichungen geführt. Sie sagen uns, wie groß die Beschleunigungen am Ort x , y zu vorgegebener Zeit sind. Um die Bahn der Sonde zu berechnen, benötigen wir aber Formeln, mit denen wir den Ort und die Geschwindigkeit zu vorgegebener Zeit berechnen können. Leider lassen sich aber die Bewegungsgleichungen nicht direkt umformen und nach Ort und Geschwindigkeit auflösen.

Die aus den Bewegungsgleichungen bekannten Beschleunigungen geben uns nur Auskunft über die zeitliche Änderung der Geschwindigkeit und die findet kontinuierlich statt. Mathematisch gesehen müssen wir also eine Integration ausführen, um aus der Beschleunigung die Geschwindigkeit zu ermitteln, so wie wir das von der klassischen Integralrechnung her kennen. Dort werden Kurven durch kleine Geradenstücke ersetzt und die Gesamtfläche unter der Kurve wird durch Aufsummieren der so entstandenen Trapezflächen angenähert ermittelt. Je kleiner die Geradenstücke gewählt werden, umso genauer fällt das Resultat aus.

Genau nach diesem Rezept werden wir im Folgenden vorgehen und die Bewegungsgleichungen durch geschickt gewählte Näherungsverfahren nach Ort und Geschwindigkeit aufzulösen.

Das Näherungsverfahren nach Euler

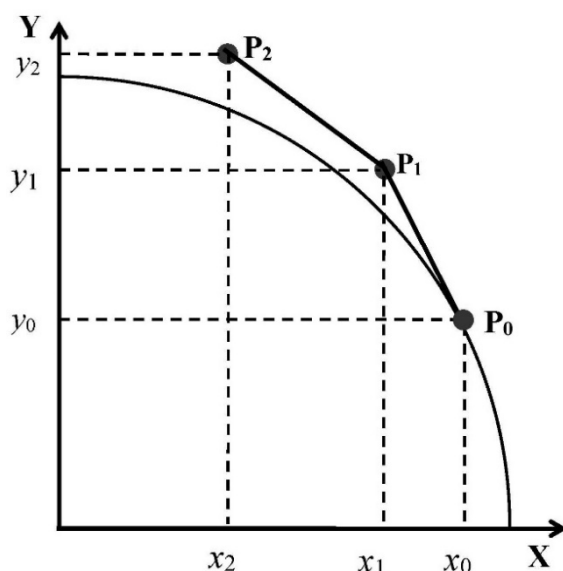


Abbildung 4: Die gekrümmte Bahn wird durch kurze Geradenstücke ersetzt. © Bernd Loibl.

Eine sehr einfache Näherung zur Lösung des Problems (Bewegung im Gravitationsfeld) besteht darin, die **gekrümmte Bahnkurve durch einen Polygonzug, also durch mehrere Geradenstücke zu ersetzen** (siehe Abb. 4). Wir gehen wieder von einem Punkt P_0 der Bahn aus, von dem wir Ort x_0 , y_0 und Geschwindigkeit v_{x0} , v_{y0} kennen. Die Näherung besteht darin, dass die Sonde in dem folgenden Zeitintervall Δt sich mit konstanter Geschwindigkeit geradlinig bis P_1 fortbewegt. Für P_1 erhalten wir dann die Koordinaten

$$x_1 = x_0 + \Delta t \cdot v_{x0}, \quad y_1 = y_0 + \Delta t \cdot v_{y0}.$$

Die Näherung für die Geschwindigkeit in P_1 besteht darin, dass wir mit einer konstanten Beschleunigung a_{x0} , a_{y0} , die für den Ort P_0 gilt, im Zeitintervall Δt rechnen.

[zurück zum Anfang](#)

KASTEN 1
Algorithmus für das Verfahren nach Euler

Startwerte ($i=0$):
Ort: x_0, y_0 ;
Geschwindigkeit: v_{x0}, v_{y0} ;

Beschleunigung:

$$r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}; \quad i = 0 \dots n;$$

$$a_{xi} = \frac{-G \cdot M \cdot x_i}{r_i^3};$$

$$a_{yi} = \frac{-G \cdot M \cdot y_i}{r_i^3};$$

Neuer Ort:

$$x_{i+1} = x_i + \Delta t \cdot v_{xi}; \quad i = 0 \dots n;$$

$$y_{i+1} = y_i + \Delta t \cdot v_{yi};$$

Neue Geschwindigkeit:

$$v_{xi+1} = v_{xi} + \Delta t \cdot a_{xi}; \quad i = 0 \dots n;$$

$$v_{yi+1} = v_{yi} + \Delta t \cdot a_{yi}.$$

Das Verfahren nach Euler, dessen Algorithmus im Kasten 1 zusammengefasst ist, stellt eine recht grobe Näherung dar. Es ist aber ein sehr einfacher Algorithmus, der sich leicht in ein Computerprogramm umsetzen lässt. Die Genauigkeit des Eulerverfahrens wollen wir nun an dem einfachen Beispiel unserer fiktiven Raumsonde untersuchen. Sie umkreist also die ungestörte Erde, die sich als Massenpunkt im Ursprung eines x/y-Koordinatensystems befindet. Die Sonde soll auf der x-Achse in einem Erdabstand von 384.400 km (= 60,34 Erdradien) starten mit einer Geschwindigkeit von 1,018 km/s. Die Startwerte lauten also:

$$x_0 = 384\,400 \text{ km}; \quad y_0 = 0 \text{ km};$$

$$v_{x0} = 0 \text{ km/s}; \quad v_{y0} = 1,018 \text{ km/s}.$$

Es empfiehlt sich, die Rechnungen mit einem **Tabellenkalkulationsprogramm** (z.B. Excel) durchzuführen. Man bekommt unmittelbar die Ergebnisse in den Zellen angezeigt und kann die Diagrammfunktion für die bequeme grafische Darstellung nutzen. Dadurch lässt sich auch sehr schnell klären, ob man beim Programmieren des Algorithmus einen Fehler begangen hat. Das Produkt aus Gravitationskonstante G und Masse M wird in der Himmelsmechanik durchweg als Gravitationsparameter bezeichnet. Für die Erde gilt

$$G_E = G \cdot M = 398.600,44 \frac{\text{km}^3}{\text{s}^2}.$$

Wie man der Abb. 5 entnimmt, wird die Bahn umso besser, je kleiner die Zeitintervalle werden. Dann nehmen allerdings auch die Anzahl der Rechenschritte zu. Zur übersichtlicheren Darstellung sind die x, y-Koordinaten in Einheiten des Erdradius (= 6371 km) angegeben. Allerdings lassen sich die Zeitintervalle nicht beliebig verkleinern. Da die Computer nur mit einer endlichen Anzahl von Stellen rechnen, treten bei den tausenden Rechenoperationen Rundungsfehler auf, die zu unrealistischen Ergebnissen führen können. Unser bisheriges Beispiel ist recht harmlos, da sich die Gravitation pro Zeiteinheit nur geringfügig ändert. Hier bleibt sogar der Betrag der Beschleunigung konstant und nur die x, y-Komponenten ändern sich. Ganz anders sieht es aus, wenn man sich auf Bahnen in der Nähe von Massen bewegt, wie z. B. bei der Umrundung des Mondes in geringer Höhe.

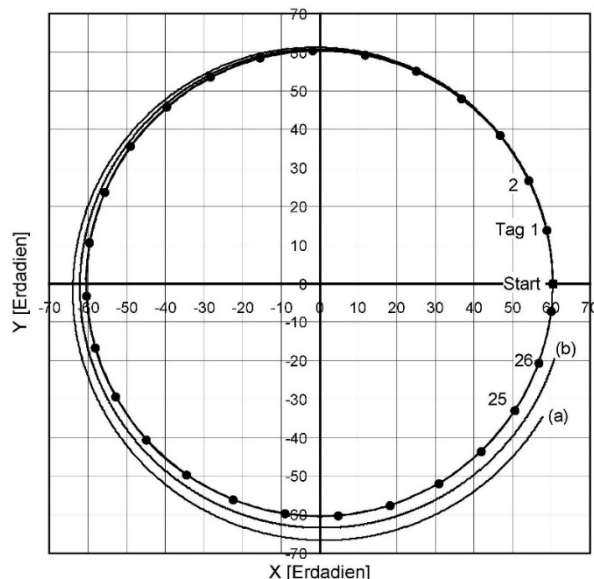


Abbildung 5: Mit dem Euler-Verfahren berechnete Bahnen einer fiktiven Sonde, die im mittleren Mondabstand um eine ungestörte Erde läuft.

Kreis = korrekte Bahn;

Bahn (a) = Zeitschritt $\Delta t = 60$ Min.;

Bahn (b) = Zeitschritt $\Delta t = 30$ Min.

Die im Halbschritt-Verfahren berechnete Bahn mit einem Zeitschritt von 480 min ist bei dieser Skalierung von der Kreisbahn nicht zu unterscheiden. © Bernd Loibl.

Das Halbschrittverfahren

Das Polygonzugverfahren von Euler ist also zu ungenau. Die Genauigkeit lässt sich aber durch eine einfache Abänderung des Algorithmus entscheidend verbessern. Die Abb. 6 zeigt das Prinzip dieser Überlegung.

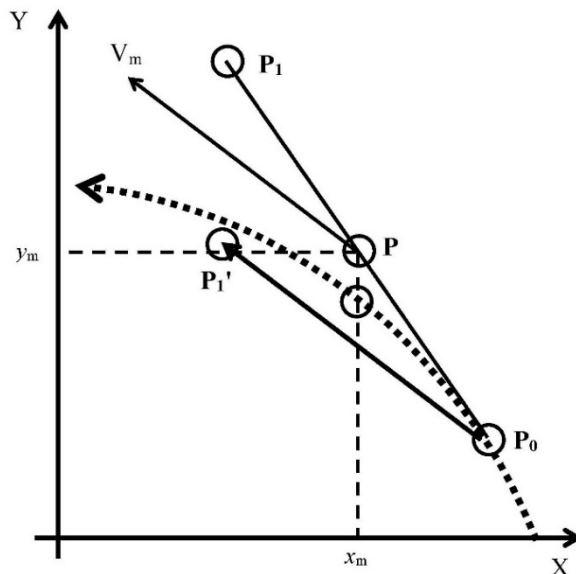


Abbildung 6: Beim Halbschrittverfahren wird der Fehler verkleinert indem die Geschwindigkeit v_m nach halbem Zeitschritt $\Delta t/2$ auf das ganze Zeitintervall angewendet wird.
© Bernd Loibl.

Die gestrichelte Kurve stellt die unbekannte Bahn dar. Beim reinen Ansatz nach Euler würden wir mit konstanter Geschwindigkeit in der Zeitspanne Δt von P_0 nach P_1 gelangen und einen deutlichen Fehler begehen. Der Fehler wird merkbar kleiner, wenn man nur um das halbe Zeitintervall $\Delta t/2$ voranschreitet und zum Punkt P gelangt. Die dortige Geschwindigkeit ist durch den Pfeil v_m bestimmt.

Diese Geschwindigkeit wendet man nun auf das gesamte Zeitintervall Δt an und landet beim Ort P_1' . Der komplette Algorithmus ist in Kasten 2 angegeben.

In unserem Beispiel erhält man eine Bahn, die im Maßstab der Abbildung 5 nicht mehr von der exakten Kreisbahn zu unterscheiden ist. Erst bei stärkerer Krümmung der Bahn aufgrund einer größeren Änderung im Gravitationsfeld zeigt sich, dass auch beim Halbschrittverfahren der Fehler noch immer zu groß ist.

KASTEN 2

Algorithmus für das Halbschrittverfahren

Startwerte:

Ort: x_0, y_0 ;

Geschwindigkeit: v_{x0}, v_{y0} ;

Beschleunigung:

$i = 0 \dots n$;

$$r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2};$$

$$a_{xi} = \frac{-G \cdot M \cdot x_i}{r_i^3};$$

$$a_{yi} = \frac{-G \cdot M \cdot y_i}{r_i^3};$$

Neuer Ort:

$i = 0 \dots n$;

$$x_{i+1} = x_i + \Delta t \cdot \left(v_{xi} + \frac{\Delta t}{2} \cdot a_{xi} \right);$$

$$y_{i+1} = y_i + \Delta t \cdot \left(v_{yi} + \frac{\Delta t}{2} \cdot a_{yi} \right);$$

Neue Geschwindigkeit:

$i = 0 \dots n$;

$$v_{xi+1} = v_{xi} - \Delta t \cdot G \cdot M \cdot \frac{\left(x_i + \frac{\Delta t}{2} v_{xi} \right)}{r_i^3};$$

$$v_{yi+1} = v_{yi} - \Delta t \cdot G \cdot M \cdot \frac{\left(y_i + \frac{\Delta t}{2} v_{yi} \right)}{r_i^3}.$$

[zurück zum Anfang](#)

Mit dem Runge-Kutta-Verfahren zum Mond

Daher hat man mathematisch wohlbegründet weitere Zwischenschritte eingefügt. Das Resultat ist der Runge-Kutta-Algorithmus für dessen Herleitung auf die Fachliteratur verwiesen wird. Die Näherung ist so gut, dass wir ihn für unseren vereinfachten Flug zum Mond sinnvoll verwenden können. In einem ersten Schritt müssen die Startwerte für Ort und Geschwindigkeit festgelegt werden und die Beschleunigungen durch die Gravitationskräfte von Erde und Mond bestimmt werden.

Den Ursprung des Koordinatensystems legen wir in den gemeinsamen Schwerpunkt S des Erde-Mond-

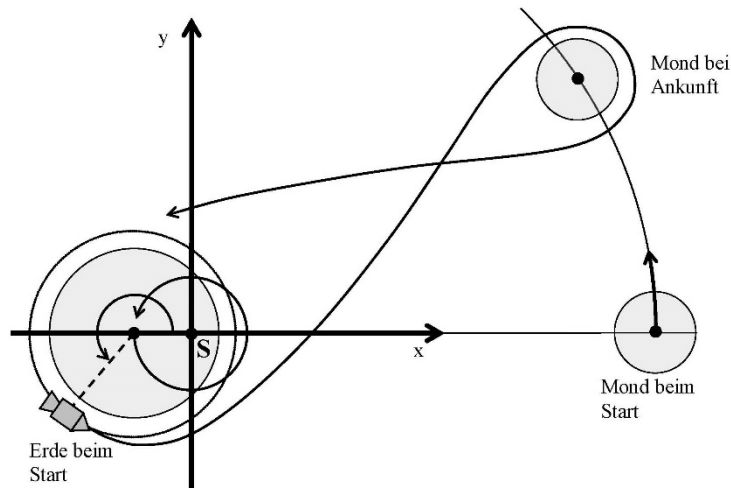


Abbildung 7: Geometrische Konfiguration einer Mondumrundung im Zustand des freien Falls. Eine ähnliche Bahn musste Apollo 13 wählen. © Bernd Loibl.

Systems (Abb. 7). Erde und Mond werden näherungsweise als Punktmassen betrachtet, die auf Kreisbahnen mit konstanter Geschwindigkeit laufen. In Anlehnung an die Apollo-Missionen soll sich unsere Mondsonde auf einem Kreisorbit um die Erde in 180 Kilometer Höhe befinden. Wir beginnen unsere Berechnungen in dem Moment, wo bei den Apollo-Missionen die Motoren der 3. Saturnstufe gezündet wurden und die Mondsonde in die translunare Bahn einschwenkt. Die Orientierung des Koordinatensystems legen wir so fest, dass die x-Achse in diesem Moment zum Mondmittelpunkt zeigt.

Bewegung von Erde und Mond um das Baryzentrum

Während die Mondsonde zum Mond fliegt, wandern Erde und Mond um den gemeinsamen Schwerpunkt. Da die Gravitationskräfte auf die Sonde von den Abständen zu Erde und Mond abhängen, müssen bei jedem Zeitschritt Δt die Positionen dieser beider Massen bestimmt werden (Abb. 8).

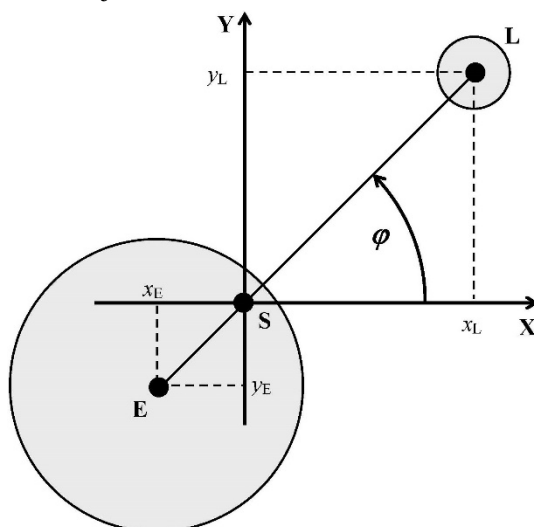


Abbildung 8: In einfacher Näherung laufen Erde und Mond auf Kreisbahnen um den gemeinsamen Schwerpunkt. Für jeden Zeitschritt Δt müssen die Positionen beider Massen bestimmt werden. © Bernd Loibl.

Die Winkelgeschwindigkeit ω beider Massen beträgt $\omega = 360^\circ/T$ [Grad pro Tag] mit der Umlaufzeit von $T = 27,322$ Tagen. Der Drehwinkel φ_i beträgt dann nach dem i -ten Zeitschritt Δt

$$\varphi_i = \omega \cdot i \cdot \Delta t. \quad (3)$$

Damit gilt dann für die Position der Erde

$$\begin{aligned} x_{Ei} &= \overline{SE} \cdot \cos(180^\circ + \varphi_i); \\ y_{Ei} &= \overline{SE} \cdot \sin(180^\circ + \varphi_i) \end{aligned} \quad (4)$$

und für die Position des Mondes

$$\begin{aligned} x_{Li} &= \overline{SL} \cdot \cos(\varphi_i); \\ y_{Li} &= \overline{SL} \cdot \sin(\varphi_i). \end{aligned} \quad (5)$$

\overline{SE} und \overline{SL} sind dabei die Mittelpunktsabstände von Erde und Mond vom Baryzentrum S.

Startort und Startgeschwindigkeit

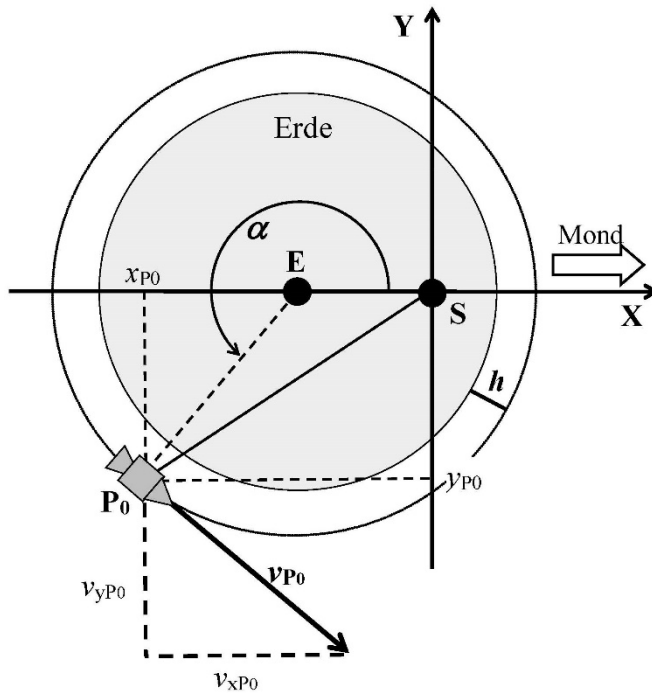


Abbildung 9: Festlegung von Startort und Startgeschwindigkeit aus dem Erdborbit. © Bernd Loibl.

Am Startort P_0 erfolgt der Einschuss der Mondsonde in die translunare Bahn. In guter Näherung wird die Erde als homogene Kugel mit einem Radius von $r_E = 6371$ km angesehen. Der Abstand \overline{SE} des Erdmittelpunkts vom Baryzentrum beträgt $\overline{SE} = 4671$ km und der Abstand \overline{SL} des Mondmittelpunkts vom Baryzentrum beträgt $\overline{SL} = 384.400$ km $-$ 4671 km $=$ 379.729 km.

Wie schon erwähnt findet die Bahnberechnung in einem Koordinatensystem x, y statt, das seinen Ursprung im Baryzentrum hat. Die x -Achse zeigt zum Startzeitpunkt zum Mond. Die Koordinaten x_{P_0} und y_{P_0} des Startorts der Mondsonde ergeben sich aus der Geometrie der Abb. 9 zu

$$\begin{aligned} x_{P_0} &= \cos(\alpha) \cdot (r_E + h) - \overline{SE}; \\ y_{P_0} &= \sin(\alpha) \cdot (r_E + h). \end{aligned}$$

Ebenso findet man für die Startgeschwindigkeiten v_{xP_0}, v_{yP_0}

$$\begin{aligned} v_{xP_0} &= -v_{P_0} \cdot \sin(\alpha); \\ v_{yP_0} &= v_{P_0} \cdot \cos(\alpha). \end{aligned} \quad (6)$$

Die Beschleunigung der Mondsonde

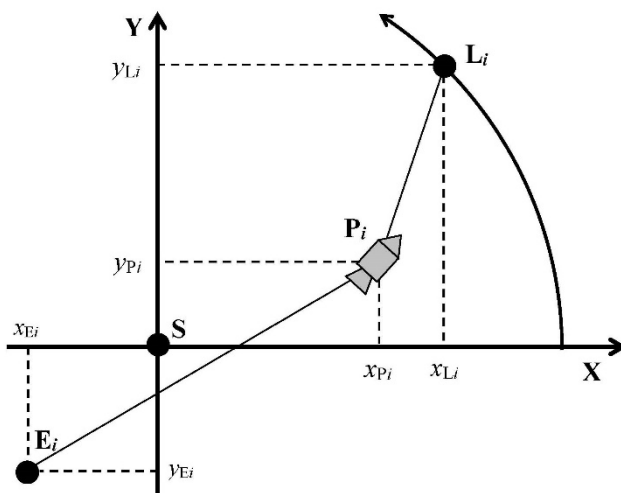


Abbildung 10: Während des Fluges der Mondsonde ändert sich ihr Abstand von den Mittelpunkten der Erde E und Mond M kontinuierlich. Für jeden Zeitschritt müssen daher die Beschleunigungen neu bestimmt werden. © Bernd Loibl.

Nach jedem Zeitschritt haben sich die Positionen von Erde, Mond und Mondsonde geändert. Daher muss auch jedes Mal die Beschleunigung der Mondsonde durch Erde und Mond neu ermittelt werden.

Auf dem Weg zum Mond gelten für die Abstände der Raumsonde zur Erde d_{Ei} und zum Mond d_{Li} für den i -ten Zeitschritt

$$\begin{aligned} d_{Ei} &= \sqrt{(x_{Pi} - x_{Ei})^2 + (y_{Pi} - y_{Ei})^2}; \\ d_{Li} &= \sqrt{(x_{Li} - x_{Pi})^2 + (y_{Li} - y_{Pi})^2}. \end{aligned}$$

Die Gravitationsparameter G_E und G_L von Erde und Mond betragen $G_E = 398.600,44$ km^3/s^2 und $G_L = 4902,87$ km^3/s^2 .

[zurück zum Anfang](#)

Damit und mit den Abstandswerten d_{Ei} und d_{Li} ergeben sich die Beschleunigungen a_{xEi} , a_{yEi} , die die Mondsonde durch die Erde erfährt zu

$$a_{xEi} = \frac{-G_E \cdot (x_{Pi} - x_{Ei})}{d_{Ei}^3}; \quad a_{yEi} = \frac{-G_E \cdot (y_{Pi} - y_{Ei})}{d_{Ei}^3}.$$

und die Beschleunigungen a_{xLi} , a_{yLi} , die die Mondsonde durch den Mond erfährt zu

$$a_{xLi} = \frac{-G_L \cdot (x_{Pi} - x_{Li})}{d_{Li}^3}; \quad a_{yLi} = \frac{-G_L \cdot (y_{Pi} - y_{Li})}{d_{Li}^3}$$

Beide Beschleunigungen addieren sich, so dass für die Beschleunigungen a_{xPi} und a_{yPi} der Mondsonde gilt

$$a_{xPi} = \frac{-G_E \cdot (x_{Pi} - x_{Ei})}{d_{Ei}^3} - \frac{G_L \cdot (x_{Pi} - x_{Li})}{d_{Li}^3}; \quad a_{yPi} = \frac{-G_E \cdot (y_{Pi} - y_{Ei})}{d_{Ei}^3} - \frac{G_L \cdot (y_{Pi} - y_{Li})}{d_{Li}^3}.$$

Berechnung der Bahn der Mondsonde

Die Rechnungen beginnen mit dem Einschuss der Mondsonde in die translunare Bahn. Das ist dann auch der Nullpunkt unserer Zeitrechnung. Gerechnet wird in den Einheiten Kilometer und Sekunde. Für den Start gilt also $i = 0$ und $t = 0$ Sekunden. Für das Zeitintervall Δt nehmen wir einen Wert von $\Delta t = 16$ Sekunden an.

Zunächst gilt es die Anfangswerte beim Start festzulegen.

Die Positionen von Erde und Mond ergeben sich aus den Gleichungen (3), (4) und (5)

$$x_{E0} = -\overline{SE} = -4671 \text{ km};$$

$$y_{E0} = 0;$$

$$x_{L0} = \overline{SL} = 379.729 \text{ km};$$

$$y_{L0} = 0.$$

Wie aus Abb. 9 ersichtlich ist wird der Startort x_0, y_0 an dem der Einschuss in die translunare Bahn erfolgt durch den Winkel α festgelegt. Da der Mond bei einer vorgesehenen Reisezeit von 3 Tagen um rund 40 Grad weiterwandert, sollte der Startwinkel α bei ca. $180^\circ + 40^\circ = 220^\circ$ liegen. Ein vernünftiger Wert für die Startgeschwindigkeit lässt sich folgendermaßen abschätzen. Die im Erdorbit kreisende Mondsonde besitzt schon eine Kreisbahngeschwindigkeit von 7,8 km/s. Um den Mond zu erreichen, ist etwas weniger als die Fluchtgeschwindigkeit von 11,2 km/s notwendig. Bei einem angenommenen Wert von 10,9 km/s, muss der Raketenmotor daher die Geschwindigkeit um rund 3,1 km/s erhöhen. Wie sich der Betrag der Startgeschwindigkeit auf die beiden Komponenten v_{x0}, v_{y0} aufteilt zeigen die beiden Gleichungen (6). Es sei noch einmal betont, dass der Abschuss tangential zur Kreisbahn erfolgen muss. Mit diesen Anfangswerten können wir nun für den nächsten Schritt $i = 1$ und den nächsten Zeitpunkt $t = i \cdot \Delta t$ die neuen Positionen von Erde und Mond bestimmen. Mit Hilfe des Runge-Kutta-Algorithmus werden der neue Ort und die neue Geschwindigkeit der Mondsonde berechnet. Für den i -ten Schritt ist der Algorithmus in Kasten 3 ausführlich beschrieben.

Mit einem Tabellenkalkulationsprogramm lassen sich die Rechenschritte leicht verarbeiten und die Ergebnisse durch die implizierte Diagrammfunktion unmittelbar visualisieren. Bei Kenntnissen der Makrosprache von Excel ist es von Vorteil, ein entsprechendes Makro zu schreiben.

Wer im Programmieren geübt ist, erkennt leicht, dass man den Programmcode durch eine Subroutine optimieren kann, in der z. B. die Beschleunigungen bei jedem Rechenschritt berechnet werden. Bei einem 6-tägigen Flug zum Mond und zurück wird der Algorithmus 34560-mal durchlaufen. Die zeitgemäßen Computer erledigen das innerhalb einer Sekunde. Für die Eintragung der Ergebnisse in die Tabellenzellen benötigt das Tabellenkalkulationsprogramm allerdings viel Zeit, so dass schnell einige Sekunden zusammenkommen. Es ist daher sinnvoll durch Abfragen während der Rechnungen nur etwa jedes zwanzigste Ergebnis für Ort und Geschwindigkeit ausgeben zu lassen. Dadurch erhält man ca. 1700 Daten, die für die grafische Darstellung völlig ausreichend sind.

KASTEN 3 Runge-Kutta-Algorithmus

Gegeben:

Ort und Geschwindigkeit des i -ten Zeitschritts: x_{Pi} , y_{Pi} , v_{xPi} , v_{yPi} mit $\Delta t_2 = \Delta t / 2$

Berechnung von Ort und Geschwindigkeit des ($i+1$)-ten Zeitschritts
1. Rechenschritt:

$$x_x = x_{Pi}; \quad y_y = y_{Pi}$$

$$k_{1x} = v_{xPi}; \quad k_{1y} = v_{yPi}$$

Beschleunigung:

$$d_{Ei} = \sqrt{(x_x - x_{Ei})^2 + (y_y - y_{Ei})^2}; \quad d_{Li} = \sqrt{(x_{Li} - x_x)^2 + (y_{Li} - y_y)^2}$$

$$k_{1vx} = \frac{-G_E \cdot (x_x - x_{Ei})}{d_{Ei}^3} - \frac{G_L \cdot (x_x - x_{Li})}{d_{Li}^3}; \quad k_{1vy} = \frac{-G_E \cdot (y_y - y_{Ei})}{d_{Ei}^3} - \frac{G_L \cdot (y_y - y_{Li})}{d_{Li}^3}$$

2. Rechenschritt:

$$x_x = x_{Pi} + \Delta t_2 \cdot k_{1x}; \quad y_y = y_{Pi} + \Delta t_2 \cdot k_{1y}$$

$$k_{2x} = v_{xPi} + \Delta t_2 \cdot k_{1vx}; \quad k_{2y} = v_{yPi} + \Delta t_2 \cdot k_{1vy}$$

Beschleunigung:

$$d_{Ei} = \sqrt{(x_x - x_{Ei})^2 + (y_y - y_{Ei})^2}; \quad d_{Li} = \sqrt{(x_{Li} - x_x)^2 + (y_{Li} - y_y)^2}$$

$$k_{2vx} = \frac{-G_E \cdot (x_x - x_{Ei})}{d_{Ei}^3} - \frac{G_L \cdot (x_x - x_{Li})}{d_{Li}^3}; \quad k_{2vy} = \frac{-G_E \cdot (y_y - y_{Ei})}{d_{Ei}^3} - \frac{G_L \cdot (y_y - y_{Li})}{d_{Li}^3}$$

3. Rechenschritt:

$$x_x = x_{Pi} + \Delta t_2 \cdot k_{2x}; \quad y_y = y_{Pi} + \Delta t_2 \cdot k_{2y}$$

$$k_{3x} = v_{xPi} + \Delta t_2 \cdot k_{2vx}; \quad k_{3y} = v_{yPi} + \Delta t_2 \cdot k_{2vy}$$

Beschleunigung:

$$d_{Ei} = \sqrt{(x_x - x_{Ei})^2 + (y_y - y_{Ei})^2}; \quad d_{Li} = \sqrt{(x_{Li} - x_x)^2 + (y_{Li} - y_y)^2}$$

$$k_{3vx} = \frac{-G_E \cdot (x_x - x_{Ei})}{d_{Ei}^3} - \frac{G_L \cdot (x_x - x_{Li})}{d_{Li}^3}; \quad k_{3vy} = \frac{-G_E \cdot (y_y - y_{Ei})}{d_{Ei}^3} - \frac{G_L \cdot (y_y - y_{Li})}{d_{Li}^3}$$

4. Rechenschritt:

$$x_x = x_{Pi} + \Delta t \cdot k_{3x}; \quad y_y = y_{Pi} + \Delta t \cdot k_{3y}$$

$$k_{4x} = v_{xPi} + \Delta t \cdot k_{3vx}; \quad k_{4y} = v_{yPi} + \Delta t \cdot k_{3vy}$$

Beschleunigung:

$$d_{Ei} = \sqrt{(x_x - x_{Ei})^2 + (y_y - y_{Ei})^2}; \quad d_{Li} = \sqrt{(x_{Li} - x_x)^2 + (y_{Li} - y_y)^2}$$

$$k_{4vx} = \frac{-G_E \cdot (x_x - x_{Ei})}{d_{Ei}^3} - \frac{G_L \cdot (x_x - x_{Li})}{d_{Li}^3}; \quad k_{4vy} = \frac{-G_E \cdot (y_y - y_{Ei})}{d_{Ei}^3} - \frac{G_L \cdot (y_y - y_{Li})}{d_{Li}^3}$$

5. Rechenschritt:

$$x_{Pi+1} = x_{Pi} + \Delta t \cdot (k_{1x} + 2 \cdot k_{2x} + 2 \cdot k_{3x} + k_{4x}) / 6$$

$$y_{Pi+1} = y_{Pi} + \Delta t \cdot (k_{1y} + 2 \cdot k_{2y} + 2 \cdot k_{3y} + k_{4y}) / 6$$

$$v_{xPi+1} = v_{xPi} + \Delta t \cdot (k_{1vx} + 2 \cdot k_{2vx} + 2 \cdot k_{3vx} + k_{4vx}) / 6$$

$$v_{yPi+1} = v_{yPi} + \Delta t \cdot (k_{1vy} + 2 \cdot k_{2vy} + 2 \cdot k_{3vy} + k_{4vy}) / 6$$

[zurück zum Anfang](#)

Ergebnisse

Die Bahn der Mondsonde wird also nur durch zwei Startparameter festgelegt, nämlich durch den Startwinkel α und durch die Startgeschwindigkeit v_{p0} .

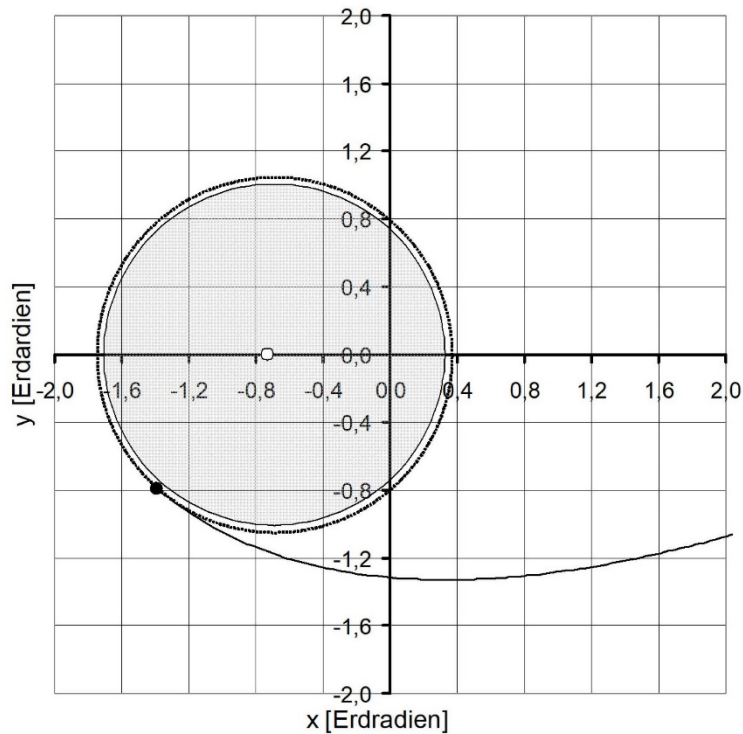


Abbildung 11: Einschuss in die translunare Bahn aus einem Erdrorbit in 180 km Höhe. © Bernd Loibl.

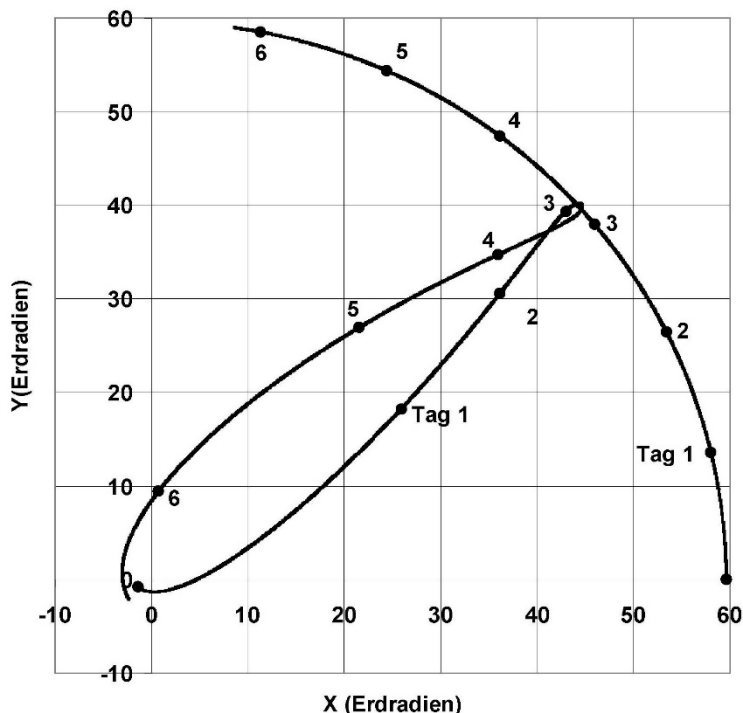


Abbildung 12: Die Bahn der Mondsonde wird allein durch die Gravitation von Erde und Mond bestimmt. Sie befindet sich im Zustand des freien Falls. © Bernd Loibl.

Durch Variieren der beiden Parameter lassen sich leicht Bahnen finden, auf der die Mondsonde in rund drei Tagen zum Mond fliegt, ihn umrundet und wieder zur Erde zurückkehrt. Dabei zeigt sich, dass man durchaus die Reisezeit verkürzen kann, dafür aber eine größere Startgeschwindigkeit benötigt, also mehr Energie aufwenden muss. In jedem Fall findet der Flug im Zustand des freien Falls statt, da die Gravitation von Erde und Mond die einzige Kraft ist, die auf die Sonde einwirkt. Apollo 13 musste nach der Explosion im Servicemodul notgedrungen eine ähnliche Bahn wählen.

In der hier gezeigten Variante erfolgte der Start bei einem Winkel von $\alpha = 230,0^\circ$ und einem Geschwindigkeitsbetrag von $v_{p0} = 3,1622$ km/s. Der Startort in Erdradien lag bei $x_0 = -1,394$, $y_0 = -0,788$ und die Geschwindigkeitskomponenten in km/s betragen $v_{x0} = 8,398$, $v_{y0} = -7,047$.

Der Runge-Kutta-Algorithmus wurde bei einer Schrittweite von 30 Sekunden und einer gesamten Reisezeit von 6,2 Tagen 17856-mal durchlaufen, wobei nur jeder 20. Wert in die Tabellenzellen ausgegeben und für die grafische Darstellung verwendet wurde.

Es ist bemerkenswert, dass schon nach einem Tag die Hälfte des Hinflugs bewältigt wurde. Die Geschwindigkeit nimmt innerhalb des ersten Tages rasch ab von rund 10,9 km/s auf 1,6 km/s. Für die zweite Hälfte des Hinflugs wird rund die doppelte Zeit benötigt. Bis zum Einfang durch den Mond nimmt die Geschwindigkeit nur noch geringfügig ab.

[zurück zum Anfang](#)

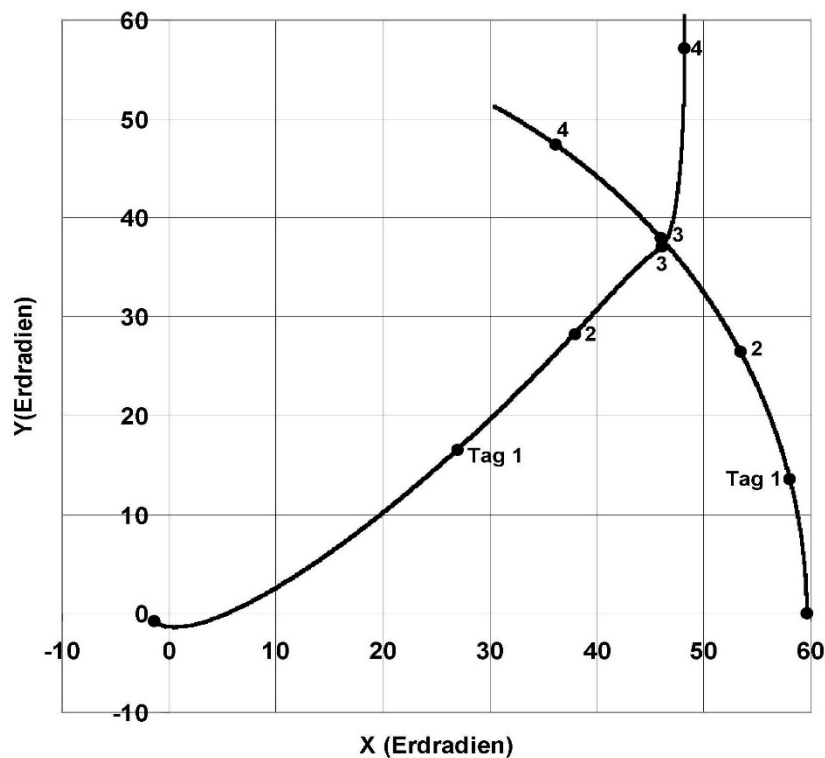


Abbildung 13: Bahn einer Sonde, die nach dem Eintreffen des Mondes die Mondbahn kreuzt und durch den Swing-By-Effekt Energie gewinnt.
© Bernd Loibl.

Aus den Rechnungen geht klar hervor, dass die Raumsonde die Mondbahn kurz vor dem Eintreffen des Mondes kreuzen muss. Die Mondgravitation führt die Sonde um den Mond herum, so dass von der Erde aus gesehen genau hinter dem Mond die Geschwindigkeitsrichtungen von Mond und Sonde genau entgegengesetzt gerichtet sind.

Wählt man die beiden Startparameter so, dass die Mondsonde die Mondbahn kurz nach der Mondpassage kreuzt, so reißt die Mondgravitation die Mondsonde in Flugrichtung mit – Bahnenergie des Mondes wird in positivem Sinne auf die Bahn der Sonde übertragen. Diese Eigenschaft wird als **Swing-by** oder **Gravity-Assist** bezeichnet und häufig

in der interplanetaren Raumfahrt gezielt ausgenutzt, um Treibstoff zu sparen. Bei der in Abb. 13 gerechneten Bahn erfolgte der Einschuss in die translunare Bahn mit einem Startwinkel von $227,0^\circ$ und einer Startgeschwindigkeit von $3,1622 \text{ km/s}$. Die Zunahme an Bahngeschwindigkeit der Mondsonde zeigt sich in dem vergrößerten Abstand zwischen dem 3. und 4. Tag. Danach verringert sich die Geschwindigkeit der Sonde und sie fällt zunächst langsam beschleunigt wieder in Richtung Erde.

Einschwenken in den Mondorbit

Der Runge-Kutta-Algorithmus bietet nicht nur einen kompletten Flug um den Mond im freien Fall, sondern erlaubt auch das Einschwenken in einen Mondorbit. Nach jedem Zeitschritt wird dazu im Rechengang die Distanz der Sonde vom Mond abgefragt und zum Zeitpunkt des minimalen Abstands die Bahngeschwindigkeit herabgesetzt. Bei der Bahn mit den Startparametern $\alpha = 230^\circ$ und $v_P = 1,622 \text{ km/s}$ betrug der minimale Mondabstand $1,436$ Mondradien nach einer Flugzeit von $76,3$ Stunden. Eine Reduktion der Geschwindigkeit um 70% führte zu der in Abb. 14. rechts gezeigten annähernd kreisförmigen Bahn um den Mond. Die ungebremste Bahn ist gestrichelt dargestellt.

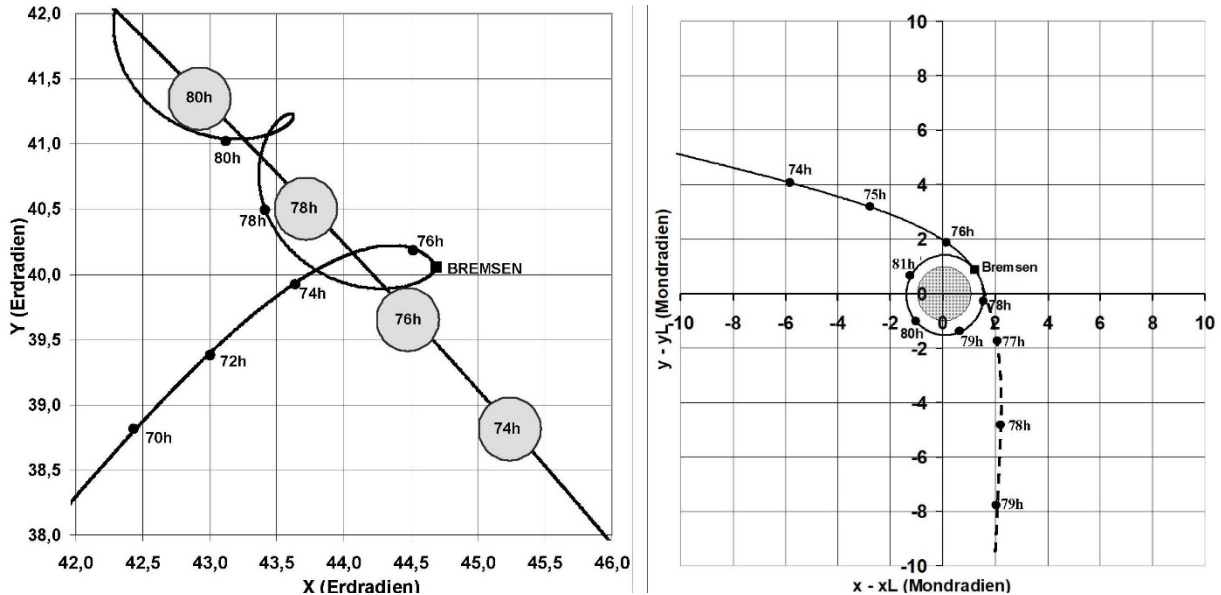
[zurück zum Anfang](#)


Abbildung 14: Durch bremsen im mondächsten Punkt der Sondenbahn lässt sich ein Einschwenken in einen lunaren Orbit herbeiführen. In diesem Beispiel wurde die Bahngeschwindigkeit nach einer Flugzeit von 76,3 Stunden um 70 % reduziert. Linkes Bild: Darstellung im baryzentrischen System und rechtes Bild: Darstellung im mondmitgeführten, aber nicht rotierten System. © Bernd Loibl.

Im rechten Teil von Abb. 14 sind die Differenzen der Koordinaten von Sonde und Mond dargestellt, die bei jedem Schritt der Rechnung ermittelt werden. Die in Kilometern erhaltenen Ergebnisse sind hier der Übersichtlichkeit halber in Einheiten des Mondradius angegeben. Der Ursprung des verwendeten Koordinatensystems liegt im Mond und wird zeitlich mitgeführt. Allerdings wird dabei eine Rotation des Koordinatensystems nicht durchgeführt. Denn dann treten Scheinkräfte wie die Flieh- und Corioliskraft auf, die im Rechenprogramm aufwendig berücksichtigt werden müssten.

Im ursprünglichen Koordinatensystem, dessen Nullpunkt ja im Schwerpunkt des Erde-Mond-Systems liegt, wird deutlich wie der Mond die abgebremste Sonde mitnimmt. So entsteht die auf Abb. 14 dargestellte schlaufenförmige Bahn. Aus den Stundenmarkierungen lässt sich eine Umlaufzeit von rund vier Stunden ablesen. Durch Feinjustierungen an den Startparametern, dem Bremszeitpunkt und der Größe der Geschwindigkeitsabnahme lassen sich weitere Orbit-Varianten realisieren.

Mit dem vorgestellten Runge-Kutta-Algorithmus lassen sich nicht nur Bahnen im Erde-Mond-System berechnen. Auch interplanetare Raumfahrt lässt sich damit rechnerisch betreiben und auch Positionen von Planeten bestimmen. Abschließend soll als ein Beispiel die Bewegung der Sonne in den Jahren von 1945 bis 1995 als Folge des gravitativen Einflusses aller Planeten berechnet werden. Die Bahngeschwindigkeiten aller Planeten sind nicht allzu groß und ihre Bahnen weichen nur wenig von einem Kreis ab.

Daher reicht für jeden Zeitschritt eine Größe von $\Delta t = 1$ Tag. Nach jedem Tag nehmen Sonne und Planeten neue Positionen ein und haben geänderte Abstände zueinander. Das heißt, dass bei jedem Zeitschritt andere Gravitationskräfte und andere Beschleunigungen wirken. Auch wenn man sich wie in unserem Beispiel nur für die Sonne interessiert, muss der Zustand des gesamten Planetensystems bei jedem Zeitschritt neu bestimmt werden. Da sich die Beschleunigungen aufaddieren, erhält man schematisch für jede der neun Massen von der Sonne bis zum Neptun:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}_{\text{So}} &= \mathbf{a}_{\text{Me}} + \mathbf{a}_{\text{Ve}} + \mathbf{a}_{\text{Er}} + \mathbf{a}_{\text{Ma}} + \mathbf{a}_{\text{Ju}} + \mathbf{a}_{\text{Sa}} + \mathbf{a}_{\text{Ur}} + \mathbf{a}_{\text{Ne}} \\
 &\quad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \\
 \mathbf{a}_{\text{Ju}} &= \mathbf{a}_{\text{So}} + \mathbf{a}_{\text{Me}} + \mathbf{a}_{\text{Ve}} + \mathbf{a}_{\text{Er}} + \mathbf{a}_{\text{Ma}} + \mathbf{a}_{\text{Sa}} + \mathbf{a}_{\text{Ur}} + \mathbf{a}_{\text{Ne}} \\
 &\quad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \\
 \mathbf{a}_{\text{Ne}} &= \mathbf{a}_{\text{So}} + \mathbf{a}_{\text{Me}} + \mathbf{a}_{\text{Ve}} + \mathbf{a}_{\text{Er}} + \mathbf{a}_{\text{Ma}} + \mathbf{a}_{\text{Ju}} + \mathbf{a}_{\text{Sa}} + \mathbf{a}_{\text{Ur}}
 \end{aligned}$$

[zurück zum Anfang](#)

Die Beschleunigung der Sonne a_{So} wird also durch die Beschleunigungen aller Planeten von Merkur bis Neptun bestimmt. Die des Jupiters a_{Ju} zum Beispiel erhält man durch Addition der Beschleunigungen der Sonne und aller anderen sieben Planeten. Ausgeschrieben für die x-Koordinate des Jupiters ergibt sich also

$$a_{Ju} = \frac{G_{So} \cdot (x_{So} - x_{Ju})}{r_{SoJu}^3} + \dots + \frac{G_{Ne} \cdot (x_{Ne} - x_{Ju})}{r_{NeJu}^3},$$

wobei G_{So} und G_{Ne} die Gravitationsparameter für die Sonne und den Neptun bedeuten, x_{So} , x_{Ju} , x_{Ne} die x-Koordinaten von Sonne, Jupiter und Neptun sind und r_{SoJu} und r_{NeJu} die Abstände von Sonne zu Jupiter und Neptun zu Jupiter darstellen. Es ist also beim Ausführen des Algorithmus nicht grundsätzlich Neues hinzugekommen. Lediglich müssen die Beschleunigungen angepasst werden und damit ein bisschen mehr Programmierarbeit geleistet werden.

Entscheidend ist, dass man exakte Anfangswerte für Ort und Geschwindigkeit von der Sonne und aller acht Planeten verwendet. Die erhält man von der NASA-Website <http://ssd.jpl.nasa.gov/horizons.cgi>.

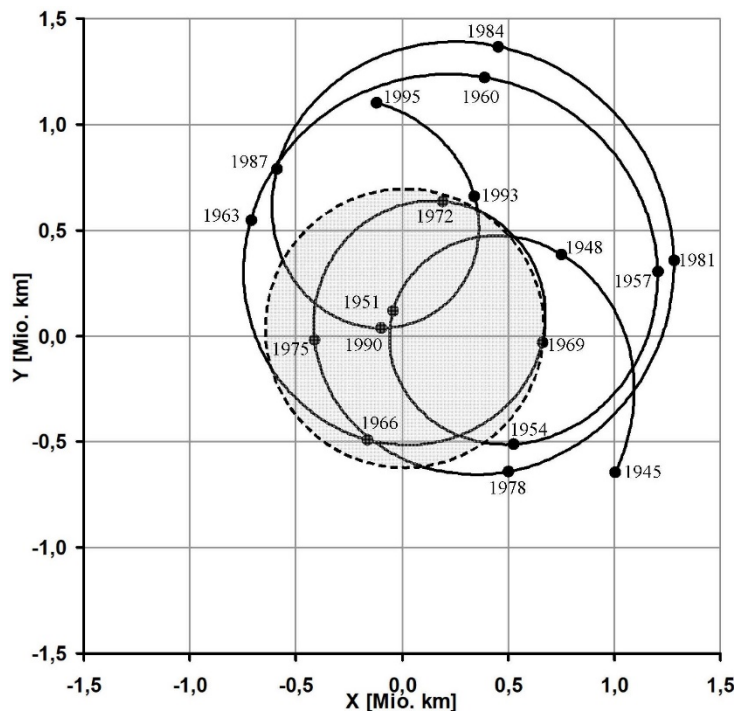


Abbildung 15: Die Bahn des Sonnenmittelpunkts von 1945 bis 1995. Alle drei Jahre ist die Position des Sonnenmittelpunkts für den 1. Januar angegeben. Die grau unterlegte Kreisfläche zeigt die Größe der Sonne an. © Bernd Loibl.

Ebenso entnimmt man dort die Werte für die neun Gravitationsparameter und rechnet vorzugshalber mit den Einheiten AE (=Astronomische Einheit) und d (=Tag). Für die Sonne gilt beispielsweise als Startwerte:

$$\begin{aligned} x_0 &= 0,00671824303304728 \text{ AE}; \\ y_0 &= -0,00429622237706327 \text{ AE}; \\ z_0 &= -0,00011708909836244 \text{ AE}; \\ v_{x0} &= 0,00000349266974378 \text{ AE/d}; \\ v_{y0} &= 0,00000702457895034 \text{ AE/d}; \\ v_{z0} &= -0,00000014086536826 \text{ AE/d}. \end{aligned}$$

Die Werte beziehen sich auf das Baryzentrum des Sonnensystems. Die x-Achse zeigt in Richtung zum Frühlingspunkt.

Der hier verwendete Runge-Kutta-Algorithmus ist von recht einfacher Natur, dafür aber übersichtlich und leicht in Programmiersprachen umzusetzen. Er ist jedoch eine recht gute Näherung für unsere Zwecke und liefert realistische Ergebnisse. Für höhere Ansprüche an Genauigkeit

gibt es allerdings deutlich bessere Verfahren. Darüber hinaus optimieren diese Algorithmen die Größe des Zeitintervalls automatisch. Beispielsweise kann jeder Rechenschritt mit halber oder doppelter Schrittweite erneut gerechnet werden. Übersteigt dabei der neue Wert für Ort und Geschwindigkeit einen vorgegeben Fehlerwert, so wird mit halber Schrittweite weitergerechnet. Bleiben die neuen Werte deutlich unterhalb des Fehlers kann das Zeitintervall heraufgesetzt werden.

Das Ziel ist dabei eine möglichst geringe Zahl arithmetischer Operationen durchzuführen, denn jedes Mal treten durch Abrundungen im PC Fehler auf, die im schlimmsten Fall zu unbrauchbaren Ergebnissen führen.

Trotz begrenzter Genauigkeiten bietet unser Runge-Kutta-Algorithmus die Möglichkeit erste realistische Einblicke in die Berechnungen interplanetarer Bahnen zu gewinnen.

ANHANG

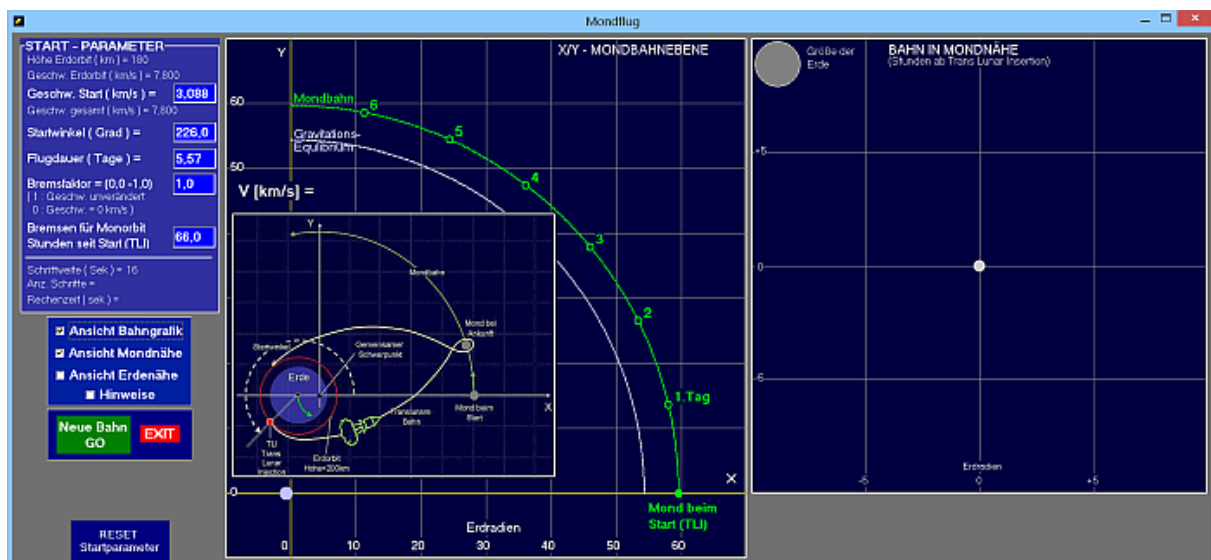
Windows-Programm zur Simulation eines Fluges zum Mond

Das anhängende vom Autor entwickelte **Computerprogramm** „Mondflug_1.1.1“ (Version vom 22.3.2020, Delphi-Code) basiert auf dem von ihm vorgestellten Algorithmus zur Simulation eines Fluges zum Mond. Nach Eingabe von Startgeschwindigkeit und Startwinkel wird eine grafische Ausgabe der daraus resultierenden Bahn erzeugt.

Der Autor empfiehlt die Betrachtung von Fällen, in denen das Raumschiff zu früh oder zu spät die Mondbahn kreuzt (Swing by) bzw. sich mit zu großer oder zu kleiner Geschwindigkeit dem Mond nähert. Ein Ziel der Simulation soll sein, den Mond so anzusteuern, dass man in einen möglichst engen Mondorbit gelangt.



Voreingestellt sind schon "vernünftige" Parameterwerte vorgegeben, die man aber selbst verändern kann. Beim Bremsvorgang hinter dem Mond bedeutet der Wert „1“ ungebremst. Bei „0“ werden die tangentialen Geschwindigkeitskomponenten auf 0 gesetzt.



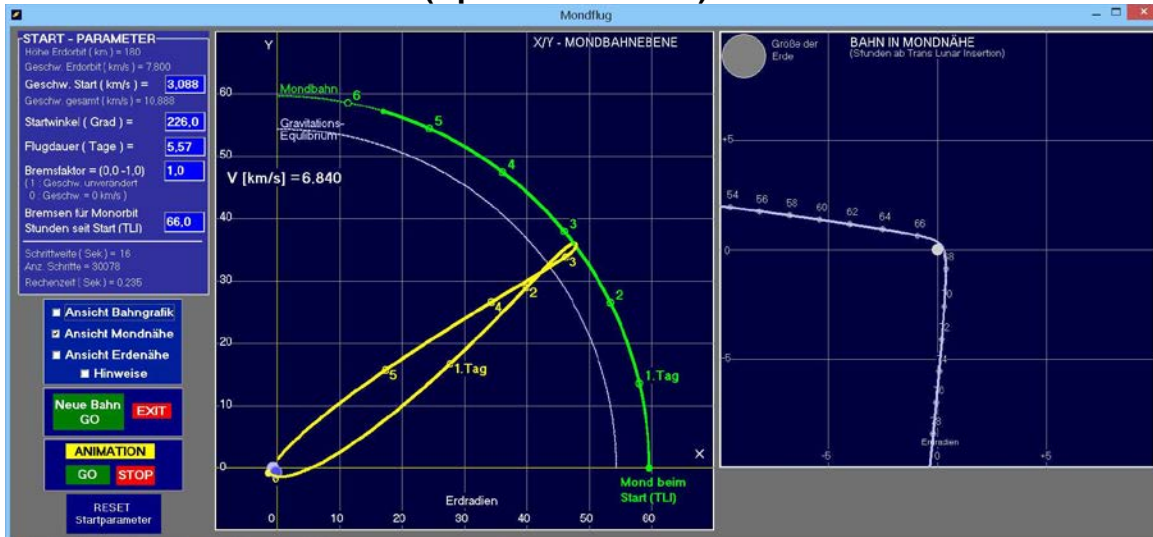
Bildschirmansicht des Computerprogramms „Mondflug ...“ zur Simulation eines Fluges zum Mond. © Bernd Loibl.

Unter dem Link <https://c.web.de/@309238472319697300/ITcJNYoKRrK2xIZZ8Kfopw> können problemlos weitere Updates des Programms aus der Cloud geladen werden.

[zurück zum Anfang](#)

Startparameter für drei Beispielszenarien

Freier Fall mit Erdrückkehr (Apollo 13 ähnlich)



Abbremsung für Mondorbit



„Swing By“ oder auch „slingshot“ (Energieanzapfung)

