

Die differentielle Rotation der Sonne selbst bestimmen

In Bezug auf „Sonne aktuell“ in der Rubrik „Aktuelles am Himmel: Sonnensystem“ in der Zeitschrift „Sterne und Weltraum“ 12/2020, WIS-ID: 1571282, Zielgruppe: Mittelstufe bis Oberstufe

Olaf Fischer

Etwa alle 11 Jahre erreicht der Fleckenzzyklus der Sonne sein Maximum (das nächste Mal voraussichtlich im Sommer 2025) und der Fernrohrblick der Sonnenscheibe (nach entsprechender Reduzierung der Lichtmenge) wird aufregender (der Unterschied zur ruhigen und blanken Sonnenscheibe ist vergleichbar mit dem Unterschied zwischen einer völlig ruhigen und einer vom Sturm aufgepeitschten Meeresoberfläche). Vor allem die Sonnenflecken sind es, die diesen Unterschied ausmachen. Von Tag zu Tag verschieben sich die Positionen der Flecke merklich. Ursache ist die Rotation der Sonne, die wegen ihres Gas-/Plasmakörpers in Abhängigkeit vom solaren Breitengrad verschieden schnell verläuft.

Im vorliegenden WIS-Beitrag wird ein einfacher Versuch zur Bestimmung der differentiellen Rotation der Sonne vorgestellt, der auf Bilddaten des HMI-Instruments der Sonde ‚Solar Dynamic Observatory‘ (SDO) und den Ergebnissen von Bachelorarbeiten zu diesem Thema [1], [2] beruht.

Übersicht der Bezüge im WIS-Beitrag		
Astronomie	Sterne, Positionsastronomie, Geschichte der Astronomie, Astropraxis	Sonne: Rotationsachse und Äquator , Rotation der Sonne , Sonnenfleck , Geschichte der Sonnenfleckenforschung , SDO/HMI-Daten , synodischer und siderischer Umlauf , heliografische Koordinaten
Fächer- verknüpfung	Astro-Geo, Astro-Ma, Astro-Info / IMP	Längen- und Breitenwinkel , sphärisches Koordinatensystem , Bilddaten der Sonne online abrufen , Bilddaten am Bildschirm ablesen , Bildschirm- lupe anwenden
Physik	Mechanik, Praxis	Rotation, differentielle Rotation , Winkelgeschwindigkeit , absoluter und relativer Fehler (neuer Name: Abweichung)
Lehre allgemein	Kompetenzen (Erkenntnis- gewinnung), Lehrformen, Unterrichtsmittel	Ablesen von Koordinatenwinkeln , Einschätzen von Fehlern , Berechnungen durchführen , Ergebnisse grafisch darstellen , Praktikumsversuch , Schülerprojekt , Gruppenarbeit , Arbeitsblatt , Sonnenbilder mit Flecken

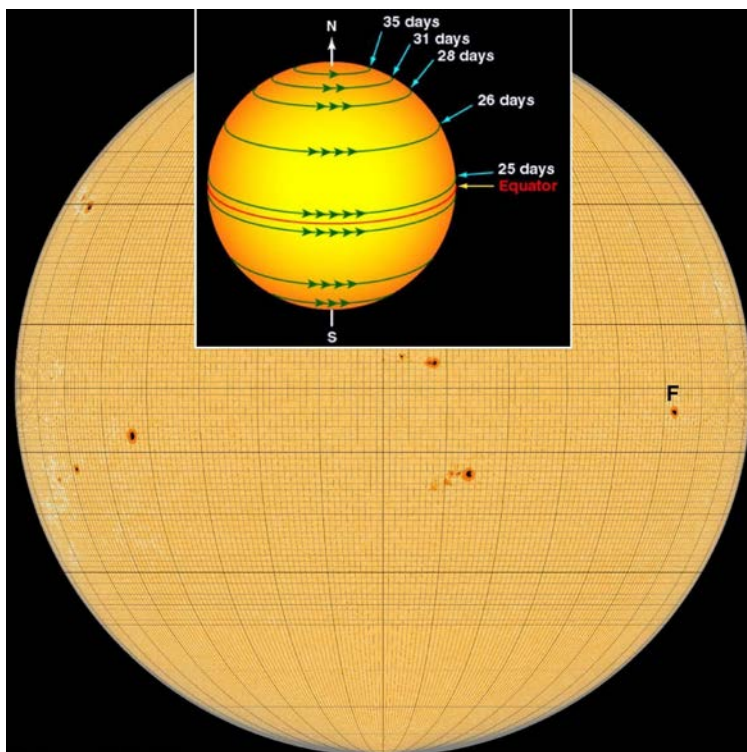


Abbildung 1: „Eingeebnetes“ und eingefärbtes Weißlichtbild der Sonne, aufgenommen am 12. Dezember 2014, 0 Uhr TAI durch die Sonde ‚Solar Dynamics Observatory‘ (SDO) mittels des Instruments Helioseismic and Magnetic Imager (HMI).

Derartige HMI-Bilder der Sonne sind seit dem 1. Mai 2010 im Viertelstundentakt erhältlich. Die „Einebnung“ des Bildes dient der Eliminierung der Randverdunklung und vereinfacht dadurch die Auswertung von Sonnenflecken.

Dem Sonnenbild überlagert wurde ein selbst programmiertes heliografisches Koordinatengitter mit Linien im 1°-Abstand für die heliografische Länge und auch für die heliografische Breite im Bereich -40° bis $+40^\circ$ (Datei mit Koordinatengitter im Anhang extra abrufbar).

© NASA, Sonnendaten: <http://hmi.stanford.edu/data/hmiimage.html>, Bildgröße 4096 × 4096 Pixel. Koordinatengitter: O. Fischer / HdA.

Grundlagen

Der Anblick der rotierenden Sonne von der Erde aus

Da die Rotationsachse der Sonne um $7,25^\circ$ in Bezug zur Ekliptikebene geneigt ist, kann man im Laufe eines Jahres auch schräg auf die Pole der Sonne sehen. Bei der Bestimmung der heliografischen Koordinaten muss man die Verkippung des heliografischen sphärischen Koordinatensystems beachten, d. h., die Lage von **Sonnenachse und Sonnenäquator** variiert im Laufe eines Jahres (siehe Abb. 2).

Da auch die Erdachse zur Ekliptikebene geneigt ist (gegenwärtig $23,44^\circ$), verändert sich der Anblick von Sonnenachse und Sonnenäquator im praktikablen nach den Himmelsrichtungen orientierten Bezugssystem im Laufe eines Jahres dann wie es in Abb. 3 dargestellt ist.

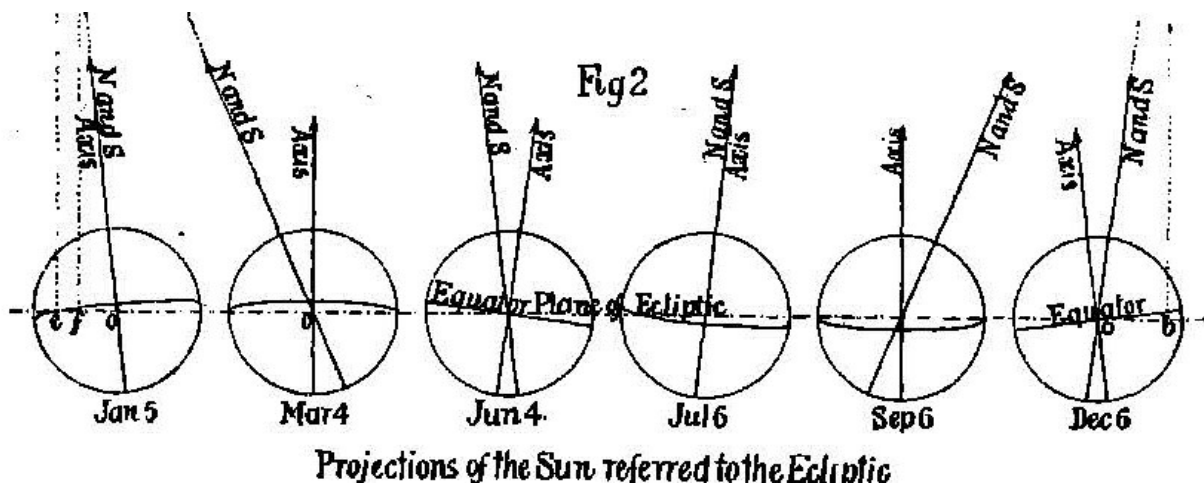


Abbildung 2: Da die Achse der Sonne um ca. $7,25^\circ$ bezüglich der Erdbahnebene (Ekliptikebene) geneigt ist, erscheint die Sonne aus Sicht von der Erde aus je nach Position auf der Erdbahn (also je nach Datum) unter verschiedenen Projektionsansichten. Hier ist die Ansicht in Bezug auf die Ekliptikebene dargestellt. Während man am 4. März am besten auf den solaren Nordpol und am 6. September auf den solaren Nordpol blickt, schaut man am 4. Juni und am 6. Dezember senkrecht auf die Sonnenachse (man befindet sich dann also in der Ebene des Sonnenäquators). © Honey, F. R.: „The Position of the Sun's Axis“, Popular Astronomy, vol. 29, pp.325-327 (1921).

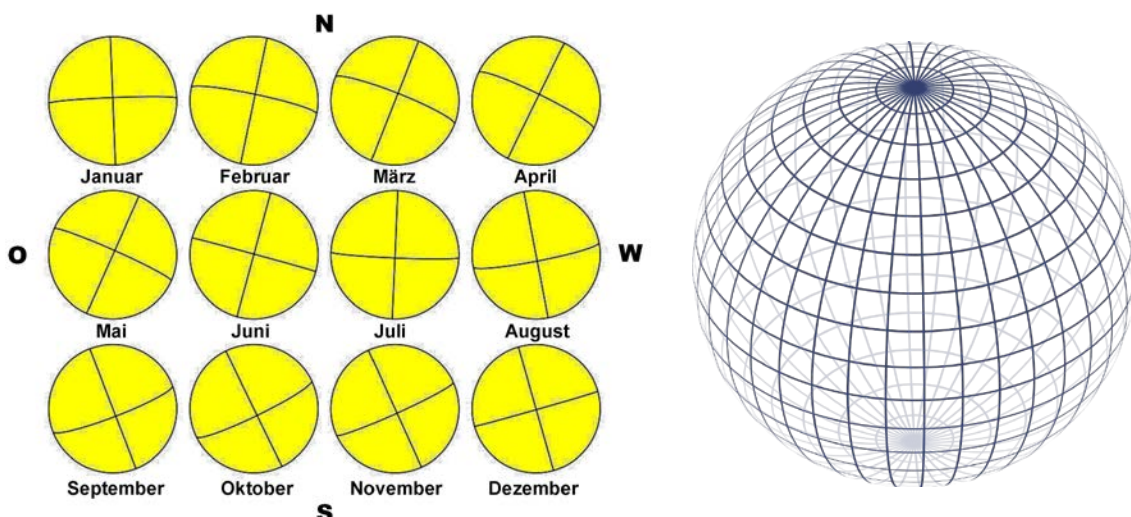


Abbildung 3: Links: Als Sonnenbeobachter hat man im Laufe eines Jahres folgende Ansichten der Sonnenscheibe in Bezug auf die Himmelsrichtungen. Die Himmelsrichtungen lassen sich am parallaktisch montierten Fernrohr (Stundenachse parallel zur Erdachse) leicht feststellen, indem man die scheinbare Bewegung der Sonne (von Ost nach West) verfolgt. © Vorlage: <http://www.parhelio.com/en/doccoord.html>, angepasst.

Rechts: Für die räumliche Vorstellung des Anblicks der geneigten Sonne und des mit ihr verbundenen sphärischen Systems der heliografischen Koordinaten. © Von Geek3 - Eigenes Werk, CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=5262806>.

Die Bestimmung der Rotationsgeschwindigkeit der Sonne und ihre mathematische Beschreibung

Galileo Galilei (1564-1641) war es, der 1611 mit Hilfe des von ihm für die Astronomie instrumentalisierten Fernrohrs die Flecken der Sonne näher erkundete und die Rotation dadurch feststellte. Christoph Scheiner (1573-1650) war es dann, der auf Grundlage von mehr als 2000 Sonnenbeobachtungen Vermutungen über die Lage der Rotationsachse der Sonne anstellt (niedergeschrieben in seinem Werk 'Rosa Ursina' von 1630). Der englische Astronom Richard Christopher Carrington (1826 – 1875) entdeckte schließlich durch genauere Sonnenfleckenbeobachtungen die differentielle Rotation der Sonne und entwickelte dazu eine Formel in Abhängigkeit von der heliografischen Breite (1863).

Heutzutage wird die breitengradabhängige **Rotation der Sonne** zum einen mit spektroskopischen Mitteln (Dopplereffekt) und zum anderen mit Hilfe von Tracern wie den Sonnenflecken ermittelt. Während man mit der spektroskopischen Methode die Bewegung des Plasmas an der Oberfläche bestimmt, erhält man mittels der ‚Fleckenmethode‘ eine Aussage über die Bewegung der tiefergelegenen Verankerung des jeweiligen Flecks. Die Methode mit den **Sonnenflecken** ist also dahingehend interessant, weil die Flecke im Zusammenhang mit dem Magnetfeld stehen, welches wiederum auf Grundlage der Rotation der Sonne entsteht.

Sehr wichtig zu erwähnen ist die Tatsache, dass sich die Ergebnisse der Bestimmung der Winkelgeschwindigkeit mittels der ‚Fleckenmethode‘ deutlich durch die Auswahl der Flecken unterscheiden (siehe [1], S. 15 oder [2], S. 13). So bewegen sich junge Sonnenflecke schneller als ältere und kleinere Flecken rotieren deutlich schneller als große Flecken.

Die breitengradabhängige (differentielle) Winkelgeschwindigkeit ω der Sonne in Abhängigkeit vom solaren Breitengrad B kann bei Nutzung von längerlebigen Einzelflecken wie folgt beschrieben werden: (in $^{\circ}/d$, siehe [1], S. 23, siehe auch Abb. 5).

$$\omega(B) = (14,421 \pm 0,062) + (-2,972 \pm 0,579) \cdot \sin^2 B + (-0,622 \pm 2,376) \cdot \sin^4 B$$

Die Parameter in der Formel beruhen auf der Auswertung von Einzelflecken im Zeitraum von Juni 2010 bis Juli 2015 durch Erik Nebelo [1]. Diese dabei getroffene Fleckenauswahl dient auch als Grundlage für die Auswahl von 7 Flecken für den im Folgenden dargestellten Praktikumsversuch zur Bestimmung der differentiellen Rotation der Sonne.

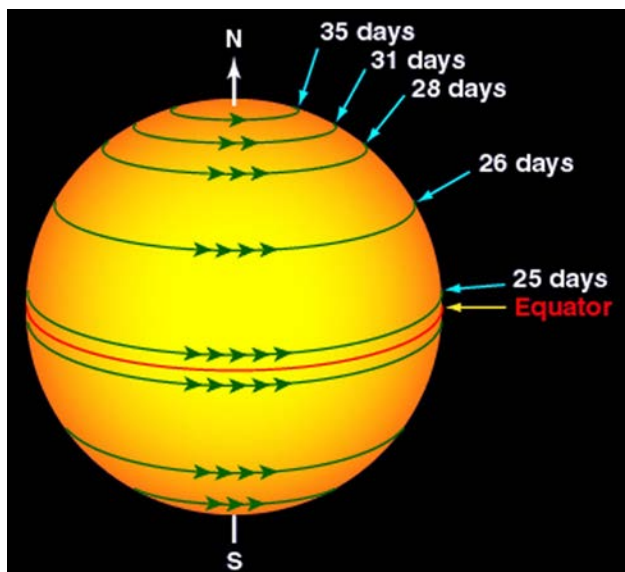


Abbildung 4: Die Sterne rotieren naturgemäß in Folge des Prozesses ihrer Entstehung. Da die Sterne keine Festkörper wie zum Beispiel die Gesteinsplaneten sind, rotieren sie nicht starr, sondern in Abhängigkeit vom Breitengrad unterschiedlich schnell. Dies nennt man differentielle Rotation.

Die Sonne rotiert am Äquator etwa in 24 Tagen einmal um ihre Achse. Näher an den Polen dauert die Rotation deutlich länger (mehr als 30 Tage). Als Mittelwert für die Rotationsdauer der Sonne wird ein Wert von rund 27 Tagen genannt.

Die Ursache der differentiellen Rotation ist Gegenstand der aktuellen Sonnenforschung. Die Rotationsachse der Sonne steht aber nicht senkrecht zur Erdbahnebene (siehe Abb. 3), was ein weiteres Rätsel für die Forschung darstellt.

©: NASA

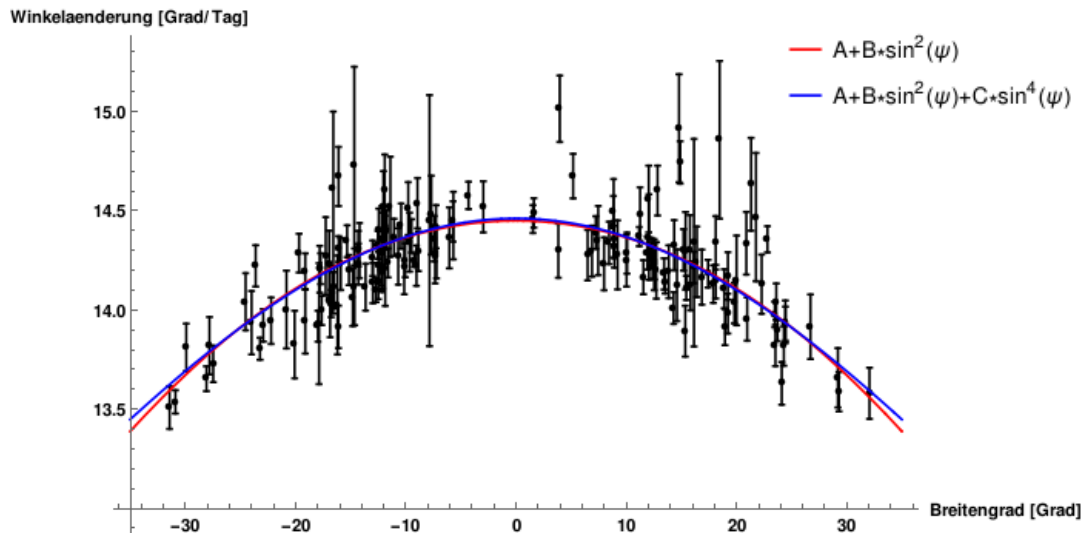


Abbildung 5: Die Grafik zeigt die Winkelgeschwindigkeit [°/d], abhängig von der heliografischen Breite ψ des Flecks. Ausgewertet wurden 163 Flecken im Zeitraum von Juni 2010 bis Juli 2015. Die Werte wurden aus Start- und Endposition der jeweiligen Sonnenflecken berechnet. © Erik Nebelo, [1], S. 23.

Die Beobachtung der Sonne mittels des Satelliten ‚Solar Dynamic Observatory‘

Seit dem 1. Mai 2010 liefert das am 11. Februar 2010 gestartete und für 5-10 Jahre Flugdauer geplante ‚Solar Dynamic Observatory‘ (SDO) im Viertelstundentakt Bilder von der dynamischen Sonne. Das SDO befindet sich in rund 34.600 km Höhe auf einer geosynchronen Umlaufbahn. Drei Instrumente an Bord des SDO (siehe Abb. 6) überwachen die sich ständig verändernde Sonne. Für die Fleckenauswertung werden Bilder des ‚Helioseismic and Magnetic Imager‘ (HMI) genutzt, die unter <http://hmi.stanford.edu/data/hmiimage.html> abrufbar sind.

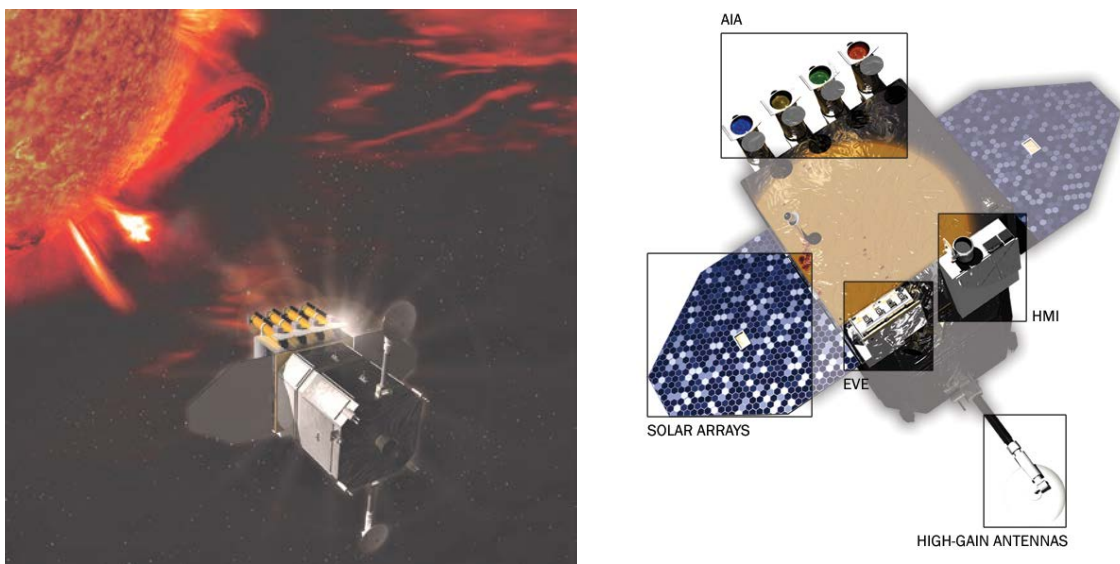


Abbildung 6: Links: Künstlerische Darstellung des Solar Dynamic Observatory. © NASA - http://www.nasa.gov/pdf/417176main_SDO_Guide_CMR.pdf A Guide to the Mission and Purpose of NASA’s Solar Dynamics Observatory, Gemeinfrei, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=9465088>. Rechts: Satellitenkomponenten zur Energiegewinnung, Kommunikation und Erforschung der solaren Phänomene (die drei Instrumente AIA, EVE und HMI). ©: Von NASA - <http://sdo.gsfc.nasa.gov/mission/spacecraft.php>, Gemeinfrei, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=4475786>.

Zur Bestimmung der Sonnenrotation mit Hilfe von Sonnenflecken

Wie schon in Abb. 3 angedeutet, lassen sich die Positionen auf der Sonne durch die **heliografischen Koordinaten** solare Breite B und solare Länge L beschreiben (siehe Abb. 7), **analog** wie man es für Orte auf der Erde durch die **geografischen Koordinaten Breite und Länge** macht.

In Abb. 3 wird aber auch klar, dass die Bestimmung von L und B auf der beobachtbaren Sonnenscheibe (in die Ebene projizierter Teil der im Moment der Beobachtung dem Beobachter zugewandten Halbkugel der Sonne) auch von der Position der Erde auf ihrer Umlaufbahn um die Sonne, also vom Datum, abhängt. Um dieses Problem zu vereinfachen, werden nur Bilder der Sonne ausgesucht, die in den Zeiträumen beobachtet wurden, in denen der Sichtstrahl Beobachter-Sonne in der Ebene des Sonnenäquators liegt (Zeiträume um den 4. 6. und 6. 12. herum, siehe Abb. 2). Das dafür in Frage kommende in die Ebene projizierte einfache Koordinatengitter (im Anhang erhältlich) wurde für die Praktikumsaufgabe den genutzten Sonnenbildern schon überlagert.

Die Berechnung des Anblicks des heliografischen Koordinatennetzes im nach den Himmelsrichtungen ausgerichteten Projektionsbild für jeden beliebigen Zeitpunkt des Jahres wäre eine herausfordernde Aufgabe für ein Computerprogramm. Im Prinzip müsste man die Koordinaten der Punkte, welche das Koordinatengitter bilden nur in ein Koordinatensystem transformieren, welches mit der N-S-Richtung verbunden ist.

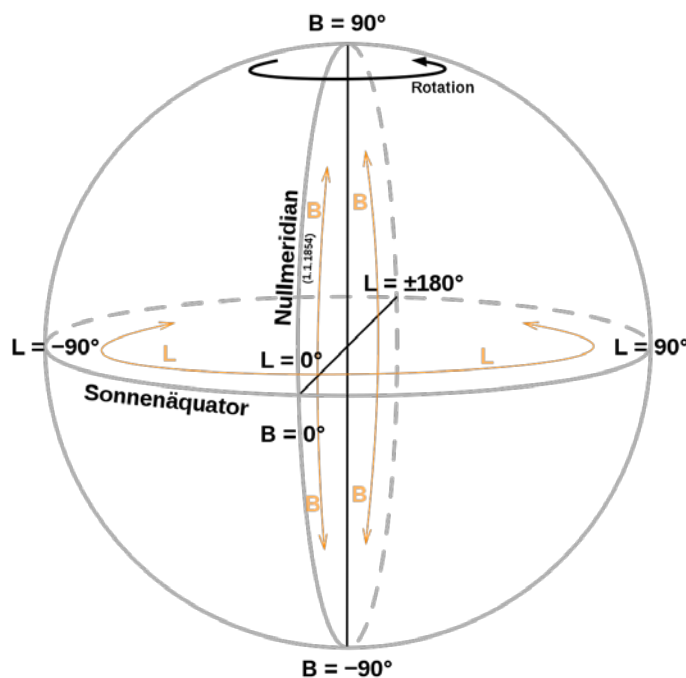


Abbildung 7: Das sphärische Koordinatensystem für die Sonne richtet sich mit der Sonnenachse und der Richtung zur Erde aus.

Die Achse der Sonne legt den Sonnenäquator und damit die Nullebene für die heliografische Breite bei $B = 0^\circ$ fest. Bei $B = 90^\circ$ befindet sich der solare Nordpol und bei $B = -90^\circ$ der solare Südpol.

Die heliografische Länge (hier mit L bezeichnet) wird vom Nullmeridian aus nach links von 0° bis -90° und nach rechts von 0° bis $+90^\circ$ gemessen. Die Ebene des Nullmeridians wird durch die Sichtlinie Beobachter-Sonnenmitte festgelegt.

@ Von original graphic: User:E^(nix), SVG version of original: User:Tt0g, adapted to heliographic conventions: User:DeWikiMan - adapted from File:Geographic coordinates sphere.svg (labels changed and added, rotation), CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=90603468>.

Fleckenauswahl

Die Daten für den Praktikumsversuch wurden auf Grundlage der Bachelorarbeit von Erik Nebelo „Die differentielle Rotation der Sonne“ [1] (basierend auf SDO/HMI-Daten) ausgesucht. Diese Arbeit betrachtet längerlebige Einzelflecken im Zeitraum von Juni 2010 bis Juli 2015 frühestens 2 Tage nach ihrer Ausbildung (damit größere Veränderungen der Umbraform, welche den Fehler der Positionsbestimmung stark erhöhen würden, ausgeschlossen werden).

Von den 163 in der Bachelorarbeit untersuchten Flecken (siehe Abb. 5) wurden 7 Flecken ausgesucht, die in den Zeiträumen um den 4. 6. und 6. 12. herum liegen (siehe auch Abb. 2).

Messung und Auswertung

Die Festlegung der Koordinaten eines Sonnenflecks stellt eine große Fehlerquelle bei der Bestimmung der Winkelgeschwindigkeit dar.

Die in der Bachelorarbeit von Erik Nebelo „Die differentielle Rotation der Sonne“ [1] verwendeten Daten wurden computergestützt durch Zentrumsbestimmung der Umbra (der dunkle zentrale Teil des Flecks) mithilfe des arithmetischen Mittels der Pixelwerte der Umbra ermittelt (siehe Abb. 8).

Bei Auswertung mit dem bloßen Auge sollte der Mittelpunkt eines gedanklich die Umbra (der dunkle Zentralteil) des Flecks einschließenden Kreises oder einer Ellipse anvisiert werden.

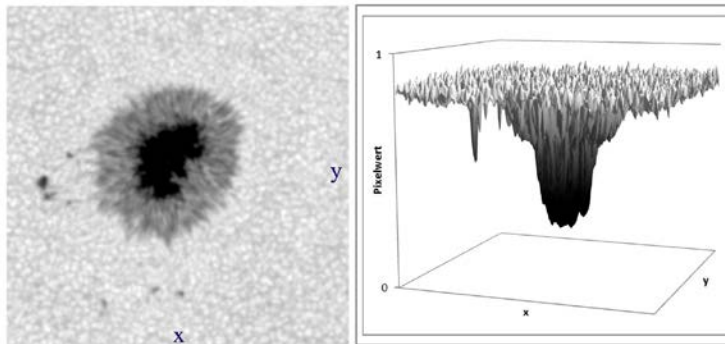


Abbildung 8:
Computergestützte Zentrumsbestimmung eines Sonnenflecks mit Hilfe des arithmetischen Mittels der Pixelwerte der Umbra.
@ Uwe Müller, [2], Abb. 13, S. 21.

Die Messungen werden bevorzugt zwischen $L = -50^\circ$ und $L = +50^\circ$ heliografischer Länge durchgeführt, wobei nur die heliografischen Koordinaten für Anfang und Ende des betrachteten Wegs bestimmt werden müssen.

Die **Winkelgeschwindigkeit** $\omega(B)$ wird basierend auf der Winkeldifferenz zwischen Anfangs- und Endposition des Flecks ($L_{\text{Ende}} - L_{\text{Anfang}}$) und der entsprechenden Zeitdifferenz $t_{\text{Ende}} - t_{\text{Anfang}}$ (in Tagen) ermittelt.

$$\omega(B) = \frac{L_{\text{Ende}} - L_{\text{Anfang}}}{t_{\text{Ende}} - t_{\text{Anfang}}}$$

Änderung des Bezugssystems

Da die Aufnahmen der Sonne von einem Ort aus erfolgten (Satellit im Erdumlauf), der im Laufe eines Jahres die Sonne umrundet, bezieht sich die aus den Bilddaten abgelesene Winkeländerung auf die Erde und wird daher als **synodisch** bezeichnet. Wir haben also zunächst die Winkelgeschwindigkeit $\omega(B)_{\text{Syn}}$ der Sonne in Bezug auf die Erde erhalten.

Zum besseren Verständnis: Wenn man der Drehung eines Objektes folgt oder sich entgegen der Drehrichtung bewegt (z. B. durch Laufen um ein sich drehendes Karussell), dann verändert sich die Ansicht des sich drehenden Objekts nur in Abhängigkeit von der relativen Winkelgeschwindigkeit.

Da sich Erde die Sonne im gleichen Sinne umläuft wie die Sonne rotiert (aus Gründen der Entstehung), erhält man die Winkelgeschwindigkeit $\omega(B)_{\text{Sid}}$ der Sonne in Bezug auf die Fixsterne (**siderisch**) indem man zum bisherigen Ergebnis (Winkelgeschwindigkeit $\omega(B)_{\text{Syn}}$ der Sonne in Bezug auf das Koordinatensystem der Erde) die Umlauf-Winkelgeschwindigkeit ω_{Erde} der Erde in Bezug auf das Koordinatensystem der Sterne addiert:

$$\omega(B)_{\text{sid}} = \omega(B)_{\text{syn}} + \omega_{\text{Erde}}$$

In erster Näherung ergibt sich die Umlauf-Winkelgeschwindigkeit ω_{Erde} der Erde aus dem Quotienten von 360° und 365,25 Tagen: $\frac{360^\circ}{365,25 \text{ d}} = 0,9856^\circ/\text{d}$.

Auswertung:

Die Auswertung der Messwerte beinhaltet:

- die Mittelung der Ablesungen für die heliografischen Breite am Anfang und am Ende des Wegs, (in die Tabelle wird nur der Mittelwert B eingetragen, bei Gruppenarbeit wird natürlich über alle erhaltenen Werte gemittelt),
- die Ermittlung des vom Fleck überstrichenen Winkels $L_{\text{Ende}} - L_{\text{Anfang}}$ aus den Ablesungen von L_{Ende} und L_{Anfang} (bei Gruppenarbeit aus ihren Mittelwerten),
- die Berechnung der synodischen Winkelgeschwindigkeit aus $\omega(B)_{\text{syn}} = \frac{L_{\text{Ende}} - L_{\text{Anfang}}}{t_{\text{Ende}} - t_{\text{Anfang}}}$,
- die Bestimmung der siderischen Winkelgeschwindigkeit (d. h., die Eliminierung der Erdbewegung aus dem Ergebnis): $\omega(B)_{\text{sid}} = \omega(B)_{\text{syn}} + \omega_{\text{Erde}} = \omega(B)_{\text{syn}} + 0,9856 \text{ }^\circ/\text{d}$.

Fehlerbestimmung:

Für die Fehlerangabe wird hier nur der Größtfehler von $\omega(B)_{\text{syn}}$ (also $\Delta\omega(B)_{\text{syn}}$) betrachtet, der der Einfachheit halber auch für $\omega(B)_{\text{sid}}$ angenommen wird (d. h., auf den Fehler der Winkelgeschwindigkeit des Erdumlaufs wird nicht weiter eingegangen).

Der **absolute Fehler** $\Delta\omega(B)_{\text{syn}}$ ergibt sich entsprechend der Fehlerfortpflanzung aus:

$$\Delta\omega(B)_{\text{syn}} = \left| \frac{\partial(\omega(B)_{\text{syn}})}{\partial(L_{\text{Ende}} - L_{\text{Anfang}})} \right| \cdot \Delta(L_{\text{Ende}} - L_{\text{Anfang}}) + \left| \frac{\partial(\omega(B)_{\text{syn}})}{\partial(t_{\text{Ende}} - t_{\text{Anfang}})} \right| \cdot \Delta(t_{\text{Ende}} - t_{\text{Anfang}}).$$

Mit der Annahme, dass $\Delta(t_{\text{Ende}} - t_{\text{Anfang}})$ vernachlässigbar klein ist, ergibt sich:

$$\Delta\omega(B)_{\text{syn}} = \left| \frac{\partial(\omega(B)_{\text{syn}})}{\partial(L_{\text{Ende}} - L_{\text{Anfang}})} \right| \cdot \Delta(L_{\text{Ende}} - L_{\text{Anfang}}) = \left| \frac{\partial\left(\frac{L_{\text{Ende}} - L_{\text{Anfang}}}{t_{\text{Ende}} - t_{\text{Anfang}}}\right)}{\partial(L_{\text{Ende}} - L_{\text{Anfang}})} \right| \cdot \Delta(L_{\text{Ende}} - L_{\text{Anfang}}),$$

$$\Delta\omega(B)_{\text{syn}} = \left| \frac{1}{(t_{\text{Ende}} - t_{\text{Anfang}})} \right| \cdot \Delta(L_{\text{Ende}} - L_{\text{Anfang}}) = \frac{1}{(t_{\text{Ende}} - t_{\text{Anfang}})} \cdot \Delta(L_{\text{Ende}} - L_{\text{Anfang}}) \cdot \frac{(L_{\text{Ende}} - L_{\text{Anfang}})}{(L_{\text{Ende}} - L_{\text{Anfang}})},$$

$$\Delta\omega(B)_{\text{syn}} = \omega(B)_{\text{syn}} \cdot \frac{\Delta(L_{\text{Ende}} - L_{\text{Anfang}})}{L_{\text{Ende}} - L_{\text{Anfang}}}.$$

(Es wird angenommen: $\Delta\omega(B)_{\text{sid}} = \Delta\omega(B)_{\text{syn}}$).

Zu diesem Ergebnis kommt man auch, wenn man die Faustregel anwendet, dass sich bei der Punktrechnung die **relativen Fehler** addieren:

$$\frac{\Delta\omega(B)_{\text{syn}}}{\omega(B)_{\text{syn}}} = \frac{\Delta(L_{\text{Ende}} - L_{\text{Anfang}})}{L_{\text{Ende}} - L_{\text{Anfang}}} + \frac{\Delta(t_{\text{Ende}} - t_{\text{Anfang}})}{t_{\text{Ende}} - t_{\text{Anfang}}}, \text{ mit } \Delta(t_{\text{Ende}} - t_{\text{Anfang}}) = 0.$$

Die Bestimmung von $\Delta(L_{\text{Ende}} - L_{\text{Anfang}})$ erfolgt **bei Einzelmessungen** auf Grundlage der Größtfehlerabweichungen ΔL_{Ende} und ΔL_{Anfang} wie folgt: $\Delta(L_{\text{Ende}} - L_{\text{Anfang}}) = \Delta L_{\text{Ende}} + \Delta L_{\text{Anfang}}$.

Die Größe von ΔL_{Ende} und ΔL_{Anfang} sollte durch die Schüler festgelegt werden. Eine sinnvolle Annahme ist $\Delta L_{\text{Ende}} = 0,5^\circ$ und $\Delta L_{\text{Anfang}} = 0,5^\circ$.

Auf Grundlage von **Mehrfachmessungen** wird als Absolutfehler die Standardabweichung des Mittelwerts von n Messwerten von L_{Ende} , also $\overline{L_{\text{Ende}}}$ (und dann auch $\overline{L_{\text{Anfang}}}$) genutzt. Diese wie folgt ermittelt:

$s_{L_{\text{Ende}}} = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (L_{\text{Ende},i} - \overline{L_{\text{Ende}}})^2}$ und $s_{L_{\text{Anfang}}} = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (L_{\text{Anfang},i} - \overline{L_{\text{Anfang}}})^2}$. Für die Absolutfehler gilt also: $\Delta L_{\text{Ende}} = s_{L_{\text{Ende}}}$ und $\Delta L_{\text{Anfang}} = s_{L_{\text{Anfang}}}$

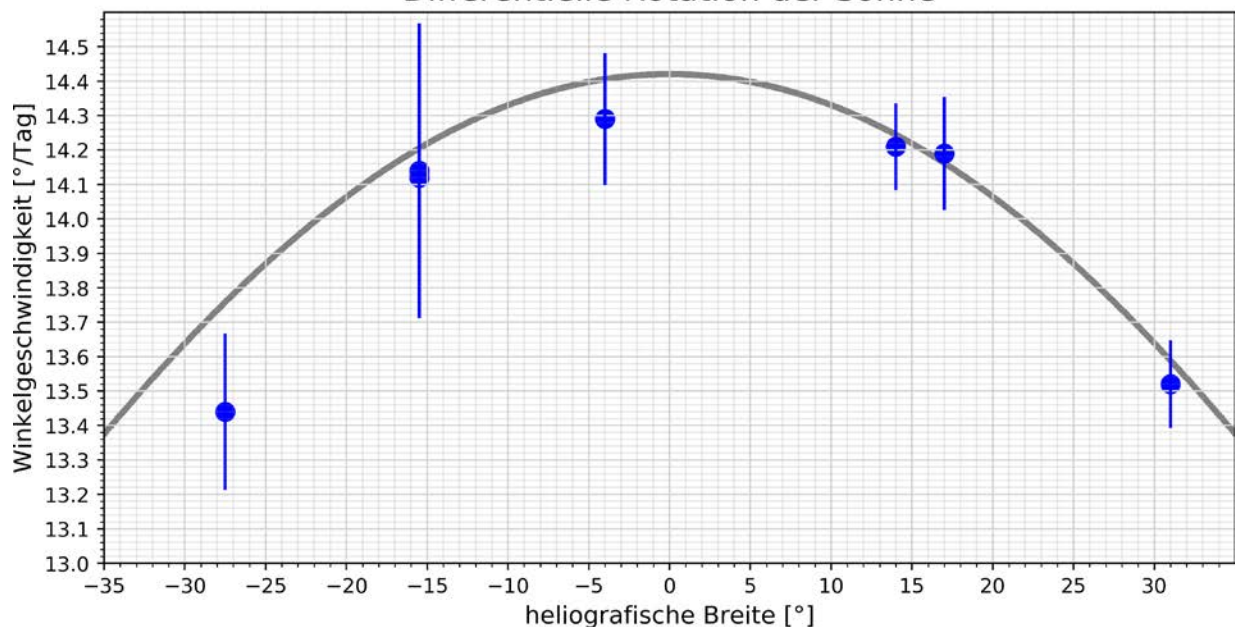
Ergebnisaufzeichnung und Ergebnisdarstellung:

Die Messwerte und die Ergebnisse werden in eine vorbereitete Tabelle eingetragen. Im Falle der aufgeteilten Gruppenarbeit müssen die Werte organisiert und zum Mitschreiben bekannt gemacht werden. Abschließend erfolgt die grafische Darstellung der Ergebnisse in einem ebenfalls vorbereiteten Koordinatensystem.

Musterlösung

Fleck	Heliografische Breite B (Mittelwert aus Anfangs- und Endwert)	Heliografische Länge L_{Anfang} Anfangswert am	Heliografische Länge L_{Ende} Endwert am	Längen- differenz $L_{\text{Ende}} - L_{\text{Anfang}}$ Zeitdifferenz $t_{\text{Ende}} - t_{\text{Anfang}}$	Synodische Winkel- geschwindigkeit $\omega(B)_{\text{Syn}}$	Siderische Winkel- geschwindigkeit $\omega(B)_{\text{Sid}}$ Rotations- Periode P
A	+31°	-53,8° 04.12.2010, 0 Uhr	+52,7° 12.12.2010, 12 Uhr	106,5° 8,5 d	12,53° / d	13,52° / d 26,6 d
B	+14°	-58,7° 06.12.2010, 0 Uhr	+53,7° 14.12.2010, 12 Uhr	112,4° 8,5 d	13,22° / d	14,21° / d 25,3 d
C	+17°	-2,8° 04.06.2011, 0 Uhr	+30,2° 06.06.2011, 12 Uhr	33,0° 2,5 d	13,20° / d	14,19° / d 25,4 d
D	-27,5°	-37,5° 14.05.2013, 0 Uhr	+37,2° 20.05.2013, 0 Uhr	74,7° 6 d	12,45° / d	13,44° / d 25,5 d
E	-15,5°	-43,0° 16.06.2013, 0 Uhr	+9,6° 20.06.2013, 0 Uhr	52,6° 4 d	13,15° / d	14,14° / d 25,4 d
F	-4°	-33,9° 06.12.2014, 0 Uhr	+52,6° 12.12.2014, 12 Uhr	86,5° 6,5 d	13,31° / d	14,29° / d 25,2 d
G	-15,5°	-7,4° 02.06.2015, 0 Uhr	+51,7° 06.06.2015, 12 Uhr	59,1° 4,5 d	13,13° / d	14,12° / d 25,5 d

Differentielle Rotation der Sonne



Die Ergebnisse der Musterlösung für die 7 ausgewählten Sonnenflecke folgen sehr gut dem Verlauf der empirischen (grauen) Kurve zur differentielle Rotation, die von Nenebelo [1] erhalten wurde.

Die hier eingetragenen Fehlerbalken ergeben sich aus den folgenden Überlegungen: Da sich bei der Punktrechnung die relativen Fehler addieren, gilt: $\omega = \frac{L_{\text{Ende}} - L_{\text{Anfang}}}{t_{\text{Ende}} - t_{\text{Anfang}}} \rightarrow \frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{\Delta(L_{\text{Ende}} - L_{\text{Anfang}})}{L_{\text{Ende}} - L_{\text{Anfang}}} + \frac{\Delta(t_{\text{Ende}} - t_{\text{Anfang}})}{t_{\text{Ende}} - t_{\text{Anfang}}}$.

Mit $\Delta(t_{\text{Ende}} - t_{\text{Anfang}}) = 0$ erhält man $\Delta\omega = \omega \cdot \frac{\Delta(L_{\text{Ende}} - L_{\text{Anfang}})}{L_{\text{Ende}} - L_{\text{Anfang}}}$.

Da sich bei der Strichrechnung die absoluten Fehler addieren, gilt: $\Delta(L_{\text{Ende}} - L_{\text{Anfang}}) = \Delta L_{\text{Ende}} + \Delta L_{\text{Anfang}}$.

Für die absoluten Fehler der Längenablesung ΔL_{Ende} und ΔL_{Anfang} wurde jeweils ein Maximalfehler von 0,5° angenommen. Gruppenarbeit ermöglicht eine erste Aussage zur Fehlerhaftigkeit der Ergebnisse, indem neben dem Mittelwert auch die Streuung der von den verschiedenen Gruppenmitgliedern ermittelten Ergebnisse bestimmt wird.

Quellen

- [1] Erik Nebelo: „Die differentielle Rotation der Sonne“, Bachelorarbeit zur Erlangung des Grades eines Bachelor of Science Physik, Fakultät für Mathematik und Physik, Albert-Ludwigs-Universität Freiburg im Breisgau, 31. Juli 2015, http://www.leibniz-kis.de/fileadmin/user_upload/nebelo2015_bachelor.pdf
- [2] Uwe Müller: „Die differentielle Rotation der Sonne. Positionsbestimmung von Sonnenflecken mithilfe von SDO/HMI“, Bachelorarbeit zur Erlangung des Grades eines Bachelor of Science Physik, Fakultät für Mathematik und Physik, Albert-Ludwigs-Universität Freiburg im Breisgau, April 2012, http://www.leibniz-kis.de/fileadmin/user_upload/forschung/publikationen/bachelor/uwe.mueller.pdf
- [3] Honey, F. R.: „The Position of the Sun's Axis“, Popular Astronomy, vol. 29, pp.325-327 (1921)
- [4] Schnellsuche nach Bildern im HMI-Archiv des Solar Dynamic Observatory, <http://hmi.stanford.edu/data/hmiimage.html>

Anhang

- **7 Sets von Sonnenbildern** mit je einem ausgesuchten Sonnenfleck (A bis G):
 - Fleck A: Sonnenbilder vom 04.12.2010, 0 Uhr und 12.12.2010, 12 Uhr: ‚Fleck A.pdf‘
 - Fleck B: Sonnenbilder vom 06.12.2010, 0 Uhr und 14.12.2010, 12 Uhr: ‚Fleck B.pdf‘
 - Fleck C: Sonnenbilder vom 04.06.2011, 0 Uhr und 06.06.2011, 12 Uhr: ‚Fleck C.pdf‘
 - Fleck D: Sonnenbilder vom 14.05.2013, 0 Uhr und 20.05.2013, 0 Uhr: ‚Fleck D.pdf‘
 - Fleck E: Sonnenbilder vom 16.06.2013, 0 Uhr und 20.06.2013, 12 Uhr: ‚Fleck E.pdf‘
 - Fleck F: Sonnenbilder vom 06.12.2014, 0 Uhr und 12.12.2014, 12 Uhr: ‚Fleck F.pdf‘
 - Fleck G: Sonnenbilder vom 02.06.2015, 0 Uhr und 06.06.2015, 12 Uhr: ‚Fleck G.pdf‘
- **Arbeitsblatt** ‚Bestimmung der differentiellen Rotation der Sonne‘
- Koordinatengitter (transparent und als pdf-Datei):
 - ‚Koordinatengitter transparent.png‘, ‚Koordinatengitter.pdf‘

Arbeitsblatt

Bestimmung der differentiellen Rotation der Sonne

Ziel

Untersuche das Rotationsverhalten der Sonne auf Grundlage der Bewegung von Sonnenflecken! Bestimme dazu für 7 Sonnenflecke die von der heliografischen Breite B abhängige siderische Winkelgeschwindigkeit $\omega(B)_{\text{sid}}$. Stelle die Ergebnisse grafisch dar und versuche, den Zusammenhang mathematisch näherungsweise zu beschreiben!

Vorgehensweise

Gegeben sind 7 Sets von Sonnenbildern mit je einem ausgesuchten Sonnenfleck (A bis G), die im Zeitraum von 2010 bis 2015 (eine Zeit mit viel Sonnenflecken) vom Satelliten ‚Solar Dynamic Observatory‘ (SDO) mit dem Instrument ‚Helioseismic and Magnetic Imager‘ (HMI) aufgenommen wurden. Die Bilder stammen aus dem HMI-Archiv und sind erreichbar unter <http://hmi.stanford.edu/data/hmiimage.html>.

Die Untersuchung kann auch in Teilgruppen vorgenommen werden, wobei jede Teilgruppe die Auswertung eines Datensets für einen Sonnenfleck übernimmt. Innerhalb der Teilgruppe bestimmen alle Gruppenmitglieder unabhängig voneinander die heliografischen Koordinaten des Flecks.

Teilaufgaben

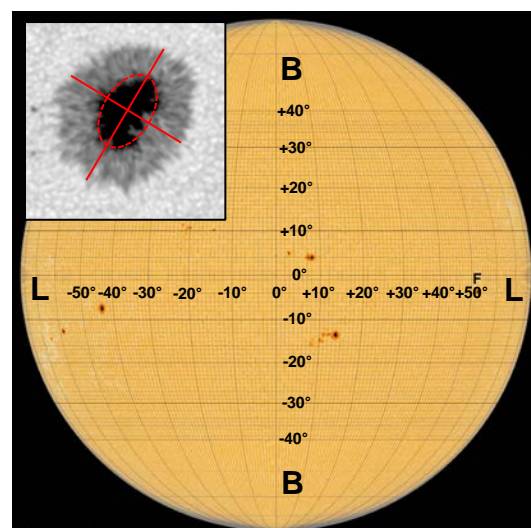
- 1.) Bestimmung der heliografischen Breite B und Länge L des jeweils markierten Sonnenflecks für den Anfangspunkt und den Endpunkt des betrachteten Wegs am Bildschirm oder auf einem A3-Ausdruck: Ablesegenauigkeit: $0,1^\circ$.
- 2.) Bestimmung der Mittelwerte für die Werte von B und L und der Standardabweichungen (Streubreiten) für die L -Werte und Berechnung der Winkelgeschwindigkeit $\omega(B)$ des Sonnenflecks samt Fehlerangabe (Eintrag in Tabelle auf Rückseite).
- 3.) Zusammentragen der Ergebnisse für alle Flecken (Tabelle auf Rückseite füllen).
- 4.) Grafische Darstellung der Messpunkte von $\omega(B)$ für alle 7 Sonnenflecke (aus den Ergebnissen aller 7 Teilgruppen) in Diagramm auf Rückseite.
- 5.) Öffnen der Seite <http://hmi.stanford.edu/data/hmiimage.html> und Abrufen der aktuellen Sonnenbilder.

Zur Koordinatenablesung

Die heliografische Breite B und Länge L wird analog zur geografischen Breite und Länge gemessen (siehe auch im Bild rechts).

Der Nullmeridian der Sonne ($L=0^\circ$) befindet sich in der Mitte der Sonnenscheibe.

Um die Koordinaten eines Flecks festzulegen, muss man gedanklich den Mittelpunkt eines die Umbra einschließenden Kreises oder einer Ellipse finden (siehe Bild).



Auswertung

Aus den Daten erhält man die synodische Winkelgeschwindigkeit $\omega(B)_{\text{syn}} = \frac{L_{\text{Ende}} - L_{\text{Anfang}}}{t_{\text{Ende}} - t_{\text{Anfang}}}$.

Um die gesuchte siderische (auf die Sterne bezogene) Winkelgeschwindigkeit $\omega(B)_{\text{sid}}$ zu erhalten, muss noch die Winkelgeschwindigkeit der Erde ω_{Erde} addiert werden:

$$\omega(B)_{\text{sid}} = \omega(B)_{\text{syn}} + \omega_{\text{Erde}} = \omega(B)_{\text{syn}} + 0,9856^\circ/\text{d}.$$

Ergebnisse und Grafik

Die für das Arbeitsblatt genutzte Auswahl von 7 Sonnenflecken (A bis G) sind eine Teilmenge der 163 im Rahmen einer Bachelorarbeit* ausgewerteten Sonnenflecken.

Fleck	Heliografische Breite B (Mittelwert aus Anfangs- und Endwert)	Heliografische Länge L_{Anfang} Anfangswert am	Heliografische Länge L_{Ende} Endwert am	Längendifferenz $L_{\text{Ende}} - L_{\text{Anfang}}$ Zeitdifferenz Δt	Synodische Winkelgeschwindigkeit $\omega(B)_{\text{syn}}$	Siderische Winkelgeschwindigkeit $\omega(B)_{\text{sid}}$ Rotations-Periode P
A° ±° 04.12.2010, 0 Uhr ±° 12.12.2010, 12 Uhr ±° d ±° / d ±° / d ± d
B° ±° 06.12.2010, 0 Uhr ±° 14.12.2010, 12 Uhr ±° d ±° / d ±° / d ± d
C° ±° 04.06.2011, 0 Uhr ±° 06.06.2011, 12 Uhr ±° d ±° / d ±° / d ± d
D° ±° 14.05.2013, 0 Uhr ±° 20.05.2013, 0 Uhr ±° d ±° / d ±° / d ± d
E° ±° 16.06.2013, 0 Uhr ±° 20.06.2013, 0 Uhr ±° d ±° / d ±° / d ± d
F° ±° 06.12.2014, 0 Uhr ±° 12.12.2014, 12 Uhr ±° d ±° / d ±° / d d
G° ±° 02.06.2015, 0 Uhr ±° 06.06.2015, 12 Uhr ±° d ±° / d ±° / d ± d

Differentielle Rotation der Sonne



* Erik Nebelo: „Die differentielle Rotation der Sonne“, Bachelorarbeit zur Erlangung des Grades eines Bachelor of Science Physik, Fakultät für Mathematik und Physik, Albert-Ludwigs-Universität Freiburg im Breisgau, 2015.