

Wie kommt eine Sonnenuhr an die Schulhauswand?

In Bezug zu „Sonne aktuell“ in der Rubrik „Aktuelles am Himmel: Sonnensystem“ in SuW 9/2021, WIS-ID: 1421051, Zielgruppe: Oberstufe

Olaf Fischer, Thomas Müller

Im WIS-Beitrag wird gezeigt, wie man ausgehend von der einfachen Äquatorialsonnenuhr, andere Polstab-Sonnenuhren mit komplizierteren Zifferblattkonstruktionen entwickeln kann und so z. B. eine Vertikalsonnenuhr mit Wandabweichung für eine Außenwand des Schulhauses wie in Abb. 1 gezeigt, einfach berechnen und konstruieren kann.

Dies soll modellhaft bildlich und in der Sprache der Mathematik geschehen. Die Matrizenrechnung könnte dabei für die dazu nötigen Koordinatentransformationen eine sehr anschauliche und eindrucksvolle Einführung und Anwendung finden.

Sonnenuhren funktionieren als räumliche Gebilde im Zusammenspiel von Zifferblattebene und Schattenebene. Räumliches Vorstellungsvermögen ist gefragt.

Übersicht der Bezüge im WIS-Beitrag		
Astronomie	Positionsastronomie	Polstabprinzip , Polstab-Sonnenuhren , Äquatorialsonnenuhr , Horizontalsonnenuhr , vertikale Südsonnenuhr , Vertikalsonnenuhr mit Wandabweichung , polare Sonnenuhr , Ortszeit und Zonenzeit , wahre und mittlere Sonne , Zeitgleichung
Fächer- verknüpfung	Astro - Mathematik Astro - Geo (Meteorologie)	Matrizen , Drehmatrix , Koordinatentransformation Sonnenscheinautograph
Lehre allgemein	Erkenntnisgewinnungs- kompetenz, Unterrichtsmittel	Schüler können die Hintergründe der Formeln zur Zifferblattberechnung für Polstab-Sonnenuhren nachvollziehen und Zifferblätter selbst berechnen, Schnittbogen für eine Würfelsonnenuhr

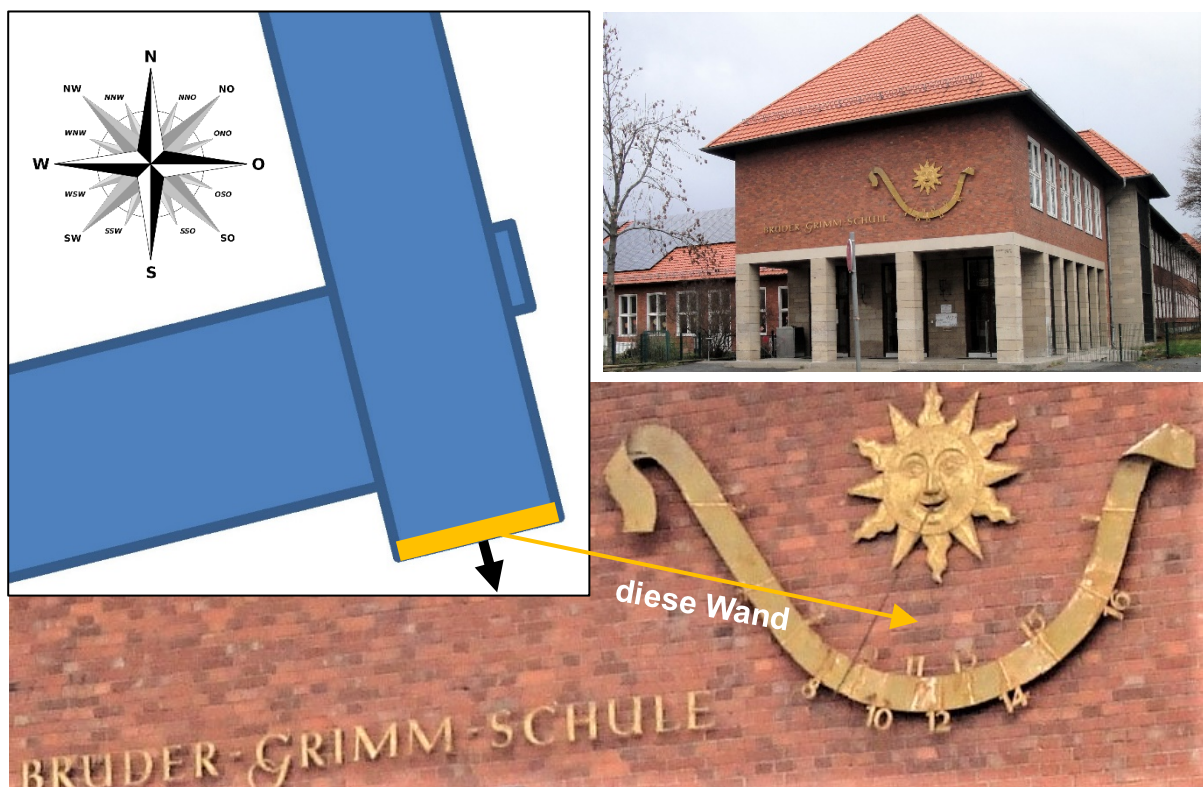


Abbildung 1: Vertikale Sonnenuhr mit Polstab an der um ca. 14° zur Ost-West-Richtung in Richtung Osten ausgerichteten Hauswand (siehe Lageplan oben links) der Brüder-Grimm-Schule (eine Grundschule) in Göttingen (siehe auch [4]). Am Ende des WIS-Beitrags wird das Zifferblatt dieser Sonnenuhr mit den bis dahin gewonnenen Formeln berechnet. ©: Reise Reise - Eigenes Werk, CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=38023661>. Kompassrose: ©: Brosen, CC BY 2.5, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=63371902>.

Grundsätzliches zu Sonnenuhren und das Polstabprinzip

[zurück zum Anfang](#)

Sonnenuhren „funktionieren“ wenn die Sonne scheint und basieren in der Regel auf dem tageszeit-abhängigen Schattenwurf (Richtung und / oder Länge des Schattens). So entsteht die Schattenlinie eines als Schattenwerfer fungierenden Stabs als Schnittlinie von Schattenebene und Schattenauffangfläche. Mit Hilfe von Abb. 2 wird deutlich, dass die Lage der Schattenlinie bei definierter Ausrichtung des Schattenstabs in Richtung Himmelspol (man nennt ihn dann Polstab, siehe auch Abb. 3) und gegebenem Stundenwinkel der Sonne allein von der Ausrichtung der Schattenauffangebene abhängt und damit unabhängig ist von der Deklination der Sonne δ_{Sonne} (also unabhängig vom Tag im Jahr). Entsprechend werden im Folgenden Schattenauffangebenen betrachtet, die in der Himmelsäquator-ebene, in der Horizontebene und in zwei verschieden gedrehten Vertikalebene liegen.

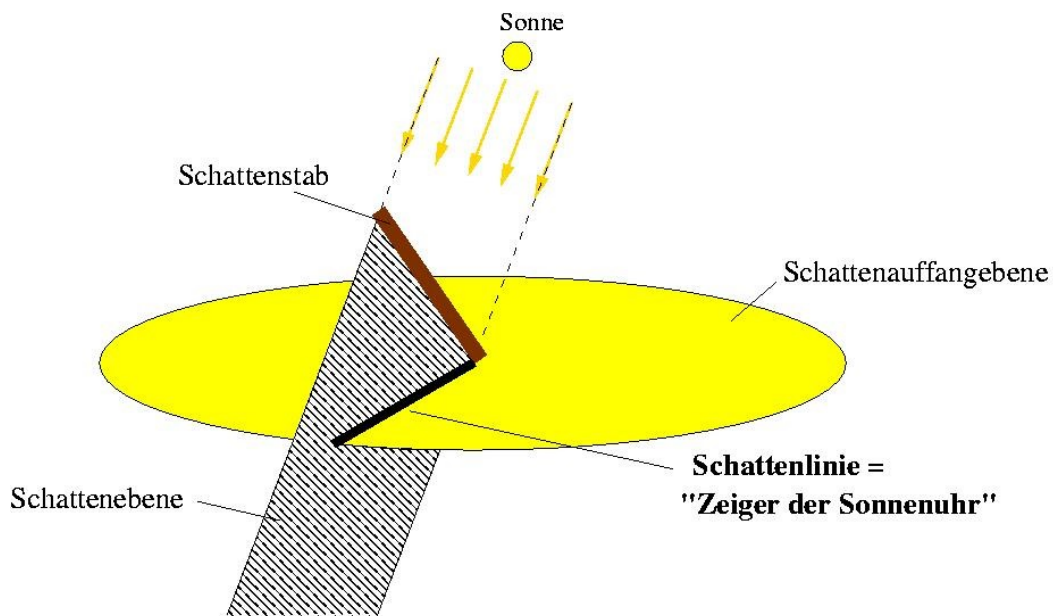


Abbildung 2: Mathematisch-geometrische Beschreibung einer Sonnenuhr (Basismodell): Der „Schattenzeiger“ entsteht als Schnittlinie der Schattenauffangebene mit der Schattenebene, welche durch Schattenstab und der Richtung eines Sonnenstrahls aufgespannt wird. ©: Olaf Fischer.

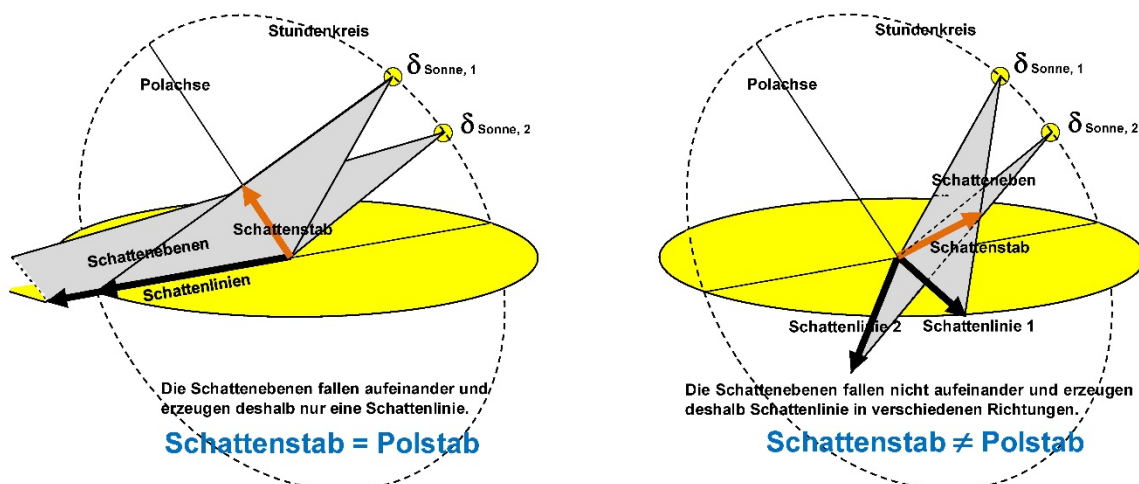


Abbildung 3: Stellt man den Schattenstab in Richtung der Polachse (Schattenstab = Polstab, „Polstabprinzip“), dann liegen die Schattenebenen in den Stundenkreisebenen, womit die Lage der Schattenebene unabhängig von der Deklination der Sonne ist (siehe auch Schema rechts oben). Für den Fall Schattenstab \neq Polstab ist die Lage der Schattenebenen und damit der resultierenden Schattenlinien nicht nur vom Stundenwinkel, sondern auch von der Deklination der Sonne abhängig. ©: Olaf Fischer.

Einfacher Anfang – die Äquatorialsonnenuhr

[zurück zum Anfang](#)



Abbildung 4: Der Sonnenscheinautograph für eine Wetterstation arbeitet als äquatoriale Sonnenuhr. Immer wenn die Sonne scheint, wird auf dem Nachweispapier ein Brennfleck erzeugt. ©: M^a Victoria Fernández Arboleya (vfarboleya) - Eigenes Werk, CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=1222953>.

Das Zeitmaß Tag wird durch die gleichmäßige Rotation der Erde bestimmt. Bei der einfachsten Sonnenuhr, der **Äquatorialuhr**, wirft ein parallel zur Erdachse ausgerichteter Stab, der **Polstab**, einen Schatten, der auf einer senkrecht zum Stab liegenden Ebene mit gleichmäßiger Geschwindigkeit in Richtung des wachsenden Stundenwinkels der Sonne umläuft. Der Stundenwinkel der Sonne τ_{Sonne} , und der Stundenwinkel der Schattenlinie τ unterscheiden sich lediglich um 180° .

Diese Gegebenheiten begründen den geringen Konstruktionsaufwand für eine Äquatorialsonnenuhr. Die Stundenlinien des Zifferblatts laufen mit äquidistanten 15° -Schritten um. Die Grundlinie wird durch die Mittagslinie (12 Uhr), die vom Fußpunkt des Schattenstabs ausgehend nach Norden zeigt, gebildet. Zudem ist die Lage der Schattenebene τ aller Sonnenuhren, deren Schattenstab parallel zur Erdachse ausgerichtet ist (**Schattenstab = Polstab**), unabhängig von der Deklination der Sonne (siehe Abb. 3).

Eine wichtige Anwendung findet die Äquatorialsonnenuhr bei der Bestimmung der Sonnenscheindauer im Rahmen der langfristigen Beobachtung und Aufzeichnung des Wettergeschehens. Beim **Sonnenscheinautographen** (siehe Abb. 4) wird nicht der Schatten, sondern das durch eine Kugellinse fokussierte Licht der Sonne in der Äquatorebene (=Zifferblattebene) aufgefangen. Ein in der Zifferblattebene angebrachter Streifen aus Spezialpapier ermöglicht die Registrierung der Sonnenscheindauer. Immer wenn die Sonne scheint, hinterlässt sie auf dem Registrierstreifen eine Brennspur, deren Länge die Sonnenscheindauer wiedergibt.

Ausgehend von der Äquatorialuhr lassen sich in einfacher Art und Weise andere Typen von **Polstab-Sonnenuhren** konstruieren. Dreht man die Schattenauffangfläche (Zifferblatt) in eine andere Lage als die der Ebene des Himmelsäquators, so erkennt man sofort, dass die Äquidistanz der Winkelabstände zwischen den stündlichen Schattenlinien auf dem Zifferblatt nicht mehr gegeben ist (siehe Abb. 5). Der Schattenstab wird dabei nicht mitgedreht und zeigt (als Polstab) weiterhin in Richtung der Erdachse. Dies garantiert, dass die Lage der Schattenebene und damit die Schattenrichtung unabhängig von der Deklination der Sonne und damit unabhängig vom Datum bleibt. (siehe auch Abb. 3).

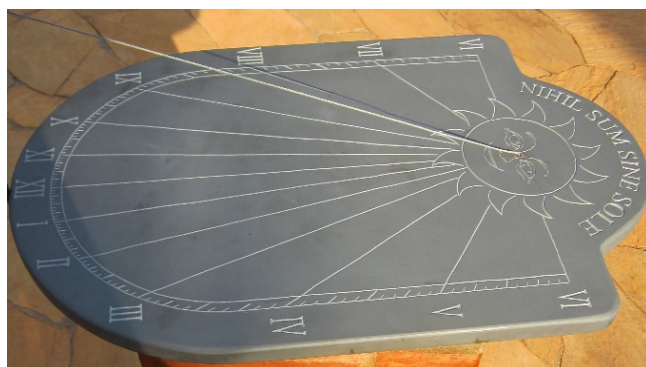


Abbildung 5: Während bei der äquatorialen Sonnenuhr (links, Standort: Berg- und Hüttenakademie Krakau) die Stundenlinien äquidistant (15° pro Stunde) verlaufen, sind ihre Winkelabstände bei der horizontalen Sonnenuhr (rechts, Standort: Brasilien) verschieden groß. ©: Von Andrzej Otrębski - Eigenes Werk, CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=23039079>, FilipCT - Own work, CC0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=21276303>.

Metamorphose der äquatorialen Sonnenuhr

[zurück zum Anfang](#)

Zur Konstruktionsvorschrift für eine Polstab-Sonnenuhr mit einem Zifferblatt, welches nicht in der Äquatorebene liegt, gelangt man durch die mathematische Modellierung der Drehung der äquatorialen Zifferblattebene in eine andere Lage.

Im Folgenden soll ein Weg aufgezeigt werden, der bei den Formeln zur **Koordinatenumrechnung (Koordinatentransformation)** zwischen Äquatorsystem und Horizontsystem beginnt. Ausgehend von der ebenen Äquatorialsonnenuhr werden dann die Berechnungsvorschriften für weitere Polstab-Sonnenuhren mit ebenen Zifferblättern (Horizontalsonnenuhr, Vertikale Süduhr und Vertikalsonnenuhr mit Wandabweichung) abgeleitet.

Dieser Weg ist anspruchsvoll, weil sehr formal. Für mehr Übersichtlichkeit beim Rechnen wird die **Matrix** als mathematisches Hilfsmittel benötigt. Anders gesehen ergibt sich die Gelegenheit einer sehr anschaulichen Anwendung von **Drehmatrizen** (siehe Abb. 6) mit praktisch überprüfbarem Ergebnis (Verknüpfung zwischen Astronomie und Mathematik, eventuell Zusammenarbeit mit dem Mathematiklehrer).

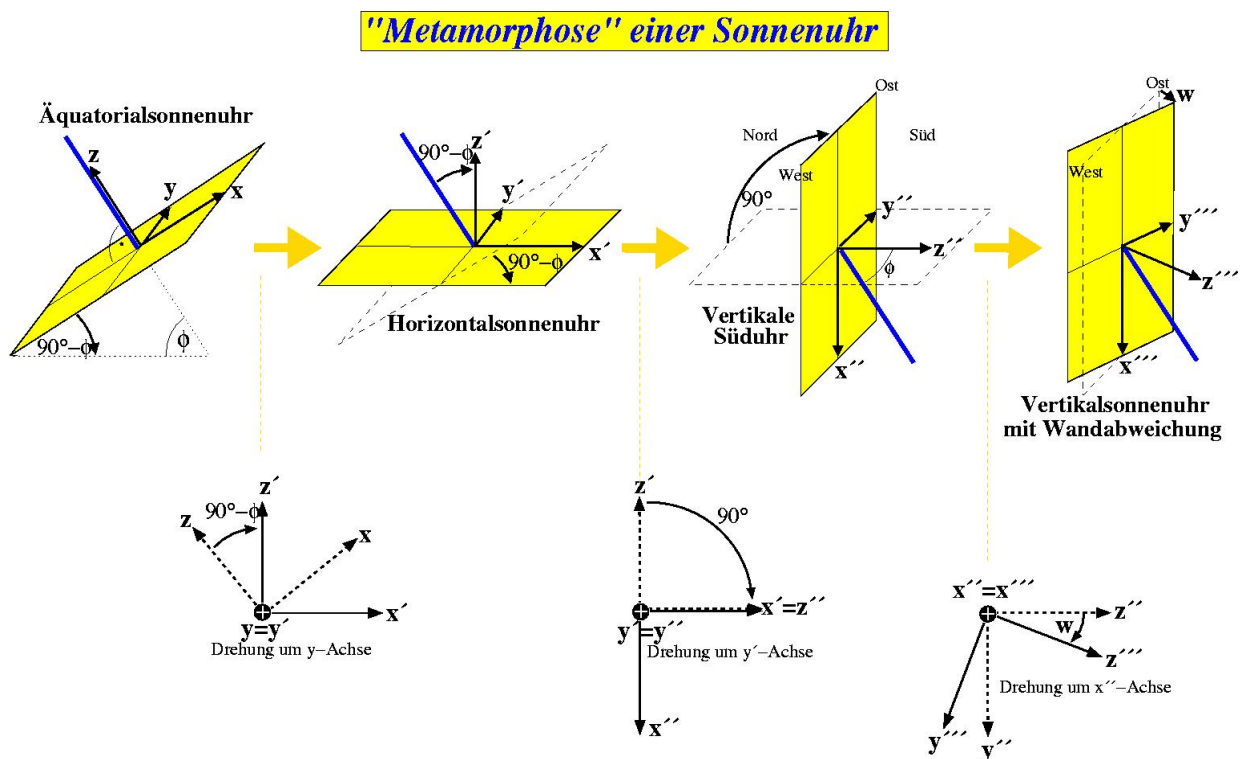


Abbildung 6: Durch Drehung der Äquatorialebene in eine andere Lage entstehen andere Typen von geläufigen Polstab-Sonnenuhren (Schattenstab bleibt dabei stets der Polstab! Dieser wird also nicht mitgedreht).

©: Olaf Fischer.

Koordinatentransformation und Drehmatrix

[zurück zum Anfang](#)

Man stelle sich vor, dass die Zifferblattebene einer Äquatorialsonnenuhr gedreht wird, ohne dass sich die Lage des Polstabs und damit der Schattenebene verändert. Der Winkelabstand a der Schnittlinie der Schattenebene mit der verdrehten Zifferblattebene (die Schattenlage) zur Mittagslinie ändert sich dabei (siehe Abb. 7).

Die Grundidee der mathematischen Formulierung besteht nun darin, die Koordinaten des Schattenendpunktes P' (Schnittpunkt der Schattenlinie mit der Einheitskugel) in der gedrehten Zifferblattebene (hier mit a und h bezeichnet, mit den Koordinaten des Endpunkts P des gleichen Schattens in der Äquatorialsonnenuhr (Äquatorkoordinaten τ, δ) in Zusammenhang zu bringen.

Den Gleichungszusammenhang erhält man durch **Koordinatentransformation zwischen den kartesischen Koordinaten**, in die man die sphärischen Koordinaten zuvor umrechnet. Der Punkt P im kartesischen Koordinatensystem x, y, z entspricht dem Punkt P' im dazu verdrehten System x', y', z' . Der Zusammenhang zwischen den kartesischen Koordinaten und den hier benötigten astronomischen Kugelkoordinaten der Punkte P und P' sieht wie folgt aus:

$$\mathbf{P}: \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \delta \cdot \cos \tau \\ -\cos \delta \cdot \sin \tau \\ \sin \delta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}': \begin{pmatrix} x_H \\ y_H \\ z_H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos h \cdot \cos a \\ -\cos h \cdot \sin a \\ \sin h \end{pmatrix}.$$

Die Koordinatentransformation durch Drehung wird beschrieben durch:

$$\begin{pmatrix} x_H \\ y_H \\ z_H \end{pmatrix} = \hat{D} \cdot \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}.$$

\hat{D} ist eine so genannte **Drehmatrix**, welche die **Koordinatentransformation durch Drehung** beschreibt. \hat{D} ist eine 3×3 -Matrix, deren Aussehen von der Art der Drehung abhängt.

Eine Drehmatrix, die eine Drehung um nur eine Koordinatenachse beschreibt, ist nur an wenigen Stellen besetzt. Für die Schule kann die Matrixschreibweise auch aufgelöst werden.

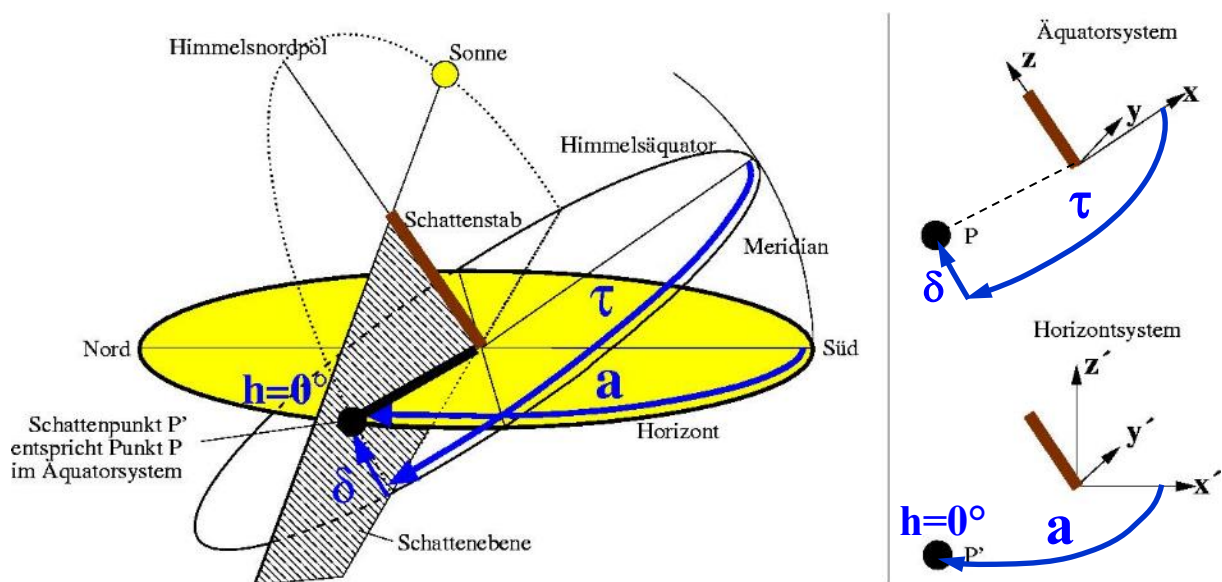


Abbildung 7: Der Schattenpunkt P' mit den Koordinaten a, h in der Horizontebene ($h = 0^\circ$, Horizontsystem in kartesischen Koordinaten x', y', z') entspricht dem Punkt P mit den Koordinaten τ, δ in Bezug auf das Äquatorsystem (in kartesischen Koordinaten x, y, z). ©: Olaf Fischer.

Von der äquatorialen zur horizontalen Sonnenuhr

[zurück zum Anfang](#)

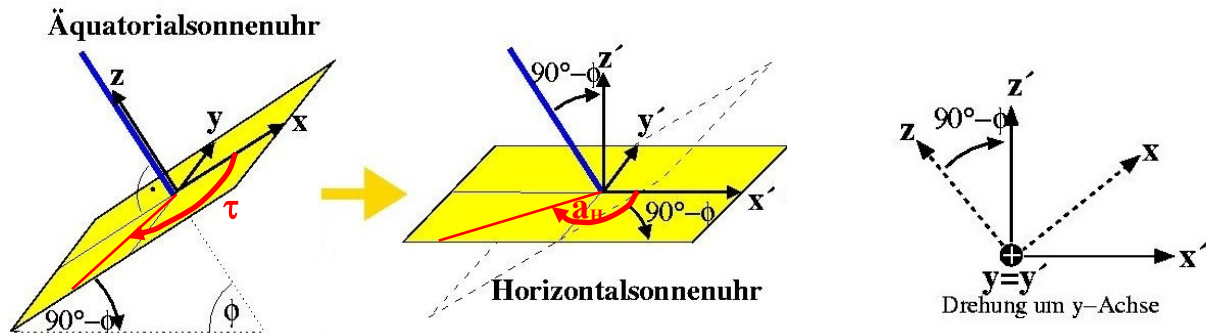


Abbildung 8: Überführung einer äquatorialen Sonnenuhr in eine horizontale Sonnenuhr. Die Stundenlinien (rot) für die dieselbe wahre Ortszeit erscheinen in der Zifferblattebene (gelb) der äquatorialen Sonnenuhr unter dem Winkel τ und in der Zifferblattebene der Horizontalsonnenuhr unter dem Winkel α_H , der in der Regel von τ abweicht.
©: Olaf Fischer.

Für eine Horizontalsonnenuhr wird die Äquatorebene in die Horizontalebene um die Ost-West-Achse um den Winkel $90^\circ - \varphi$ (φ ... geographische Breite) gedreht (siehe Abb. 8), die Drehrichtung, hier mathematisch positiv (Richtung der gekrümmten Finger der rechten Faust, wenn der Daumen in Richtung der Drehachse zeigt), ist dabei für das Aussehen der Matrix durchaus von Belang:

$$\begin{pmatrix} \cos h \cdot \cos \alpha_H \\ -\cos h \cdot \sin \alpha_H \\ \sin h \end{pmatrix} = \hat{D}_y(90^\circ - \varphi) \cdot \begin{pmatrix} \cos \delta \cdot \cos \tau \\ -\cos \delta \cdot \sin \tau \\ \sin \delta \end{pmatrix},$$

$$\hat{D}_y(90^\circ - \varphi) = \begin{pmatrix} \cos(90^\circ - \varphi) & 0 & -\sin(90^\circ - \varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(90^\circ - \varphi) & 0 & \cos(90^\circ - \varphi) \end{pmatrix} \quad (\text{Drehmatrix}).$$

Mit $h = 0^\circ$ (der Schatten liegt ja in der Zifferblattebene) ergibt sich nach Multiplikation:

- I. $\cos \alpha_H = \sin \varphi \cdot \cos \delta \cdot \cos \tau - \cos \varphi \cdot \sin \delta$
- II. $\sin \alpha_H = \cos \delta \cdot \sin \tau$
- III. $0 = \cos \varphi \cdot \cos \delta \cdot \cos \tau + \sin \varphi \cdot \sin \delta$

Nach Vereinfachung von I. unter Nutzung vom III. (Umstellung nach $\sin \delta$, Ersetzung in I., Vereinfachung unter Nutzung des „trigonometrischen Pythagoras“) teilt man II. durch I. und erhält eine einfache Beziehung zur Berechnung der **Winkel α_H der Stundenlinien in der Zifferblattebene der Horizontaluhr** (entspricht dem Azimutwinkel) in Abhängigkeit von den entsprechenden Stundenwinkeln τ und der geographischen Breite φ :

$$\tan \alpha_H = \sin \varphi \cdot \tan \tau.$$

Man beachte: Bei der Berechnung der Winkel α_H der Stundenlinien in der Zifferblattebene mit Hilfe der Arkustangens-Funktion muss zwischen der Stundenwinkelbereichen unterschieden werden (siehe dazu z. B. in [3], S. 27/28). Dieses Problem könnte man umgehen, wenn man die in vielen Programmiersprechen implementierte Funktion $\arctan2$ (<https://de.wikipedia.org/wiki/Arctan2>) nutzt.

Beispiele			
τ (Stundenwinkel der Schattenlinie und entsprechende wahre Ortszeit)	α_H $\varphi = 49,4^\circ$ (Heidelberg)	α_H $\varphi = 51,5^\circ$ (Göttingen)	α_H $\varphi = 54,1^\circ$ (Rostock)
90° (6 ^h)	90°	90°	90°
105° (7 ^h)	$109,4^\circ$	$108,9^\circ$	$108,3^\circ$
120° (8 ^h)	$127,2^\circ$	$126,4^\circ$	$125,5^\circ$
135° (9 ^h)	$142,8^\circ$	$142,0^\circ$	$141,0^\circ$
150° (10 ^h)	$156,3^\circ$	$155,7^\circ$	$154,9^\circ$
165° (11 ^h)	$168,5^\circ$	$168,2^\circ$	$167,8^\circ$
180° (12 ^h)	180°	180°	180°
195° (13 ^h)	$191,5^\circ$	$191,8^\circ$	$192,2^\circ$
210° (14 ^h)	$203,7^\circ$	$204,3^\circ$	$205,1^\circ$
225° (15 ^h)	$217,2^\circ$	$218,0^\circ$	$219,0^\circ$
240° (16 ^h)	$232,8^\circ$	$233,6^\circ$	$234,5^\circ$
255° (17 ^h)	$250,6^\circ$	$252,1^\circ$	$251,7^\circ$
270° (18 ^h)	270°	270°	270°

[zurück zum Anfang](#)

Tabelle 1: Winkel α_H der Stundenlinien in der Zifferblattebene einer Horizontalsonnenuhr für verschiedene geographische Breiten φ , gerundet auf eine Stelle nach dem Komma.

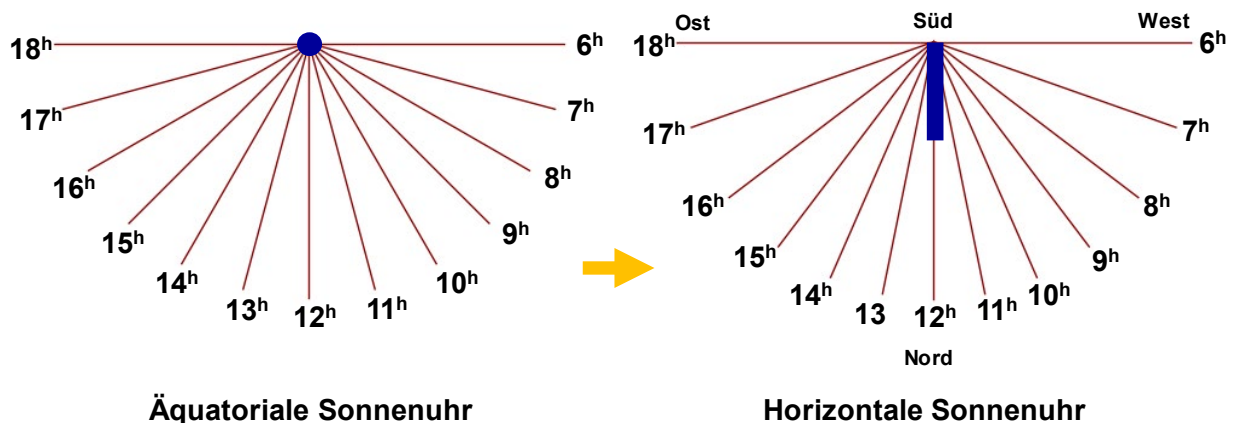


Abbildung 9: Zifferblätter einer äquatorialen Sonnenuhr und einer horizontalen Sonnenuhr (für Heidelberg). Siehe dazu auch in Tab. 1. Die Veränderung der Winkel zwischen den Stundenlinien wird offensichtlich. Während der Schattenstab (dunkelblau angedeutet) bei der Äquatorialsonnenuhr senkrecht auf der Zifferblattebene steht, ist er bei der Horizontalsonnenuhr entsprechend der geografischen Breite geneigt und erscheint so in der gezeigten Draufsicht auf die Zifferblattebene. ©: Olaf Fischer.

Die Diskussion der Formel zur Berechnung der Winkel α_H der Stundenlinien in der Zifferblattebene der Horizontaluhr führt u. a. zum Schluss, dass eine auf dem Pol der Erde stehende Horizontalsonnenuhr gleichzeitig eine Äquatorialsonnenuhr ist.

Eine in Nord-Süd-Richtung um den Winkel i gekippte Horizontalebene bewirkt ein entsprechend anders aufgeteiltes Zifferblatt. Im Sinne der zuvor ausgeführten Überlegungen ergibt sich:

$$\tan \alpha_H = \sin(\varphi + i) \cdot \tan \tau.$$

Von der äquatorialen zur vertikalen Süduhr

[zurück zum Anfang](#)

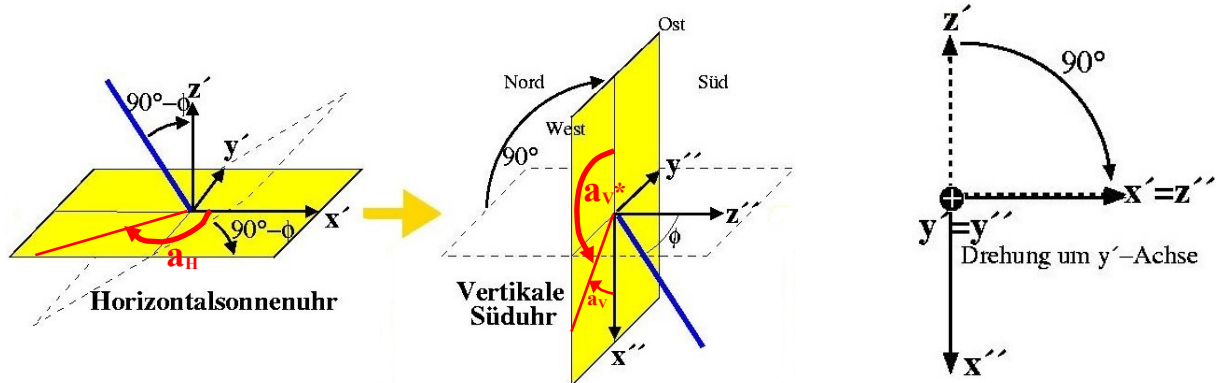


Abbildung 10: Mittels einer weiteren Drehung um 90° wird aus der horizontalen Sonnenuhr eine vertikale Südsunnenuhr. Die Stundenlinien (rot) für die dieselbe wahre Ortszeit erscheinen in der Zifferblattebene (gelb) der Horizontalsonnenuhr unter dem Winkel α_H und in der Zifferblattebene der vertikalen Südsunnenuhr unter dem Winkel α_V . ©: Olaf Fischer.

Für eine vertikale Süduhr muss die Horizontalebene um 90° um die y -Achse weitergedreht werden (eine weitere Drehung / eine weitere Drehmatrix kommt also hinzu, siehe auch Abb. 6):

$$\begin{pmatrix} x_V \\ y_V \\ z_V \end{pmatrix} = \hat{D}_y(90^\circ) \cdot \begin{pmatrix} x_H \\ y_H \\ z_H \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} x_V \\ y_V \\ z_V \end{pmatrix} = \hat{D}_y(90^\circ) \cdot \hat{D}_y(90^\circ - \varphi) \cdot \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix},$$

$$\text{mit } \hat{D}_y(90^\circ) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{Drehmatrix}).$$

Mit $h = 0^\circ$ ergeben sich die Beziehungen zwischen den Äquatorkoordinaten τ und δ und der Koordinate a_V , die diesmal in Bezug auf die genau dem Süden zugewandte Vertikalebene gemessen wird:

- I. $\cos a_V = -\cos \varphi \cdot \cos \delta \cdot \cos \tau - \sin \varphi \cdot \sin \delta$
- II. $-\sin a_V = -\cos \delta \cdot \sin \tau$
- III. $0 = \sin \varphi \cdot \cos \delta \cdot \cos \tau - \cos \varphi \cdot \sin \delta$

Wieder kann man I. unter Anwendung von III. vereinfachen (δ muss sich für eine Polstabhur eliminieren lassen) und anschließend II. durch I. teilen. Man erhält so die Beziehung zur Berechnung der Winkel a_V der von der x'' -Achse (siehe Abb. 10) ausgehend gemessenen **Stundenlinien in der Zifferblattebene der vertikalen Süduhr** in Abhängigkeit von den entsprechenden Stundenwinkeln τ :

$$\tan a_V = -\cos \varphi \cdot \tan \tau,$$

Bemisst man die Stundenlinien ausgehend von der negativen x'' -Achse (siehe Abb. 10 und 12), erhält man unter Nutzung der Beziehung $\tan a_V^* = \tan(180^\circ - a_V) = -\tan a_V$:

$$\tan a_V^* = \cos \varphi \cdot \tan \tau.$$

Man beachte übrigens: Bei der Berechnung der Winkel a_V und a_V^* der Stundenlinien in der Zifferblattebene mit Hilfe der Arkustangens-Funktion muss zwischen der Stundenwinkelbereichen unterschieden werden (siehe dazu z. B. in [3], S. 39).

[zurück zum Anfang](#)

<i>Beispiel</i>		
τ (Stundenwinkel der Schattenlinie und entsprechende wahre Ortszeit)	a_H $\varphi = 49,4^\circ$ (Heidelberg)	a_V^* $\varphi = 49,4^\circ$ (Heidelberg)
90° (6 ^h)	90°	90°
105° (7 ^h)	109,4°	112,4°
120° (8 ^h)	127,2°	131,6°
135° (9 ^h)	142,8°	146,9°
150° (10 ^h)	156,3°	159,4°
165° (11 ^h)	168,5°	170,1°
180° (12 ^h)	180°	180°
195° (13 ^h)	191,5°	189,9°
210° (14 ^h)	203,7°	200,6°
225° (15 ^h)	217,2°	213,1°
240° (16 ^h)	232,8°	228,4°
255° (17 ^h)	250,6°	247,1°
270° (18 ^h)	270°	270°

Tabelle 2: Winkel der Stundenlinien in den Zifferblattebenen einer Horizontalsonnenuhr und einer in Richtung Süden ausgerichteten Vertikalsonnenuhr für die geographische Breite $\varphi = 49,4^\circ$ (Heidelberg), gerundet auf eine Stelle nach dem Komma.

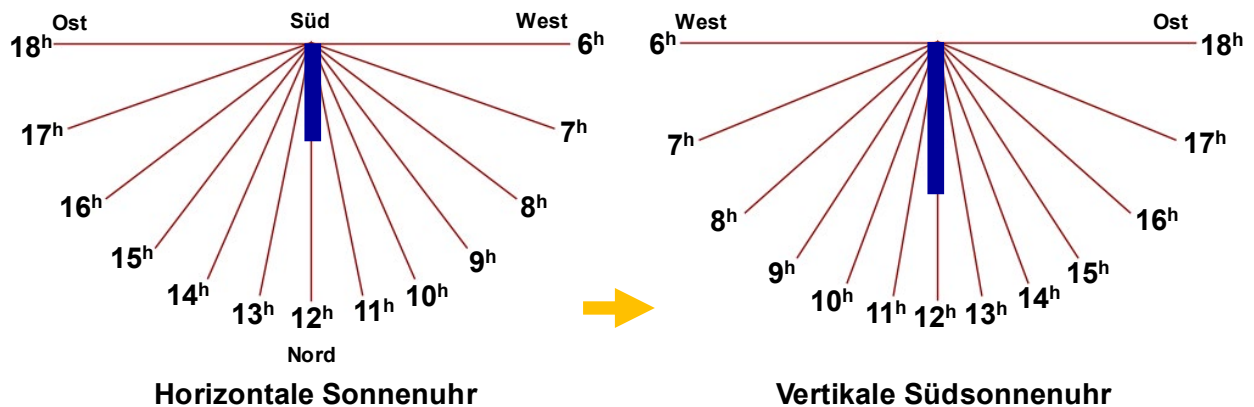


Abbildung 11: Zifferblätter einer horizontalen Sonnenuhr und einer vertikalen Südsonnenuhr für ein und denselben Standort (hier für Heidelberg). Siehe dazu auch in Tab. 2. Der in Projektion sichtbare Schattenstab (dunkelblau angedeutet) erscheint bei der vertikalen Sonnenuhr länger, weil seine Neigung gegenüber der vertikalen Zifferblattebene geringer ist. Man beachte die umgekehrte Winkelmessrichtung (siehe auch Abb. 12). ©: Olaf Fischer.

Während der Schatten bei der horizontalen Sonnenuhr mit a_H (im Uhrzeigersinn) läuft, bewegt sich der Schatten bei der Vertikaluhr gegen a_V (entgegen dem Uhrzeigersinn). Damit erklärt sich das negative Vorzeichen in der Berechnungsvorschrift (siehe Abb. 12).

Vertikale Sonnenuhren werden oft an Hauswänden angebracht. Da die Ausrichtung der Häuser in der Regel nicht (oder nur ungenau) den Himmelsrichtungen folgt (man spricht von einer Wandabweichung), verändert sich die Anordnung der Stundenlinien in der Zifferblattebene im Vergleich zur südlichen Vertikaluhr. Qualitativ lässt sich schon einmal feststellen, dass die zur Mittagslinie bisher noch vorliegende Symmetrie der Stundenlinien verloren geht.

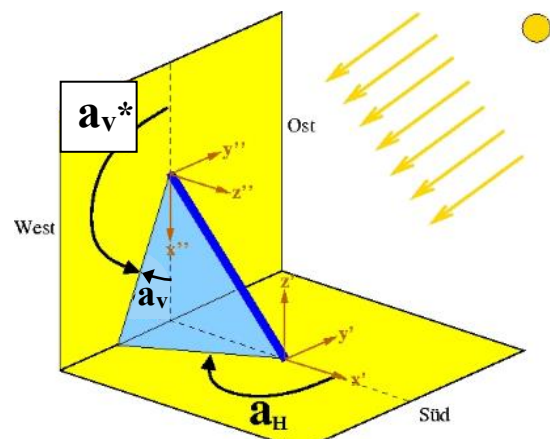


Abbildung 12: Umkehr der Richtung des Schattenlaufs von der horizontalen zur vertikalen Zifferblattebene. Zudem gilt: $\tan a_V^* = \tan (180^\circ - a_V) = -\tan a_V$. ©: Olaf Fischer.

[zurück zum Anfang](#)

Von der vertikalen Süduhr zur Vertikalsonnenuhr mit Wandabweichung

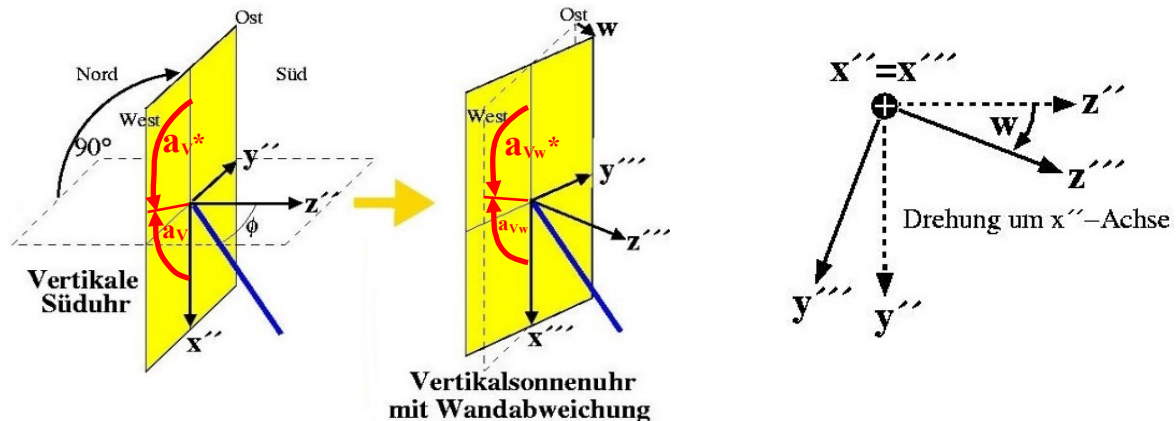


Abbildung 13: Eine dritte Drehung um den Winkel w überführt die vertikale Süduhr in die Vertikalsonnenuhr mit Wandabweichung. w ist positiv, wenn die Normale auf der Zifferblattebene in Richtung West gedreht wird, die Ebene nach der Drehung also in Richtung NW-SO ausgerichtet ist. ©: Olaf Fischer.

Für eine Vertikaluhr mit der Wandabweichung w muss die südlich orientierte Vertikalebene um die x -Achse (siehe Abb. 11, hier x'' - und x''' -Achse) um den Winkel w gedreht werden (ist die Wand danach in Richtung NW-SO ausgerichtet, so ist w positiv):

$$\begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{pmatrix} = \hat{D}_x(w) \cdot \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{pmatrix} = \hat{D}_x(w) \cdot \hat{D}_y(90^\circ) \cdot \hat{D}_y(90^\circ - \varphi) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } \hat{D}_x(w) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos w & \sin w \\ 0 & -\sin w & \cos w \end{pmatrix} \quad (\text{Drehmatrix}).$$

Mit $h = 0^\circ$ ergeben sich nach Matrixanwendung die Beziehungen zwischen den Äquatorkoordinaten τ und δ und dem Winkel a_{vw} , der ausgehend von der x''' -Achse in der von der Ost-West-Ausrichtung abweichenden Vertikalebene gemessen wird:

- I. $\cos a_{vw} = -\cos \varphi \cdot \cos \delta \cdot \cos \tau - \sin \varphi \cdot \sin \delta,$
- II. $-\sin a_{vw} = \sin w \cdot \sin \varphi \cdot \cos \delta \cdot \cos \tau - \cos w \cdot \cos \delta \cdot \sin \tau - \sin w \cdot \cos \varphi \cdot \sin \delta,$
- III. $0 = \cos w \cdot \sin \varphi \cdot \cos \delta \cdot \cos \tau + \sin w \cdot \cos \delta \cdot \sin \tau - \cos w \cdot \cos \varphi \cdot \sin \delta.$

II. vereinfacht sich unter Nutzung von III. zu $\sin a_{vw} = \frac{\cos \delta \cdot \sin \tau}{\cos w}.$

Auch I. wird mit Hilfe vom III. verändert zu $\cos a_{vw} = \frac{\cos \delta \cdot \cos \tau \cdot \cos w + \sin \varphi \cdot \sin w \cdot \cos \delta \cdot \sin \tau}{\cos \varphi \cdot \cos w}.$

Nach Division der veränderten Gleichung II. durch I. erhält man die Beziehung zur Berechnung der Stundenlinienwinkel a_{vw} für die abweichende Vertikaluhr: $\tan a_{vw} = \frac{-\cos \varphi}{\sin w \cdot \sin \varphi + \frac{\cos w}{\tan \tau}}.$

Bemisst man die Stundenlinien ausgehend von der negativen x''' -Achse (siehe Abb. 13), erhält man unter Nutzung der Beziehung $\tan a_{vw}^* = \tan(180^\circ - a_{vw}) = -\tan a_{vw}:$

$$\tan a_{vw}^* = \frac{\cos \varphi}{\sin w \cdot \sin \varphi + \frac{\cos w}{\tan \tau}}.$$

Man beachte übrigens: Bei der Berechnung der Winkel a_{vw} und a_{vw}^* der Stundenlinien in der Zifferblattebene mit Hilfe der Arcustangens-Funktion muss zwischen den Stundenwinkelbereichen unterschieden werden (siehe dazu z. B. in [3], S. 67/68).

[zurück zum Anfang](#)

Beispiele						
τ (Stundenwinkel der Schattenlinie und ent- sprechende wahre Ortszeit)	a_H $\varphi = 49,4^\circ$ (Heidelberg)	a_V^* $\varphi = 49,4^\circ$ (Heidelberg)	a_{Vw}^* $\varphi = 49,4^\circ$ (Heidelberg) $w = 5^\circ$ Westabweichung	a_{Vw}^* $\varphi = 49,4^\circ$ (Heidelberg) $w = 15^\circ$ Westabweichung	a_{Vw}^* $\varphi = 49,4^\circ$ (Heidelberg) $w = -15^\circ$ Ostabweichung	a_{Vw}^* $\varphi = 51,546^\circ$ (Göttingen) $w = -14^\circ$ Ostabweichung
90° (6 ^h)	90°	90°	84,2°	73,2°	106,7°	106,9°
105° (7 ^h)	109,4°	112,4°	107,1°	95,5°	125,0°	125,9°
120° (8 ^h)	127,2°	131,6°	128,8°	119,0°	139,2°	140,3°
135° (9 ^h)	142,8°	146,9°	145,0°	139,8°	150,8°	151,8°
150° (10 ^h)	156,3°	159,4°	158,6°	156,2°	160,8°	161,6°
165° (11 ^h)	168,5°	170,1°	169,9°	169,2°	170,3°	170,7°
180° (12 ^h)	180°	180°	180°	180°	180°	180°
195° (13 ^h)	191,5°	189,9°	189,8°	189,7°	190,8°	190,3°
210° (14 ^h)	203,7°	200,6°	200,0°	199,2°	203,8°	202,6°
225° (15 ^h)	217,2°	213,1°	211,5°	209,2°	220,2°	218,5°
240° (16 ^h)	232,8°	228,4°	225,4°	220,8°	241,0°	239,2°
255° (17 ^h)	250,6°	247,1°	242,9°	235,0°	264,5°	263,5°
270° (18 ^h)	270°	270°	264,2°	253,2°	286,8°	286,9°

Tabelle 3: Die Spalten 2 bis 6 zeigen die Winkel der Stundenlinien in den Zifferblattebenen der Horizontalsonnenuhr (a_H), der vertikalen Südsonnenuhr (a_V^*) und der Vertikalsonnenuhren mit den Wandabweichungen $w = 5^\circ$, 15° und -15° (a_{Vw}^*) für die geographische Breite von Heidelberg ($\varphi = 49,4^\circ$). Die letzte Spalte enthält die Winkel der Stundenlinien für $\varphi = 51,546^\circ$ (Brüder-Grimm-Schule Göttingen) und eine Wandabweichung von $w = -13,5^\circ$. Die Ergebnisse wurden auf eine Stelle nach dem Komma gerundet.

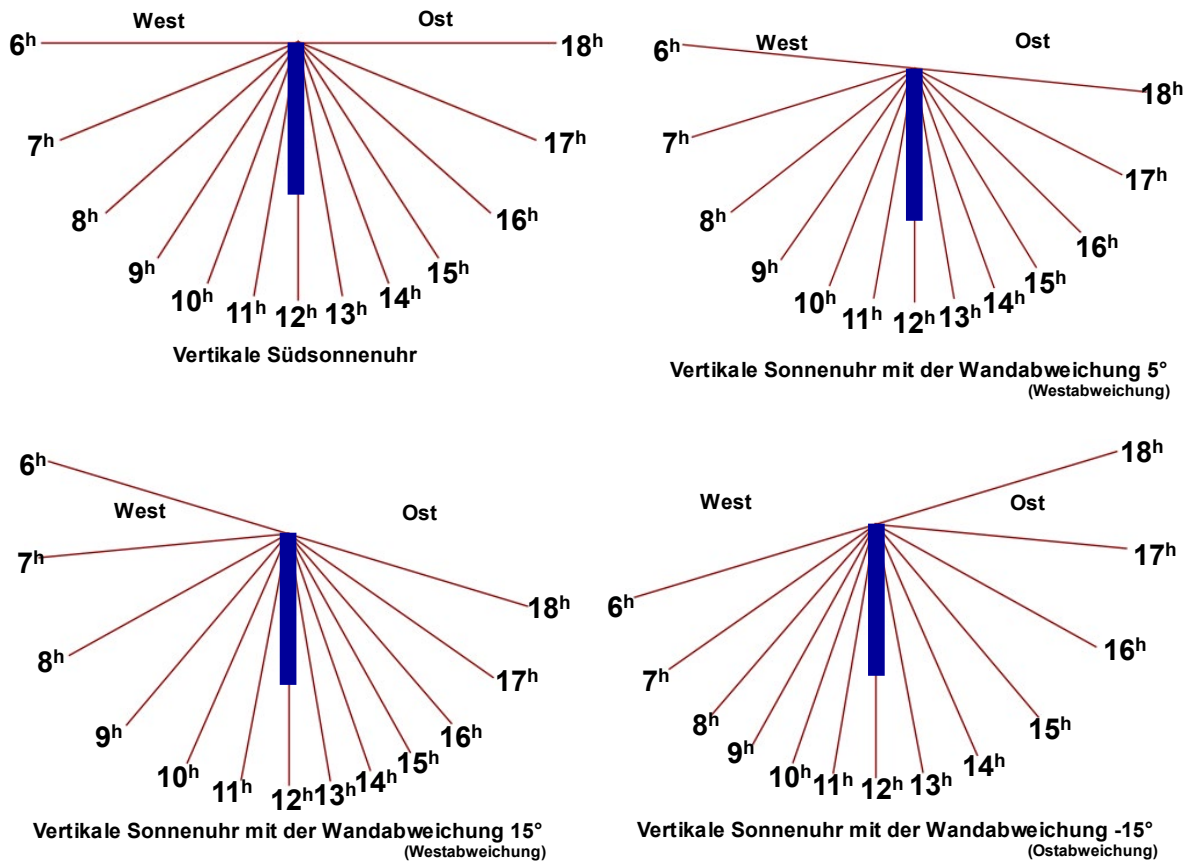


Abbildung 14: Mit den Ergebnissen aus Tab. 3 wurden die Zifferblätter verschiedener Sonnenuhren für den Standort Heidelberg ($\varphi = 49,4^\circ$) dargestellt. Der in Projektion sichtbare Schattenstab ist dunkelblau angedeutet. Man beachte die umgekehrte Winkelmessrichtung (siehe auch Abb. 12). ©: Olaf Fischer.

[zurück zum Anfang](#)

Beträgt die Wandabweichung 90° , so vereinfacht sich die Formel zur Berechnung der Winkel der Stundenlinien auf dem Zifferblatt zu $\tan \alpha_{vw}^* = \cot \varphi$, d. h. die Neigungen der Stundenlinien sind alle gleich. Für ihre Abstände gilt: $d = h / \tan \tau$, wobei h die Höhe des Schattenwerfers über der Zifferblattebene darstellt.

Das vertikale Zifferblatt einer solchen Sonnenuhr, das genau nach Osten oder Westen zeigt (eine **polare Sonnenuhr**), besitzt entsprechend keine strahlenförmig angeordneten, sondern parallele Stundenlinien (siehe Abb. 15). Der Polstab liegt genau in der Zifferblattebene, kann also keinen Fußpunkt besitzen und muss dann in seiner ganzen Länge herausgehoben werden.



Abbildung 15: Polare Westuhr als Teil der Polyeder-Sonnenuhr des Stadtmuseums Göttingen (rechts). Die polare Westuhr „funktioniert“ am Nachmittag. Im Bild wird eine wahre Ortszeit von 13 Uhr (1) angezeigt. ©: Stefan Flöper / Wikimedia Commons, CC BY-SA 4.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=20397285>.

[zurück zum Anfang](#)

Zifferblatt der Vertikalsonnenuhr der Brüder-Grimm-Schule in Göttingen

Abschließend soll das Zifferblatt der Vertikalsonnenuhr der Brüder-Grimm-Schule in Göttingen (Robert-Koch-Straße 11, 37075 Göttingen) auf Grundlage der geografischen Breite der Schule ($\varphi = 51,546^\circ$) und der Kenntnis der Verdrehung der das Zifferblatt tragenden Schulhauswand bezüglich der West-Ost-Richtung (Wandabweichung) berechnet, dargestellt und mit dem Original (siehe auch Abb. 1) verglichen werden (siehe Abb. 16).

Die Wandabweichung wurde mit Hilfe des Programms ‚Google Maps‘ grob ermittelt (siehe Abb. 22 im Anhang). Es ergab sich ein Wert von ca. -14° , d. h. die Normale auf der Wand weicht von der Südrichtung um 14° in Richtung Osten ab. Will man die Wandabweichung genauer erhalten, so empfiehlt sich deren Messung mittels einer einfachen Vorrichtung, wie sie Arnold Zenkert in [2] beschreibt.

[zurück zum Anfang](#)



Abbildung 16: Dem Bild von der vertikalen Sonnenuhr mit Polstab und Wandabweichung an der Hauswand der Brüder-Grimm-Schule Göttingen ($\varphi = 51,546^\circ$, Zifferblattlinien weiß gestrichelt hervorgehoben) wurde das Zifferblatt (die roten Stundenlinien) überlagert, welches mit dem im WIS-Beitrag hergeleiteten Formalismus berechnet wurde.
©: Das Hintergrundfoto stammt von Peter Lindner vom Fachkreis Sonnenuhren [4].

Warum Sonnenuhren oft eine andere Zeit anzeigen – ein kurzes Wort

- **Problem 1: Wahre Ortszeit und Zonenzeit**

[zurück zum Anfang](#)

In früherer Zeit besaß jeder Ort (jedes Kloster, jedes Rathaus, ...) seine eigene Sonnenuhr und hatte damit auch seine eigene Zeit (die **Ortszeit**). Mit der Entwicklung der Mobilität und der weitreichenden Kommunikation (Telegraphie) änderte sich das, indem die **Zonenzeit in den Jahren 1883 und 1884** eingeführt wurde. Die Konsequenz ist, dass die von unserer Armbanduhr angezeigte Zonenzeit i. A. nicht mehr der von der Sonnenuhr angezeigten Ortszeit entspricht. Der Zeitunterschied Δt kann aus dem Längengradunterschied $\Delta \lambda$ zum Bezugsmeridian (für den die Zonenzeit gleich der Ortszeit ist) wie folgt ermittelt werden:

$$\Delta t = \Delta \lambda \cdot \frac{60 \text{ min}}{15^\circ}$$

Für Orte westlich des Bezugsmeridians geht die Sonnenuhr nach, d. h. die Sonne erreicht ihren Höchststand (Mittag) erst später. Für Orte östlich des Bezugsmeridians geht die Sonnenuhr vor, d. h. die Sonne erreicht ihren Höchststand (Mittag) schon früher als an einem Ort auf dem Bezugsmeridian.

Für Deutschland gilt die Zeitzone der mitteleuropäischen Zeit mit dem Bezugsmeridian 15°O , der für Görlitz gilt. Eine Sonnenuhr in Göttingen ($\lambda \approx 9,9^\circ\text{O}$) geht also ca. $\Delta t = (15^\circ - 9,9^\circ) \cdot 60 \text{ min}/15^\circ = 20,4 \text{ min}$ gegenüber der Zonenzeit nach.

- **Problem 2: Wahre Sonne und mittlere Sonne**

[zurück zum Anfang](#)

Ein weiteres Problem, das erst durch den Vergleich einer konstant schnell laufenden Uhr mit einer Sonnenuhr zu Tage tritt, ist, dass die wahren Sonnentage (die Zeitdauer zwischen zwei Sonnenhöchstständen) unterschiedlich lang sind. Dies liegt daran, dass sich der Bezugspunkt (die Sonne) während der scheinbaren Drehung des Himmels zusätzlich vor diesem (scheinbar) bewegt. (In Wirklichkeit bewegt sich ja die Erde mit variierender Geschwindigkeit um die Sonne. Zudem rotiert sie geneigt in Bezug zur Umlaufbahn.). Man könnte dies vergleichen mit einer Uhr, deren Zifferblatt sich auch langsam dreht, und zwar mit variierender Winkelgeschwindigkeit.

Während die Sonnenuhr den (unterschiedlich langen) wahren Sonnentag wiedergibt, zeigt uns die Armbanduhr einen mittleren Sonnentag (der Mittelwert aller wahren Sonnentage eines Jahres) an.

Der aktuelle Unterschied zwischen wahrer Sonnenzeit (wZ) und mittlerer Sonnenzeit (mZ) wird durch die sogenannte **Zeitgleichung** (ZG) angegeben: $ZG = wZ - mZ$.

Grafisch findet die Zeitgleichung im sogenannten Analemma ihren Ausdruck (siehe Abb. 17), welches auf etlichen Sonnenuhren zu finden ist.

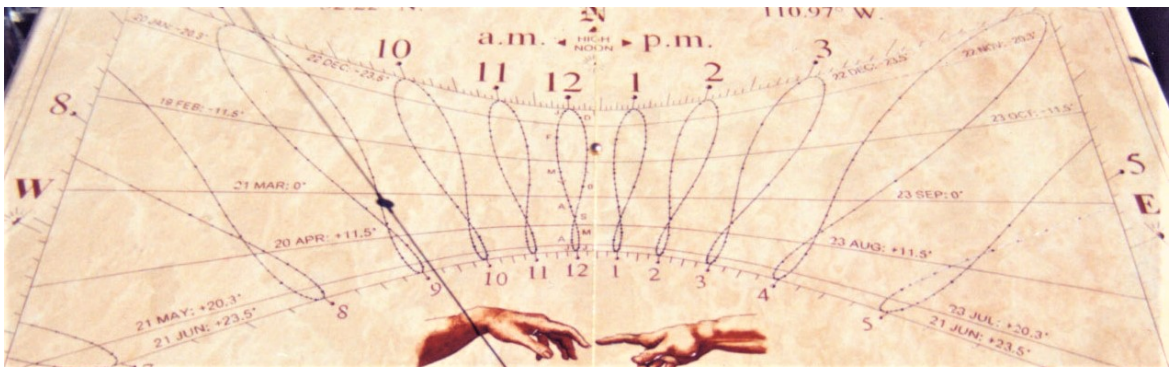


Abbildung 17: Zifferblatt einer beim Flandrau-Planetarium und Science-Zentrum der Universität von Arizona in Tucson befindlichen Horizontalsonnenuhr, hergestellt durch John Carmichael. Jede Stundenlinie wird durch eine Analemma-Kurve (eine Kurve in Form einer ‚Acht‘) repräsentiert. Bei der Ablesung muss nun auch das Datum berücksichtigt werden, um auf dem Analemma die gültige Position aufzusuchen. ©: Von John Carmichael - Eigenes Werk, Gemeinfrei, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=6727429>.

Würfelsonnenuhr – Bauanleitung und Hinweise zur Nutzung

[zurück zum Anfang](#)

Die verschiedenen zuvor vorgestellten Sonnenuhrezifferblätter können auf den verschiedenen Seiten eines Würfels aufgebracht werden und man erhält die sogenannte Würfelsonnenuhr (siehe Abb. 18).

Der schnellste Weg zur Herstellung einer Würfelsonnenuhr basiert auf einem **Schnittbogen-Vordruck** (siehe Abb. 19). Dieser sollte auf stabilem Papier (120 ... 140 g/m²) ausgedruckt werden. Mit den gängigen Druckpapierformaten (A4-Seite: 210 mm × 297 mm, A3-Seite: 297 mm × 420 mm) erhält man dann Würfelkantenlängen von 7,6 cm (A4) und 10,7 cm (A3, siehe Abb. 20).

Im Anhang befindet sich das komprimierte Verzeichnis ‚HdA-Würfelsonnenuhren.7z‘, welches 19 verschiedene Bastelvorlagen für eine Würfelsonnenuhr für 19 verschiedene geografische Breiten von 20°N bis 70°N und 20°S bis 55°S in 5°-Schritten (abgespeichert in 19 pdf-Dateien) enthält. Die fünf für die Sonne „sichtbaren“ Seiten des Sonnen-uhrenwürfels tragen die Zifferblätter von Polstab-Sonnenuhren, die (fast alle) im WIS-Beitrag eingeführt wurden.

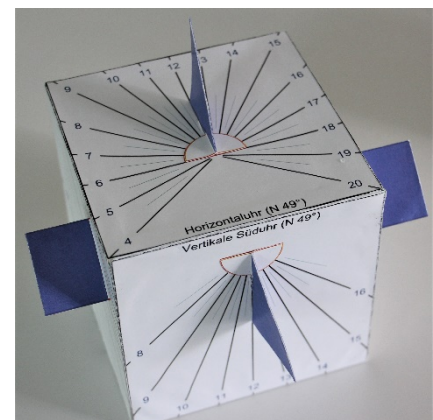


Abbildung 18: HdA-Würfelsonnenuhr.
©: Thomas Müller, Olaf Fischer / HdA.

[zurück zum Anfang](#)

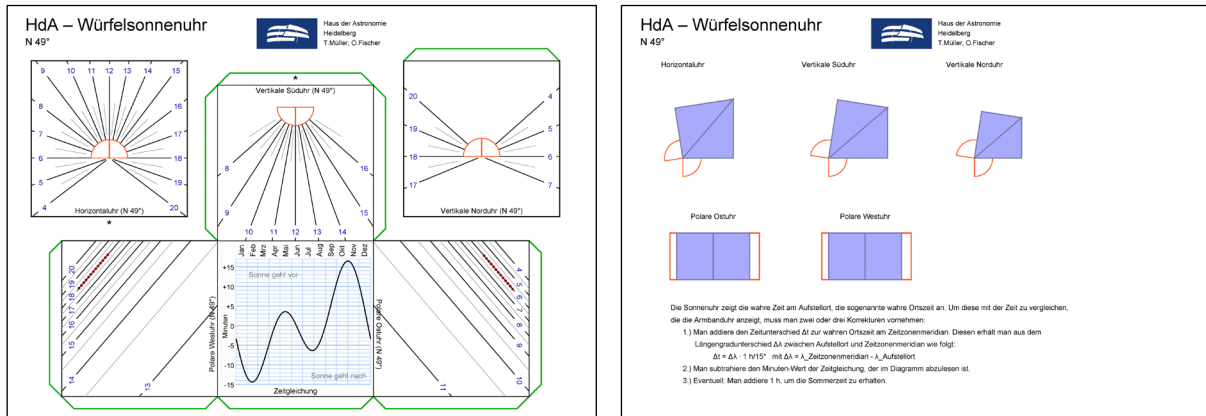


Abbildung 19: Zweiseitiger Schnittbogen für die HdA-Würfelsonnenuhr. ©: Thomas Müller, Olaf Fischer / HdA.

Im Anhang befindet sich neben den Schnittbogen-Vordrucken auch eine **Anleitung zum Bau und zur Nutzung der Sonnenuhr** für die Hand des Schülers.

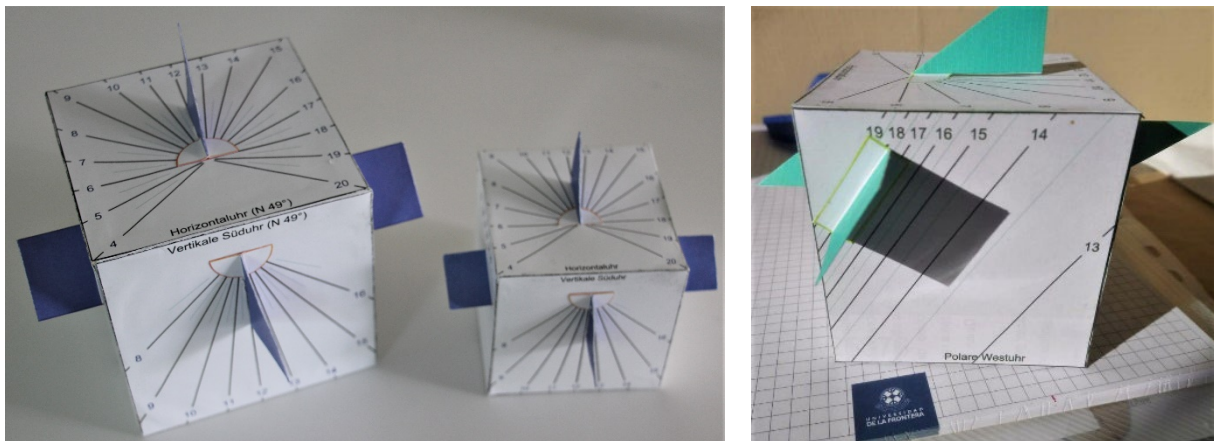


Abbildung 20: Links: HdA-Würfelsonnenuhr für den Breitengrad von Heidelberg auf Grundlage von Ausdrucken auf A3-Papier und A4-Papier. ©: Thomas Müller, Olaf Fischer / HdA. Rechts: HdA-Würfelsonnenuhr für den 35. Breitengrad auf der Südhalbkugel. ©: Guillermo Avello, Concepcion / Chile.

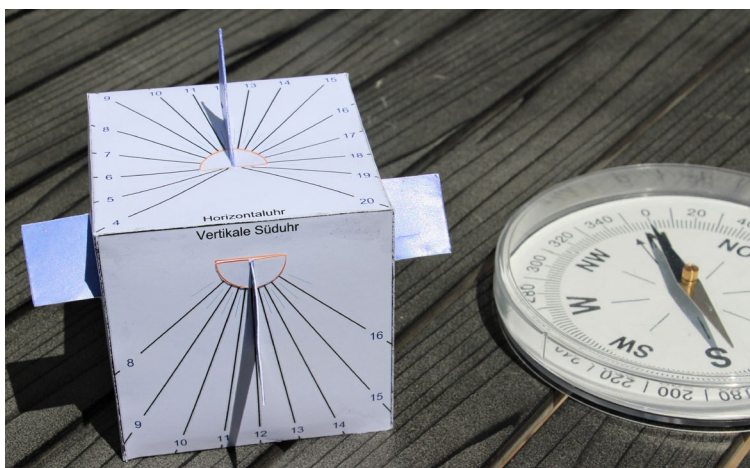


Abbildung 21: Damit die Würfelsonnenuhr (mit Sonnenuren, die auf dem Polstabprinzip beruhen) genau „funktioniert“, muss sie exakt in Nord-Süd-Richtung ausgerichtet werden, damit die Schattenwerferkanten exakt zum Himmelspol zeigen (und damit als Polstäbe fungieren). Im Rahmen der erzielbaren Genauigkeit genügt zunächst die Ausrichtung mit Hilfe eines Kompass.

©: Thomas Müller, Olaf Fischer / HdA.

Quellen

[zurück zum Anfang](#)

- [1] Fischer, Olaf: „Modelle und Experimente – Brücken zu Vorstellungen und Erkenntnissen der Astronomie“, Habilitationsschrift, Friedrich-Schiller-Universität Jena, 2005, Abschnitt „Sonnenuhren - Funktionsprinzipien und Berechnungsgrundlagen“ (S. 33 - 45)
- [2] Zenkert, Arnold: „Bestimmung der Wandabweichung – ganz einfach und ohne Berechnung“, Alpha, Mathematische Schülerzeitschrift, Heft 6, Dezember 1992, 26. Jahrgang, S. 25
- [3] Beucher, Ottmar: „Sonnenuhren. Ein geometrieanalytischer Ansatz zu deren Verständnis, Berechnung und Konstruktion“, https://www.researchgate.net/profile/Ottmar-Beucher/publication/341568113_Sonnenuhren/links/5ec79be6a6fdcc90d68cb216/Sonnenuhren.pdf (Stand Mai 2020)
- [4] Private Kommunikation (Mai 2021) mit Peter Lindner, stellvertretender Vorsitzender des Fachkreises Sonnenuhren (unter dem Dachverband „Deutsche Gesellschaft für Chronometrie e.V.“ (kurz DGC)). Der Fachkreis wurde 1971 in der Fuchs'schen Mühle Weinheim gegründet und könnte laut Aussage von Peter Lindner der älteste Sonnenuhrenverein der Welt sein. In Deutschland hat der Fachkreis z.Z. über 17.000 ortsfeste Sonnenuhren registriert. Für jede dieser Sonnenuhren existiert eine Dokumentation samt einer Nummer (DGC-Nummer). Die Sonnenuhr der Brüder-Grimm-Schule in Göttingen wird unter der Nummer „DGC 1882“ geführt.

Zusatzmaterialien in digitaler Form

- Schnittbogen-Vordrucke:
Die anhängende zip-Datei ‚**HdA-Würfelsonnenuhren.7z**‘ enthält die folgenden 19 pdf-Dateien mit Schnittbögen zu Würfelsonnenuhren für die im Dateinamen ersichtlichen Breitengrade
 - **HdA-Würfelsonnenuhr_N20.pdf**
 - **HdA-Würfelsonnenuhr_N25.pdf**
 - **HdA-Würfelsonnenuhr_N30.pdf**
 - **HdA-Würfelsonnenuhr_N35.pdf**
 - **HdA-Würfelsonnenuhr_N40.pdf**
 - **HdA-Würfelsonnenuhr_N45.pdf**
 - **HdA-Würfelsonnenuhr_N50.pdf**
 - **HdA-Würfelsonnenuhr_N55.pdf**
 - **HdA-Würfelsonnenuhr_N60.pdf**
 - **HdA-Würfelsonnenuhr_N65.pdf**
 - **HdA-Würfelsonnenuhr_N70.pdf**
 - **HdA-Würfelsonnenuhr_S20.pdf**
 - **HdA-Würfelsonnenuhr_S25.pdf**
 - **HdA-Würfelsonnenuhr_S30.pdf**
 - **HdA-Würfelsonnenuhr_S35.pdf**
 - **HdA-Würfelsonnenuhr_S40.pdf**
 - **HdA-Würfelsonnenuhr_S45.pdf**
 - **HdA-Würfelsonnenuhr_S50.pdf**
 - **HdA-Würfelsonnenuhr_S55.pdf**
- ‚**Bastel- und Nutzungsanleitung – Würfelsonnenuhr.pdf**‘
Anleitung zum Bau und zur Nutzung der Sonnenuhr für die Hand des Schülers

ANHANG

[zurück zum Anfang](#)

Wandabweichung der Schulhauswand für das Zifferblatt der Vertikalsonnenuhr der Brüder-Grimm-Schule in Göttingen

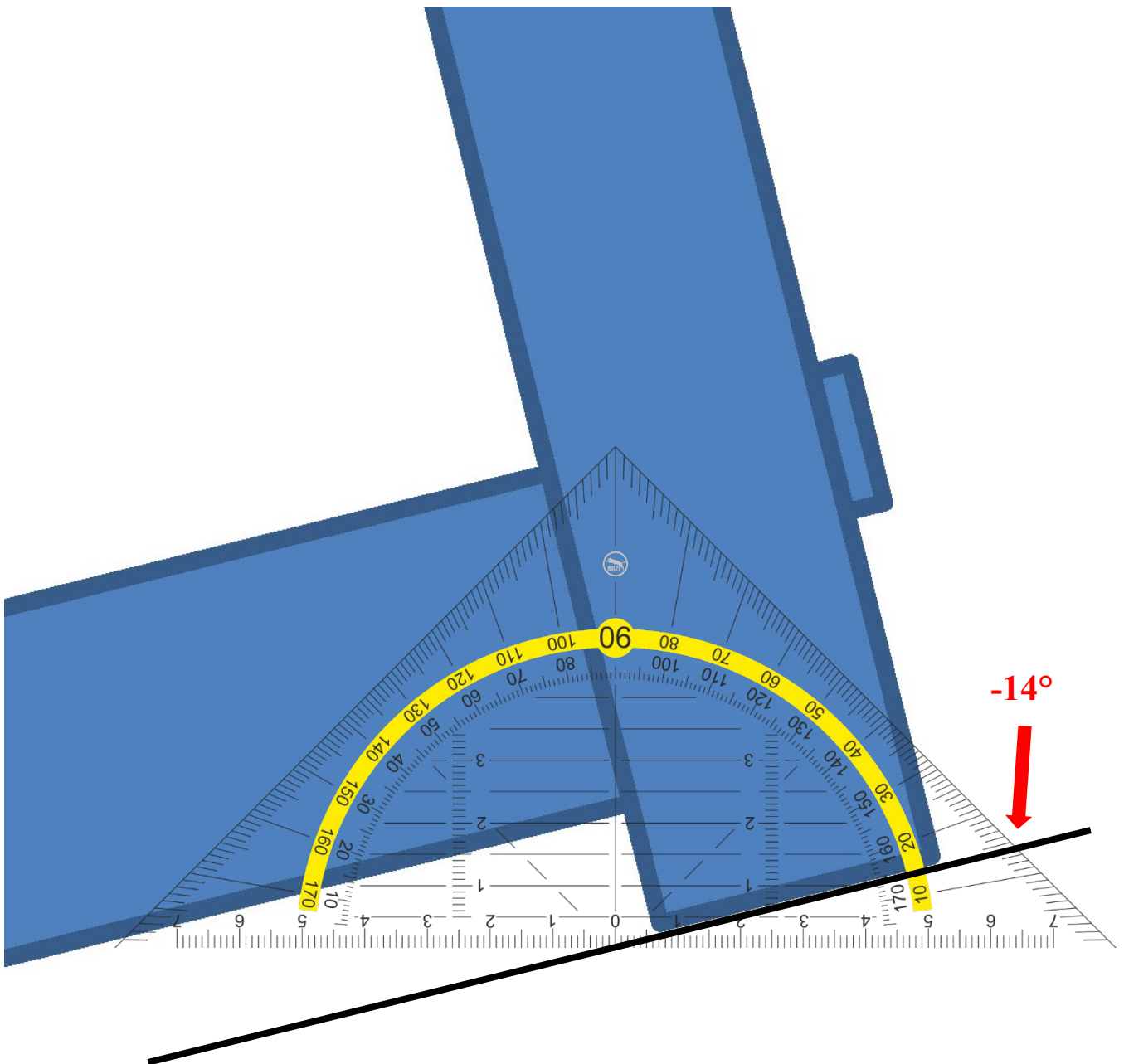


Abbildung 22: Unter Nutzung eines Google-Maps-Bildes wurde der Grundriss eines Teils des Schulhauses der Brüder-Grimm-Schule in Göttingen erstellt. Für die Wandabweichung der Sonnenuhrenwand (orange markiert) wurde ein Wert von -14° ermittelt. ©: Bild Winkelmesser von Michael Zimmermann - selbst mit CorelDrawX5 erstellt, Gemeinfrei, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=27013415>.

Schnittbögen für Würfelsonnenuhren auf der Nord- und der Südhalbkugel der Erde

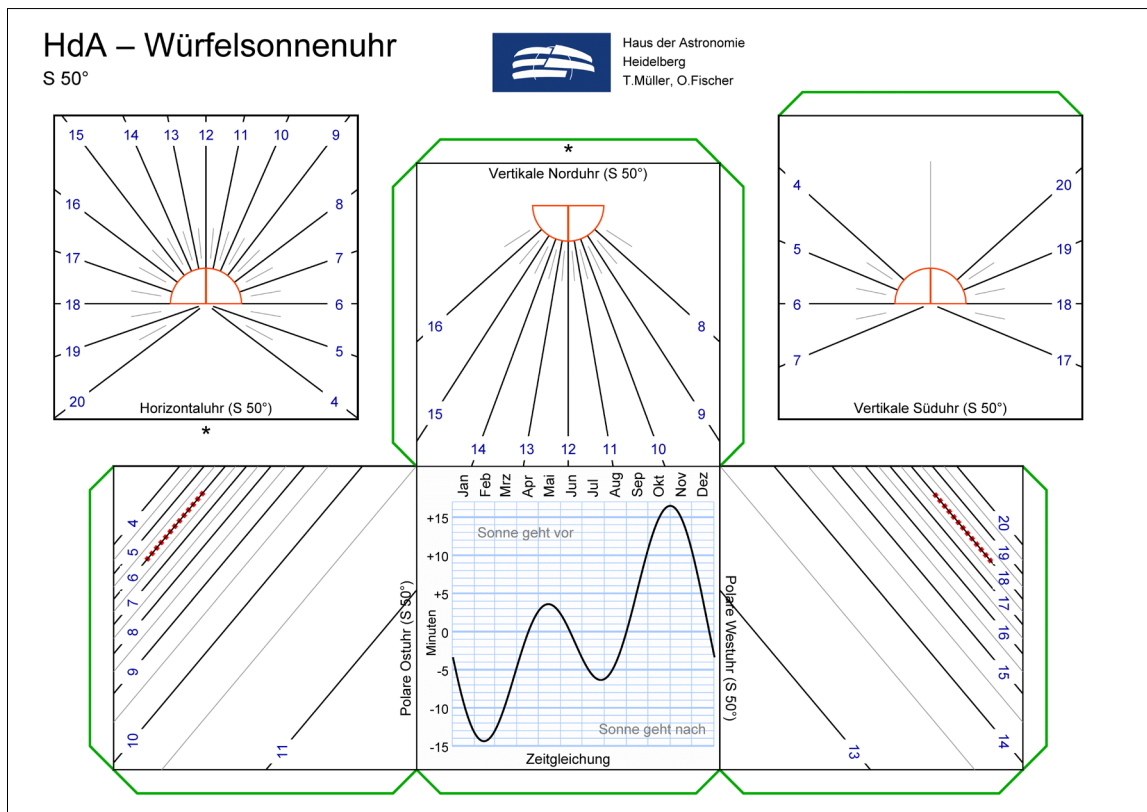
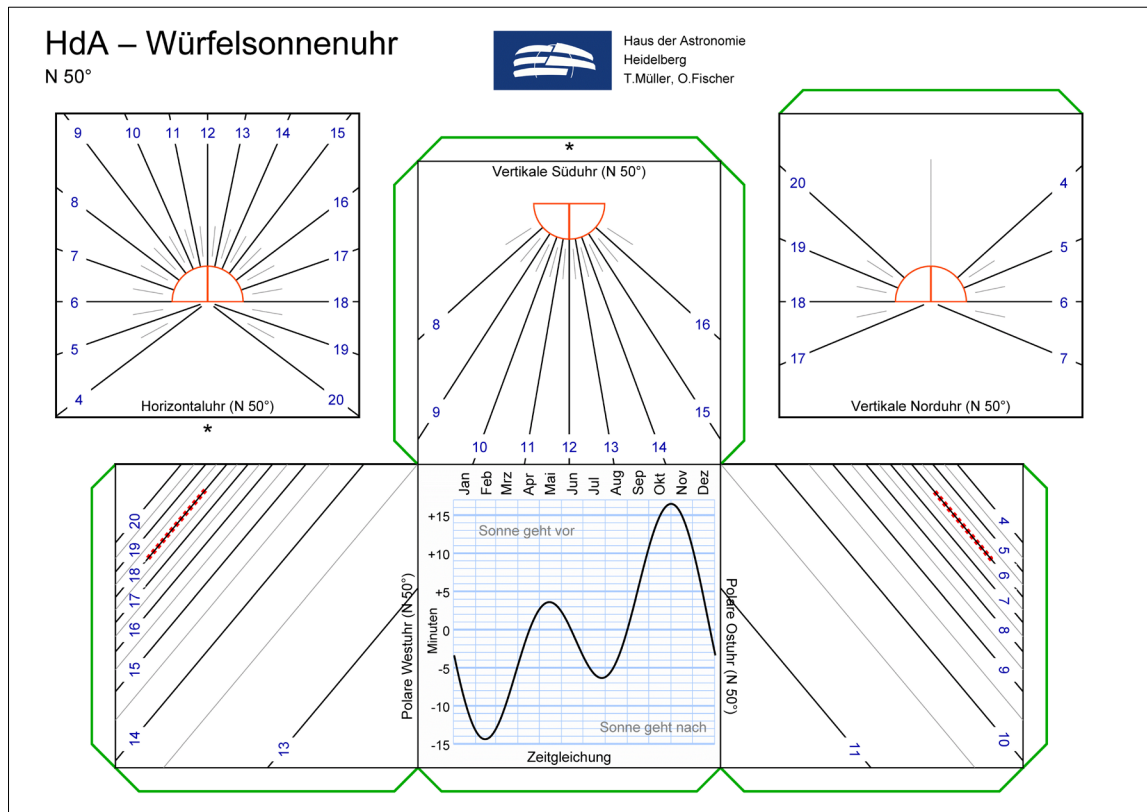


Abbildung 23: Bei den Bastelvorlagen zu Würfelsonnenuhren für die geografischen Breiten von $\varphi = 50^\circ\text{N}$ und 50°S fällt auf, dass sie bis auf die Richtung der Stundenzählung bei der Horizontaluhr, der vertikalen Süduhr und der vertikalen Norduhr identisch sind. ©: Thomas Müller, Olaf Fischer / HdA.