Wie ein Gnomon-Schatten Mackenna half, den Schatz zu finden

Betrachtungen zu Gnomonen

In Bezug zu „Sonne aktuell“ in der Rubrik „Aktuelles am Himmel: Sonnensystem“ in SuW 10/2021 und zu den „SzeneNews“ in der Zeitschrift SuW 9/2021, WIS-ID: 1571290, Zielgruppe: Oberstufe

Olaf Fischer

Sobald die Sonne scheint, können wir Schattenwürfe durch die uns umgebenden Objekte beobachten. Bald bemerken wir dabei, dass der Schattenwurf (Richtung und Länge des Schattens) tageszeitabhängig ist und einige Tage später bemerken wir auch die jahreszeitliche Abhängigkeit.

Im folgenden WIS-Beitrag soll der Schattenwurf eines Gnomons betrachtet werden. Dabei geht es um die Schattenlänge in Abhängigkeit von der Tageszeit, ganz zentral um die Wege und die Geschwindigkeiten der Schattenspitze zu verschiedenen Tages- und Jahreszeiten und abschließend um das Ende des Kernschattens. Es ergeben sich verschiedene interessante Feststellungen und Möglichkeiten für Schüleraktivitäten.

Die sich schnell bewegende Schattenspitze der Feldnadeln „Spider Rocks“ (siehe Abb. 1) bei tief stehender Sonne spielt im 1969 erschienenen amerikanischen Western „Mackenna's Gold“ eine wichtige Rolle und beeindruckt den Zuschauer. Im WIS-Beitrag wird auch gezeigt, wie man mit etwas Gnomon-Wissen den Schattenweg der „Spider Rocks“ selbst berechnen kann.

Übersicht der Bezüge im WIS-Beitrag		
Astronomie	**Positionsastronomie, Astropraxis**	Gnomon, gnomonische Sonnenuhr, Sonnenlauf und Änderung von Schattenlänge und Schattenrichtung, Wege der Schattenspitze eines Gnonoms bei verschiedenen geografischen Breiten, Schattenlängenänderung durch Erdrotation, Kernschattenlänge, Transformationsbeziehungen zwischen Horizont- und Äquatorkoordinaten, Schattenbeobachtung
Physik	**Optik**	Schatten, Kern- und Halbschatten, lange Schatten
Fächer-verknüpfung	**Astro - Mathematik** **Astro - Informatik** **Astro - Geografie** **Astro - Deutsch**	Trigonometrie, Strahlensatz, Koordinatenransformation Programmierprojekt, Programmieraufgabe, Computersimulation Schattenwurf durch Windräder, Orientierung auf Luftaufnahmen einer Natur- oder Stadtlandschaft, Spider Rocks, Berliner Fernsehturm Schattenlauf und Filmgeschehen
Lehre allgemein	**Kompetenzen (Erkenntnisgewinnung und Wertung), Unterrichtsmittel**	können Rechnungen zu Gnomon-Schatten durchführen, erkennen Aktualität des Themas in Bezug zur Aufstellung von Windrädern, Planung einer Schattenbeobachtung, Aufgaben zu Gnomonen

Abbildung 1: Links: Kinoplakat zum 1969 erschienenen amerikanischen Western „Mackenna's Gold“, in dem der Schattenwurf der Felsnadeln „Spider Rocks“ eine wichtige Rolle spielt. ©: PD-US, https://en.wikipedia.org/w/index.php?curid=10538762. Rechts: Die ca. 240 m hohen Felsnadeln der Spider Rocks im Canyon de Chelly (Arizona, USA). ©: NPS Photo - http://www.nps.gov/imr/pgallerycontent/p/l/20100304164718.JPG, Public Domain, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=9694670.

Der Gnomon

zurück zum Anfang

Ein Gnomon bezeichnet einen senkrechten Schattenwerfer. Im Alltag sind wir von Objekten (Häusern, Türmen, Bäumen, …) umgeben, die bei Sonnenschein zum Teil beeindruckende Schatten werfen. Der Schattenwurf ist dabei meistens eine Begleiterscheinung, die manchmal sogar unerwünscht ist. Beim Gnomon als Messinstrument soll ein **Schatten** erzeugt werden.
Durch Auswertung der Schattenlänge kann man bei gegebener Höhe des Schattenwerfers den Höhenwinkel ***h*** (der in der Astronomie kurz als Höhe bezeichnet wird) der Sonne ermitteln (siehe dazu Abb. 2). Der Gnomon bietet verschiedene Möglichkeiten zur Anwendung der **trigonometrischer Schulkenntnisse.**
Irdisch wichtig kann das „Gnomonwissen“ für die Bestimmung der Höhe von Bauwerken, wie z. B. des Eiffelturms sein (modellhaft in Abb. 2). Misst man sowohl die Höhe ***h*** der Sonne als auch die Länge des Schattens ***l***, so kann man daraus die Höhe ***H*** (Strecke) des Turms ermitteln.
Astronomisch bedeutsam kann der Gnomon sein, um aus bekannter Gnomonlänge ***H*** und vermessener Schattenlänge ***l*** die Höhe der Sonne im Meridian (in Südrichtung) zu bestimmen. Aus dieser kann man dann bei bekannter geografischer Breite des Beobachtungsorts die Deklination der Sonne und damit schließlich das Datum ermitteln. Man kann aber auch umgekehrt bei Kenntnis der Deklination die geografische Breite des Beobachtungsortes ermitteln.
Desweiteren lässt sich bei Voraussetzung von Deklination (also Datum) und geografischer Breite aus der Schattenlänge der Stundenwinkel der Sonne, der die wahre Ortszeit angibt, berechnen (siehe im Folgenden).

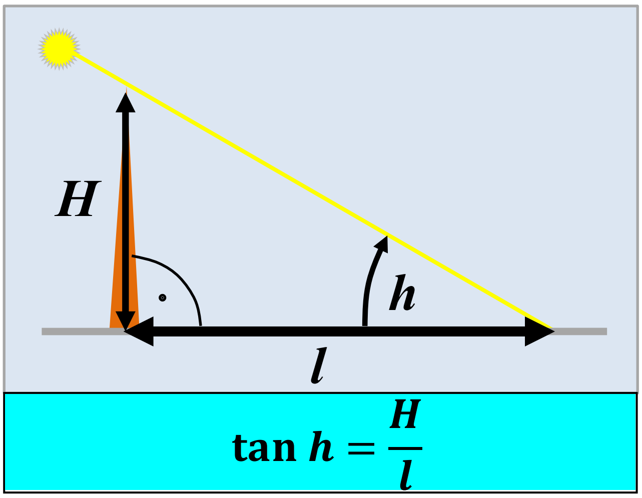


Abbildung 2: Links: Freihandexperiment mit einem „Alltagsgnomon“, d. h. mit einem senkrecht auf dem Tisch stehenden Gegenstand. Wichtig ist dabei die Markierung des Fußpunktes des die Schattenspitze erzeugenden Gegenstandsteils. ©: Von Pazoulis - Eigenes Werk, CC0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=15620832. Rechts: Grundlegende schematische Darstellung der Situation und der beteiligten Größen.

zurück zum Anfang

Aufgabe 1 - Gnomon und Trigonometrie

Berechne die Länge des Schattens, den die 240 m hohe Felsnadel der „Spider Rocks“ im Canyon de Chelly (Arizona, USA) bei einem Sonnenstand von 5° Höhe wirft.

Die Schattenlänge als Zeitmaßstab

zurück zum Anfang

Der Gnomon kann, was die Konstruktion angeht, als die einfachste aller Sonnenuhren angesehen werden. Die mathematischen Zusammenhänge sind jedoch etwas „verzwickter", weil die Zeitanzeige nicht nur vom Stundenwinkel der Sonne τ_{Sonne}, sondern auch noch von ihrer Deklination δ_{Sonne} abhängt. So existiert zum einen eine Zweideutigkeit im Jahreslauf der Sonne (δ_{Sonne} = +23,45° ... -23,45°), die sich dadurch äußert, dass die Sonne i. A. an zwei Tagen des Jahres gleiche Mittagshöhen erreicht Zum anderen hat man es mit der Zweideutigkeit der Höhe im Tagbogen der Sonne zu tun, d. h. an einem Tag kommt eine Sonnenhöhe i. A. zweimal vor.
Nebenbei sei gesagt, dass man die Abhängigkeit von der Deklination der Sonne (siehe Abb. 3) umgehen kann, wenn man den Schattenstab nicht senkrecht, sondern in Richtung der Erdachse ausrichtet (Schattenstab = Polstab). Bei einer derartigen Polstab-Sonnenuhr hängt die angezeigte Schattenrichtung allein vom Stundenwinkel der Sonne ab (siehe dazu auch in WIS 9/2021 „Wie kommt eine Sonnenuhr an die Schulhauswand?").
Abb. 3 zeigt das Zifferblatt einer polaren Sonnenuhr (einer Polstab-Sonnenuhr, bei der die Stundenlinienabstände nur von der geografischen Breite φ abhängen). Befindet sich dieses in der Horizontebene, dann entspricht es demjenigen einer Gnomon-Sonnenuhr, bei der dann aber nur eine Hälfte benötigt wird und die Stundenlinienabstände neben der φ-Abhängigkeit auch von der Deklination der Sonne abhängen.

Zur Berechnung der Stundenlinienabstände des Zifferblatts einer **gnomonischen Sonnenuhr** muss zunächst die Sonnenhöhe h berechnet werden. Dazu kann eine der Transformationsbeziehungen zwischen Horizont- und Äquatorkoordinaten genutzt werden:

$$\sin h = \cos\varphi \cdot \cos\tau \cdot \cos\delta + \sin\varphi \cdot \sin\delta.$$

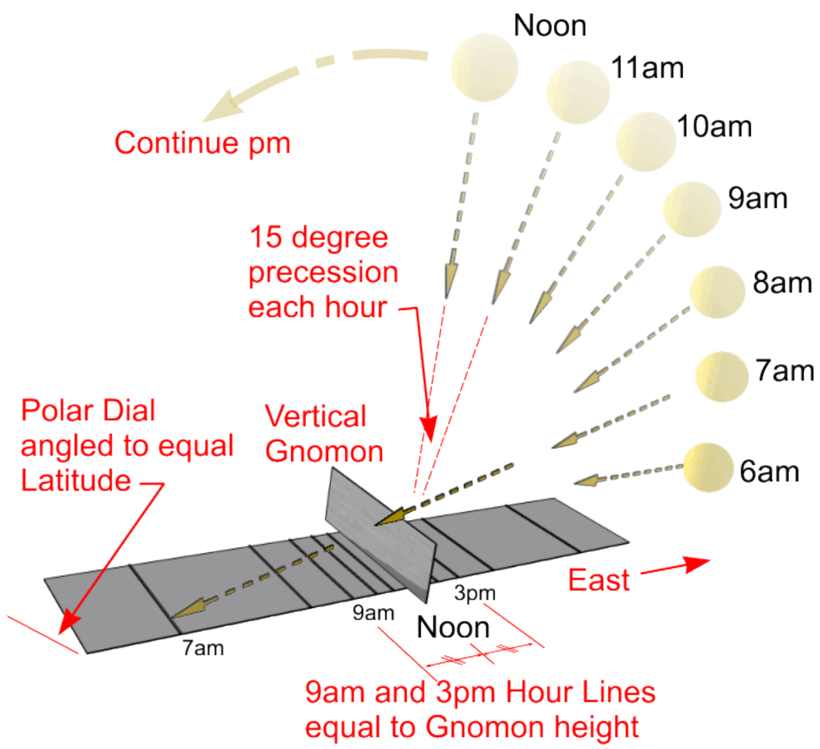
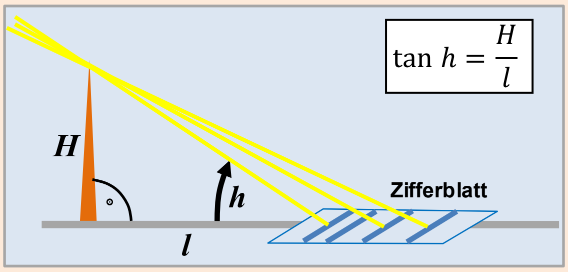


Abbildung 3: Die Grafik zeigt zwar das Zifferblatt einer polaren Sonnenuhr, doch in horizontaler Lage der Zifferblattebene entspricht es dem prinzipiellen Aussehen einer Gnomon-Sonnenuhr, bei der dann aber nur eine Hälfte benötigt wird und die Stundenlinienabstände nur für bestimmte Tage des Jahres (also für bestimmte Sonnendeklinationen) gelten. ©: Design and Technology Online, http://wiki.dtonline.org/index.php/Exploring_Sundials, CC BY-NC-SA 3.0, https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/, http://wiki.dtonline.org/index.php/File:PolarSundial3.png.

zurück zum Anfang

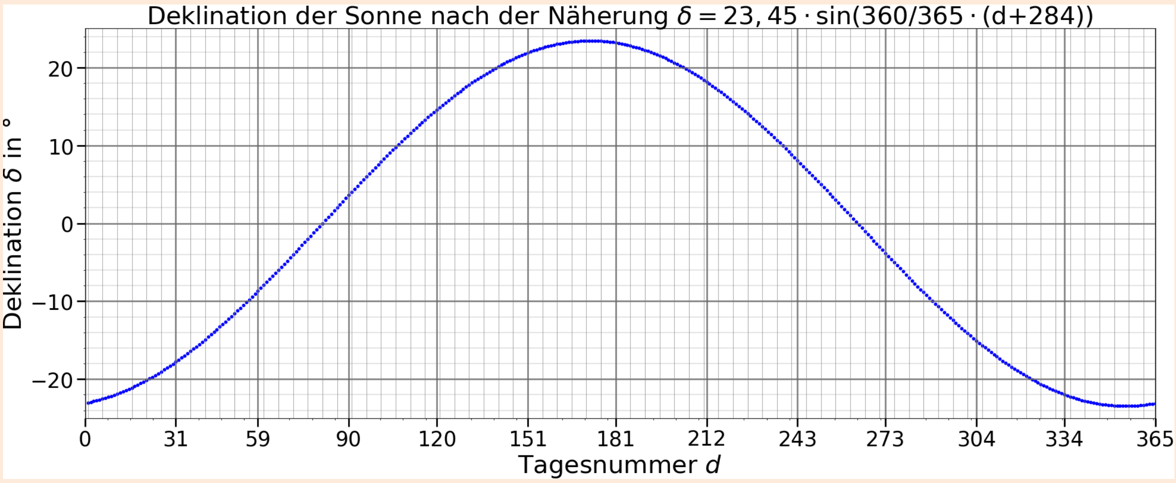
Aufgabe 2 – Gnomon als Sonnenuhr



Berechne das Zifferblatt für eine Gnomon-Sonnenuhr (siehe Bild), das für Orte mit einer geografischen Breite von $\varphi = 50°$ am 31. Mai gültig ist!
Nutze dazu zunächst die mathematische Beziehung, die den Zusammenhang herstellt zwischen dem Stundenwinkel τ der Sonne (der die wahre Ortszeit wiedergibt) und der Höhe h der Sonne, ihrer Deklination δ und der geografischen Breite φ.

$$\boxed{\sin h = \cos\varphi \cdot \cos\tau \cdot \cos\delta + \sin\varphi \cdot \sin\delta.}$$

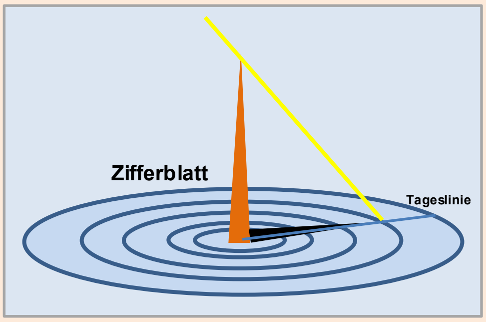
Die für die Rechnung benötigte Deklination der Sonne kannst du aus dem anhängenden Diagramm ablesen. Die Abstände l der Zifferblattlinien vom Fußpunkt der Gnomonspitze können mit der ebenfalls gegebenen trigonometrischen Beziehung berechnet werden. Dazu wird für den Gnomon eine Höhe H von 0,2 m angenommen.



zurück zum Anfang

Aufgabe 3 – Gnomon als Sonnenuhr für ein Jahr – ein Informatik-/Technikprojekt

Erstelle ein **Computerprogramm** zum Ausdruck eines ganzjährig verwendbaren Zifferblatts für eine gnomonische Sonnenuhr und nutze dieses, um eine Gnomon-Sonnenuhr für deinen Heimatort herzustellen!



Das Zifferblatt soll auf einer in der Horizontebene drehbaren Kreisscheibe aufgebracht werden, die jeweils so eingestellt wird, dass der Schatten auf die Tageslinie fällt.
Das schematische Bild rechts ist dahingehend falsch, dass die Linien gleicher Uhrzeit für ein Jahr keine Kreise sind, weil die Sonnenhöhen für gleiche Uhrzeiten sich von Tag zu Tag unterscheiden.
Zur Berechnung der Schattenlängen $\boldsymbol{l}$, der dafür benötigte Sonnenhöhen $\boldsymbol{h}$ und der wiederum dafür benötigten Sonnendeklinationen $\boldsymbol{\delta}$ können die schon in Aufgabe 3 direkt oder indirekt genutzten Formalismen genutzt werden.

Wege der Schattenspitze

zurück zum Anfang

Die täglichen Wege der Schattenspitze eines Gnomons ändern sich von Tag zu Tag in Abhängigkeit von der Deklination der Sonne und sind zudem auch abhängig vom Breitengrad. Die Schattenlänge ändert sich dabei mit der Änderung von Höhe und Azimut der Sonne.
Mit Hilfe der Formalismen im Anhang (die zum großen Teil hier zuvor schon zur Anwendung kamen) können die Positionen der Schattenendpunkte für jeden Zeitpunkt eines Tages und jeden Tag des Jahres berechnet werden. Die Ermittlung der Wege der Schattenendpunkte für einen gegebenen Schattenwerfer könnte Thema für ein **Programmierprojekt** sein.

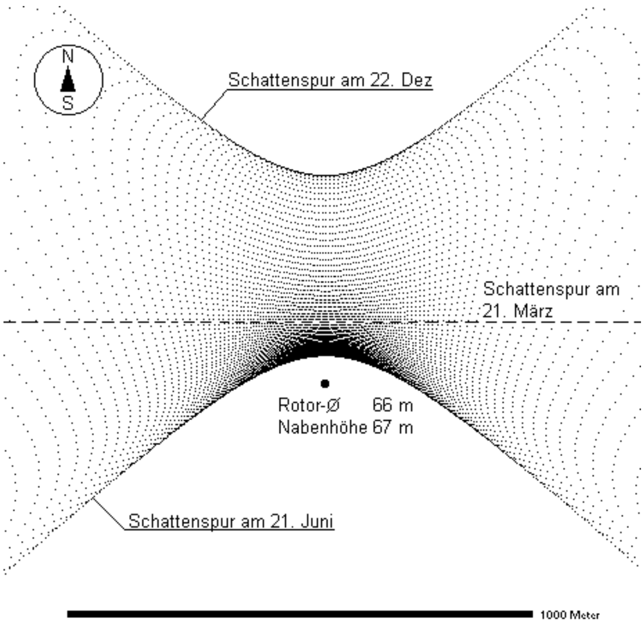


Abbildung 4: Links: Ergebnis der Computersimulation des Verlaufs der Schattenendpunkte (Bereich der Verschattung für alle Tages- und Jahreszeiten) eines Windrads. ©: Roland Fischer, CC BY-SA 2.0 de, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=23788633. Rechts: Schatten eines Windrads bei einer Sonnenhöhe von etwas mehr als 50°. ©: O. Fischer.

Abbildung 5: Blick in den Canyon de Chelly (Arizona / USA) mit den Spider Rocks im Vordergrund. ©: By Linda Morehhouse - Own work, CC BY-SA 4.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=73145826.

Ein sehr aktuelles Beispiel für derartige Berechnungen findet man in **Computersimulationen**, die zur Vorhersage des **Schattenverlaufes in der Umgebung von Windrädern** gemacht werden (siehe dazu z. B.: Abb. 4, sowie bei [2] und [3]).
Für ein „rundes Gnonomwissen" ist es zunächst erforderlich, ganz prinzipiell die Wege der Endpunkte der im Tages- und Jahresverlauf geworfenen Schatten für Gnomone zu berechnen und darzustellen, die sich **bei allen möglichen Breitengraden** befinden. Die Ergebnisse dieser Simulationen werden in Abb. 6 gezeigt.
Im Weiteren wird dann auf den anfangs (S. 1) genannten Schattenwurf der Spider Rocks eingegangen. Dieser weist im ebenfalls erwähnten **Filmgeschehen** an einem bestimmten Tag des Jahres kurz nach Sonnenaufgang auf den richtigen Eingang in den Canyon de Chelly, der im Film „Canyon del Oro" heißt und einen Goldschatz beherbergt. Dazu werden die Schattenpfade für die Tage der Jahreszeitenanfänge berechnet, ausgedruckt und einer Geländekarte des Canyon de Chelly überlagert (siehe Abb. 7).

zurück zum Anfang

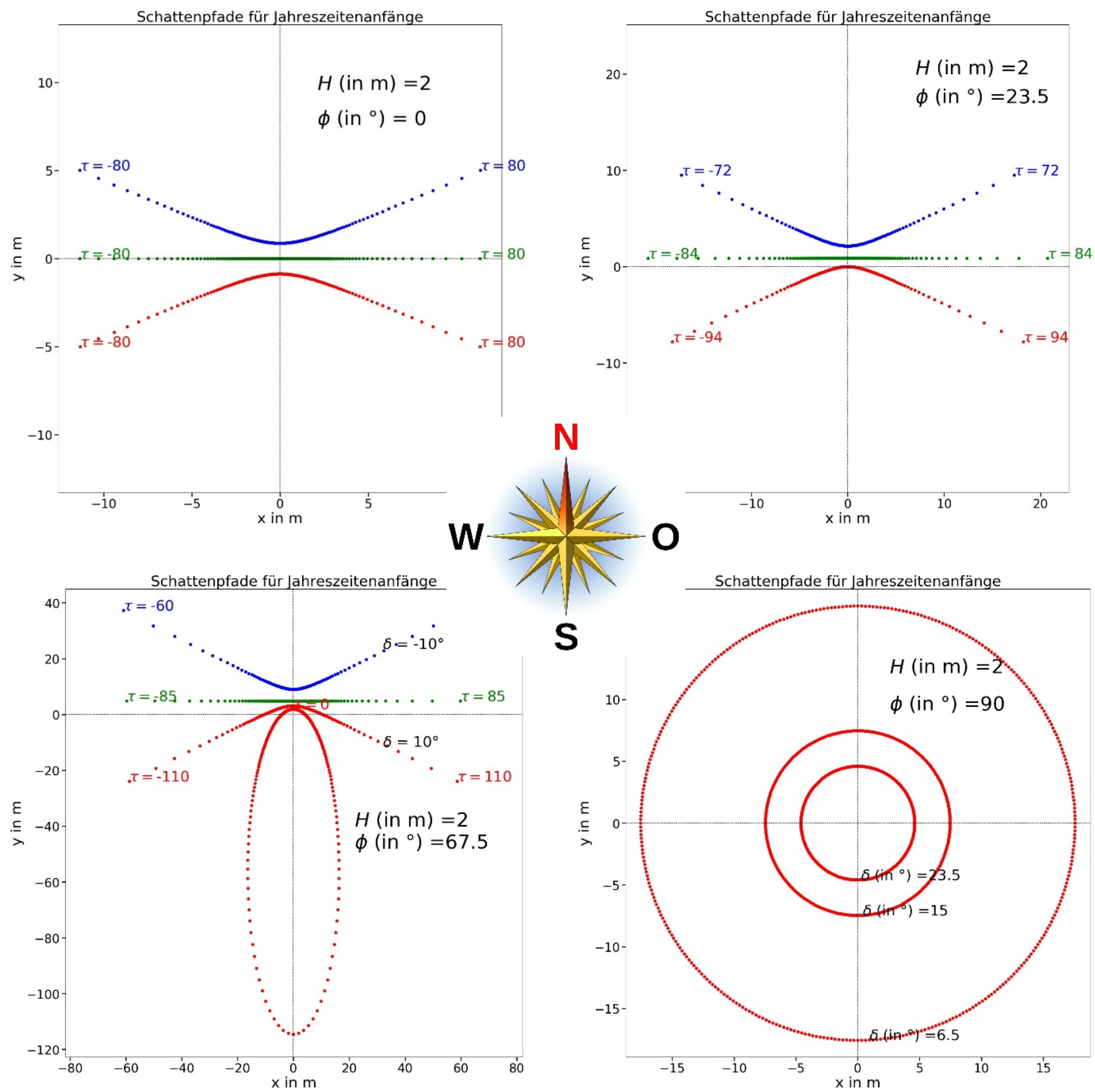


Abbildung 6: Wege der Schattenspitze eines Gnonoms der Höhe H = 2 m bei den speziellen geografischen Breiten von φ = 0° (Äquator), 23,5° (nördlicher Wendekreis), 67,5° (nördlicher Polarkreis) und 90° Nordpol) für spezielle Tage des Jahres (Äquinoktien und Wendepunkte der Sonne). Der Fußpunkt des Gnomons befindet sich bei den Koordinaten (0, 0). Die Himmelsrichtungen werden durch Kompassrose (©: Patrick87(Compass Rose English North.svg by Andrew pmk) - Derived from Compass Rose English North.svg, CC BY-SA 3.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=26800867) angezeigt. Die Wege wurden punktweise in den Stundenwinkelbereichen -τ bis τ mit $\Delta\tau$ = 1° berechnet. (Die an den Endpunkten der gezeigten Schattenwege angegebenen Stundenwinkel der Sonne sollen eine zeitliche Orientierung eröglichen.) I. A. wurden die Wege der Schattenspitze nur für Sonnenhöhen > ≈5° berechnet und ausgegeben. Man vergleiche auch mit [1].
Am Äquator verlaufen die Schattenwege symmetrisch zur Ost-West-Linie und für die Äquinoktien (δ = 0°) liegen sie direkt auf ihr, wobei der Schattenendpunkt zu Mittag (τ = 0°) genau auf den Fußpunkt des Gnomons (0, 0) fällt (Sonne im Zenit). Am nördlichen Wendekreis (φ = 23,5°) fällt die Schattenspitze nur am Tag des Sommeranfangs (δ = 23,5°) auf den Fußpunkt des Gnomons. Am nördlichen Polarkreis erzeugt die Schattenspitze (nur noch) bei der Sommersonnenwende (δ = 23,5°) eine geschlossene elliptische Kurve (Hier wurden die Schattenendpunkte bis zu h = 0° ausgegeben.). Im „Winterhalbjahr“ auf der Nordhalbkugel (δ < 0°) werden die Wege der Schattenspitze immer kleiner und am Tag des Winteranfangs (δ = -23,5°) erscheint die Sonne nur noch zum Mittag am Horizont. Direkt auf dem Nordpol (φ = 90°) stehend, erzeugt die Schattenspitze Kreise, deren Radien von der Deklination der Sonne abhängen. Bei δ = 0° ist der Radius unendlich, weil die Sonne bei einer Höhe h = 0° scheinbar umläuft. ©: O. Fischer
Man kann die Schattenwege mittels der App „Horizontale Sonnenuhr“ [6] (siehe auch im Anhang) nachvollziehen.

[zurück zum Anfang](#)

Abb. 7 zeigt die Ergebnisse der **Gnomon-Schattenberechnungen für die Spider Rocks**. Es wird ersichtlich, dass sich die Schattenspitze der Spider Rocks (gemeint ist die höhere der beiden Felsnadeln) am Nachmittag (Sonne im Westen) bei Winteranfang sehr nahe der nördlichen Felswand und bei Tag- und Nachtgleiche sehr nahe der südlichen Felswand des Canyons entlang. In der Talsohle des Canyons bewegt sich die Schattenspitze am Vormittag und frühen Nachmittag bei Tag- und Nachtgleiche. Bei Winter- und Sommeranfang „überwindet“ die Schattenspitze nach Sonnenaufgang die den Canyon begrenzenden Felswände, gelangt also von außen nach innen.
Der Lauf der Schattenspitze der Spider Rocks kann natürlich für jeden Tag eines Jahres und für jeden Moment des (hellen) Tages ermittelt werden. Entsprechend lassen sich für die meisten Orte nahe der Spider Rocks Zeitpunkte angeben, zu denen diese von der Schattenspitze getroffen werden. In dieser Art und Weise kann man einen Ort gezielt über den Schatten der Spider Rocks aufsuchen, wenn man den Zeitpunkt des Schattenwurfs kennt. So also fand Mackenna den richtigen Weg zum Schatz.

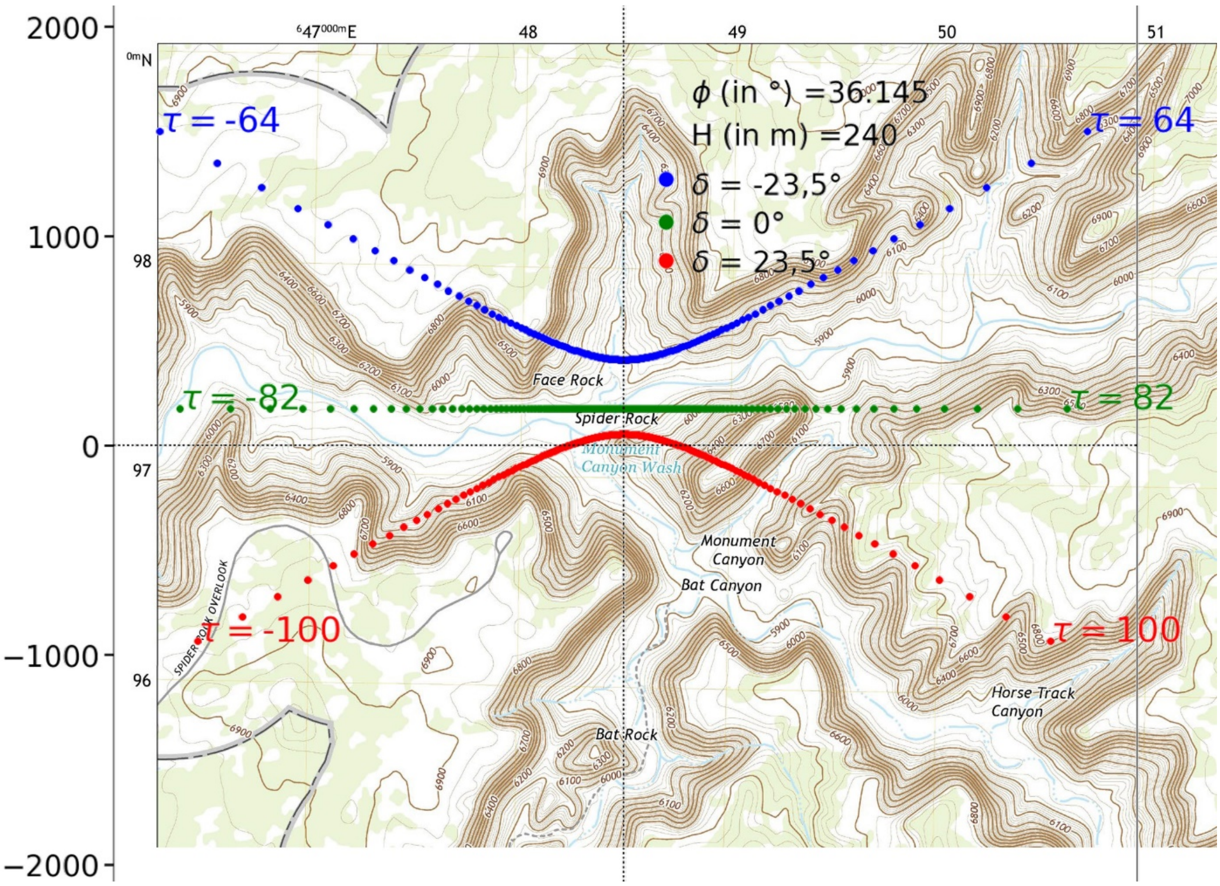


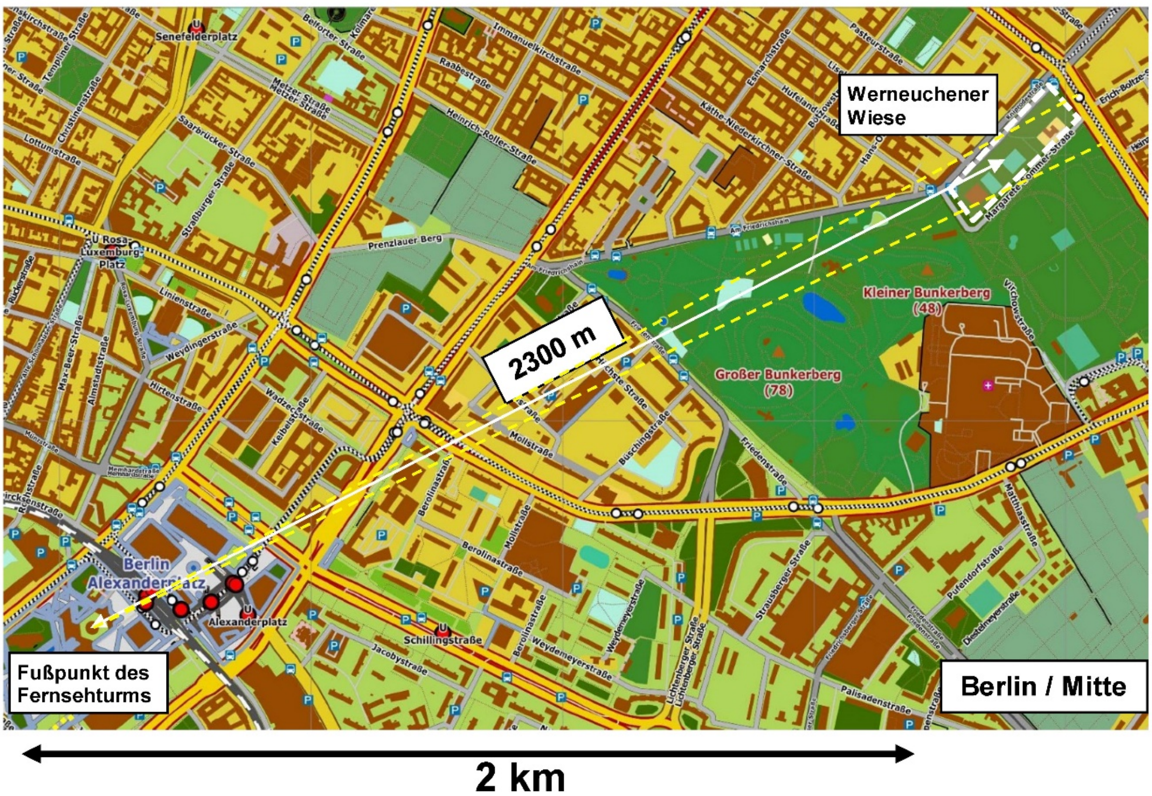
Abbildung 7: Einer Geländekarte von einem Teil des Chelly Canyon (Arizona / USA, ©: 1998 - 2021 pickatrail.com, https://www.pickatrail.com/topo-map/c/canyon-de-chelly-national-monument.html. Download free topo maps of Canyon De Chelly National Monument) wurden die simulierten Wege, welche die Schattenspitze des Spider Rock (eine Art Gnonom von 240 m Höhe, φ = *36,145*°) bei den Sonnenwenden (δ = -23,5° / 23,5°) und den Äquinoktien (δ = 0°) überstreicht, überlagert. Der Ort der Spider Rocks, also der Fußpunkt des (natürlichen) Gnomons, liegt bei (x, y) = (0, 0), dem Kreuzungspunkt der gestrichelten Linien. Er wird außerdem durch einen weißen Pfeil markiert und ist in einer vergrößerten Teilkarte ersichtlich.
Die Wege wurden durch Punkte in Abständen von $\Delta\tau$ = 1° markiert. Dies entspricht zeitlichen Abständen von jeweils 4 min. Die Veränderung des Punkteabstands bei einem Schattenweg gibt so eine Information über die Geschwindigkeit der Änderung der Schattenlänge. An den Randpunkten der Schattenwege wurden die Stundenwinkel τ der Sonne, bei denen diese Schattenendpunkte erzeugt werden, angegeben. Die Sonne hat dabei immer die Höhe von rund 5°

[zurück zum Anfang]

Mit einem Programm zur Simulation der Schattenendpunkte (und damit der Schatten) eines Gnomons hat man ein Instrument in der Hand, um gezielt z. B. die Beobachtung des langen Schattens / Schattenendpunkts und seines Laufs (der beeindrucken kann) eines hohen Bauwerks in der Ferne zu planen.

Aufgabe 4 – Beobachtung eines Schattens in der Ferne – Informatikprojekt

Bestimme die Zeitpunkte im Jahr, in denen der Kernschatten der Kugel des **Berliner Fernsehturms** (Höhe der Kugelmitte: 214 m, Durchmesser der Kugel: 32 m) die Werneuchener Wiese im Volkspark Friedrichshain in Berlin (Entfernung vom Fernsehturm: ca. 2300 m) trifft!
Zur Lösung der Aufgabe musst du bei Anwendung der im Anhang gegebenen Formalismen die Positionen des Kernschattenmittelpunkts der Kugel des Berliner Fernsehturms für verschiedene Uhrzeiten (Stundenwinkel) und verschiedene Tage des Jahres berechnen und die so erhaltenen Positionen (x, y) in einem Orts-Koordinatensystem veranschaulichen. Dies sollte sinnvollerweise mit Hilfe einer (evt. selbst zu programmierenden) **Computersimulation** erfolgen.
Im Folgenden (und digital im Anhang) findest du eine **Landkarte** von der Region vom Fernsehturm bis hin zur Werneuchener Wiese. Überlagere diese im gleichen Maßstab mit dem zuvor erzeugten Bild! Die Simulation muss solange wiederholt werden, bis die Tage gefunden wurden, an denen die Wege der Schattenendpunkte die Werneuchener Wiese treffen.



©: OpenStreetMap.org Mitwirkende

Karte vom Berliner Fernsehturm bis zur etwa 2,3 km entfernten Werneuchener Wiese im Berliner Volkspark Friedrichshain, Hintergundbild: ©: OpenStreetMap.org Mitwirkende, https://sonnenlandimmobilien.de/ratgeber/download/stadtplan/stadtplan-berlin-kostenlos/.
Die Frage ist, an welchen Tages des Jahres und zu welchen Zeiten die Schattenendpunkte der 214 m hohen Kugel des Berliner Fernsehturms die Werneuchener Wiese (wo man den Schatten dann beobachten könnte) treffen (sich innerhalb der gelb gestrichelten Linien befinden).

Geschwindigkeit der Schattenspitze

zurück zum Anfang

Bei Betrachtung des Laufs der Schattenendpunkte von sehr hohen Gnomonen bzw. „gnomonisch wirkenden“ Objekten wie z. B. von den Spider Rocks oder des Berliner Fernsehturms stellt man schnell fest, dass dieser bei kleinen Sonnenhöhen beeindruckend schnell erfolgen können. So z. B. legt die Schattenspitze der Spider Rocks an den Tagen der Tag-und-Nacht-Gleiche (siehe Abb. 7, $\delta = 0°$, grüne Punkte im x-y-Koordinatensystem) bei Sonnenhöhen von etwa 5° in 4 min mehr als 200 m zurück (von $\tau = -82°$ bis zu $\tau = -81°$). Abb. 8 zeigt, dass die Geschwindigkeit der Schattenspitze bei geringen Sonnenhöhen beeindruckend große Werte annehmen kann. Übrigens: Die App „Horizontale Sonnenuhr“ [6], (siehe auch im Anhang) ermöglicht es, den Lauf der schattenspitze im Zeitraffer anzuschauen.
Einen sehr langen und „rasenden Schatten“ zu erleben, das kann für so manchen Schüler und Lehrer ein prägendes Erlebnis sein. Dies wird es auch gerade dann, wenn man die **Schattenbewegung als Konsequenz der Erdrotation** herausstellt.
Leider sind die Möglichkeiten zu dieser Beobachtung bedingt durch die atmosphärischen Bedingungen, die Landschaft und ihre Bebauung und natürlich das Vorhandensein von wirklich sehr hohen Gnomonen sehr eingegrenzt. Trotzdem könnte man die Sonnenbeobachtung so planen, dass sie auch eine **Beobachtung der deutlich wahrnehmbaren Schattenbewegung** ermöglichen.

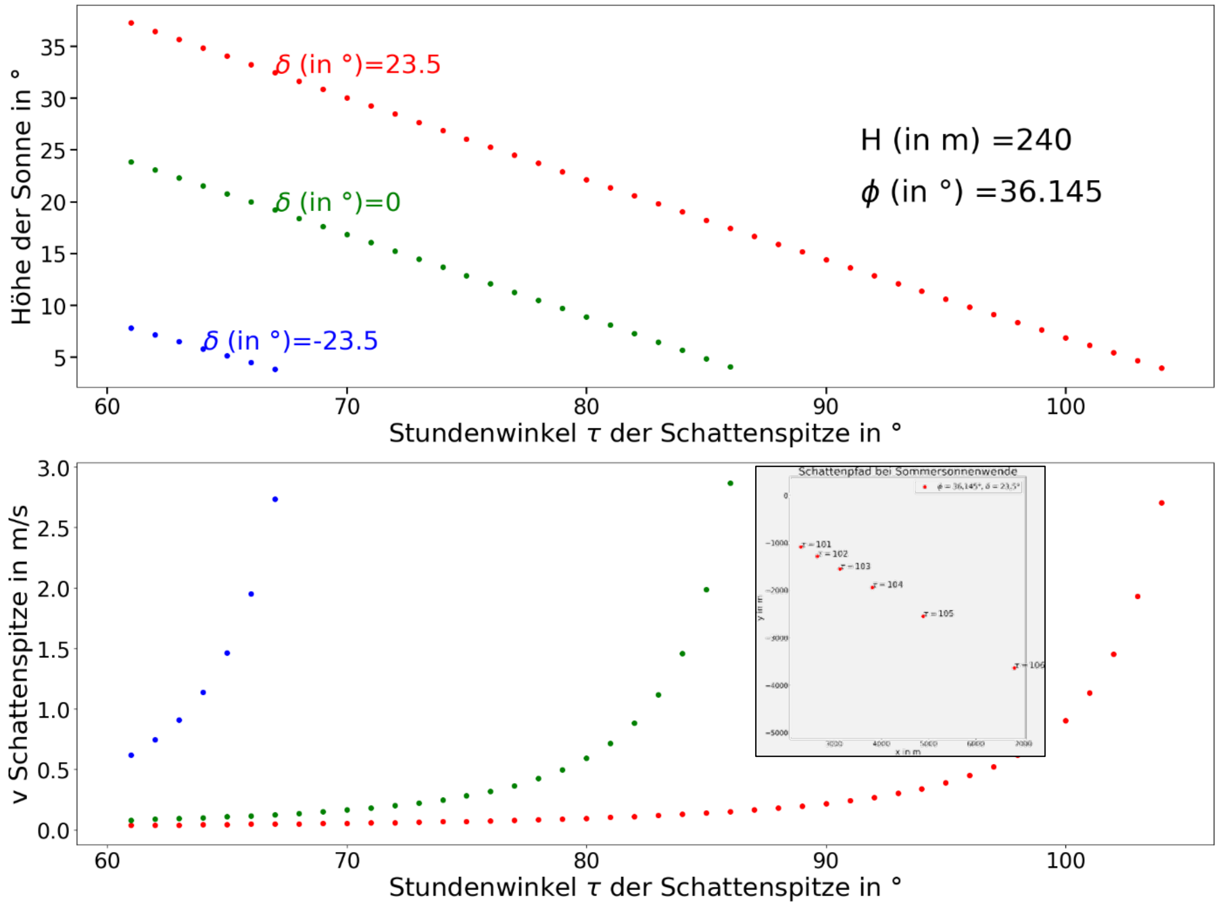


Abbildung 8: Geschwindigkeiten der Schattenspitze eines Gnomons der Höhe H = 240 m (Spider Rocks, geografische Breite φ = *36,145°*) für spezielle Tage des Jahres (Äquinoktien und Wendepunkte der Sonne) bei verschiedenen Stundenwinkeln τ der Sonne. Die Punkte wurden im Abstand von $\Delta\tau$ = 1° (entspricht 4 min) gesetzt. Es wird offensichtlich, dass die Geschwindigkeit v der Schattenspitze bei großen Stundenwinkeln τ (bei geringen Sonnenhöhen) schnell ansteigt (kurz nach Sonnenaufgang) bzw. abnimmt (kurz vor Sonnenuntergang). Das Einschubbild zeigt, dass die Schattenspitze bei der Sommersonnenwende bei sehr tief stehender Sonne in 4 min mehr als 2 km zurücklegt. ©: O. Fischer.

Das Ende des (Kern-)Schattens

zurück zum Anfang

Astronomen wissen es – mit zunehmender Entfernung vom Schattenwerfer verjüngt sich der **Kernschatten** immer mehr, bis er in der Entfernung, aus der der Schattenwerfer nur noch den Winkeldurchmesser der Sonne (ca. 0,5°) einnimmt, ganz verschwindet. An seine Stelle tritt dann ein mehr oder weniger aufgehellter **Halbschatten**. Vergleichbar ist diese Situation mit einer ringförmigen Sonnenfinsternis, bei der der Mond besonders weit von der Erde entfernt und so nicht mehr in der Lage ist, die Sonnenscheibe komplett abzudecken.

Abbildung 9: Der lange Schatten des Berliner Fernsehturms zeigt auf dem Bild in Richtung NOO, Er erstreckt sich über den Alexanderplatz, wobei der Kernschatten der Kugel links vom Haus des Lehrers liegt. ©: Stefan / pixelio.de, https://www.pixelio.de/media/ 139480, freigegeben nur zur redaktionellen (nicht-kommerziellen) Nutzung.

Aufgabe 5 – Das Ende des Kernschattens

Die Kugel des Berliner Fernsehturms hat einen Durchmesser von 32 m. Der Antennenträger oberhalb der Kugel (der oberste Teil des Turms) verjüngt sich von einem Durchmesser von 4 m an der Basis bis auf einen Durchmesser von ca. 2 m an der Spitze.
Die Sonne hat eine Höhe von 8°.
Berechne den Durchmesser des Kernschattens der Kugel des Berliner Fernsehturms in 2,3 km Entfernung (also z. B. bei der Werneuchener Wiese in Volkspark Friedrichshain).
Wo endet der Kernschatten des Antennenträgers?
Welche Form (und Größe) hätte der Kernschatten der Kugel auf dem Erdboden? Ist es noch möglich, den Kernschatten des Antennenträgers in 2,3 km Entfernung wahrzunehmen?
Zur Lösung der Aufgabe empfiehlt es sich, eine schematische Skizze der Situation anzufertigen.

Quellen

zurück zum Anfang

[1] Animation der täglichen Schattenspitzenwege bei verschiedenen Deklinationen der Sonne (verschiedene Tage eines Jahres) und bei verschiedenen geografischen Breiten: By Cmapm - Own work, CC BY-SA 3.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=21889102

[2] Hartmut Fligge, Dr. Stephan Leitschuh (Bayerisches Landesamt für Umwelt (LfU)): „Windkraft - Schattenwurf von Windkraftanlagen: Erläuterung zur Simulation“, https://www.energieatlas.bayern.de/file/pdf/1099/Erl%C3%A4uterungen_zur_Schattensimulation_von_Windkraftanlagen.pdf

[3] https://wwwdid.mathematik.tu-darmstadt.de/amustud/amu_stud_website/bau_einer_windkraftanlage/Unterseiten/Schattenwurf-s.html

[4] Eine grafisch sehr gut gemachte Internetveröffentlichung von ‚Design and Technology Online‘: http://wiki.dtonline.org/index.php/Exploring_Sundials

[5] Zenkert, A.: Faszination Sonnenuhr, Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt am Main, 1995

[6] Müller, Thomas: Sonnenuhr-App, https://www.haus-der-astronomie.de/vis/astroapps

[7] Berlin als digitales 3D-Modell: https://www.businesslocationcenter.de/downloadportal/
Thomas Müller, HdA: „Diese Daten könnte man z.B. in blender importieren und dann den Schattenwurf direkt simulieren.“

Anhängende Materialien

Datei „Karte Berlin-Mitte.jpg“

Datei „Karte Chelly Canyon.jpg“

Ergebnisse zu den Aufgaben

zurück zum Anfang

Aufgabe 1 – Gnomon und Trigonometrie

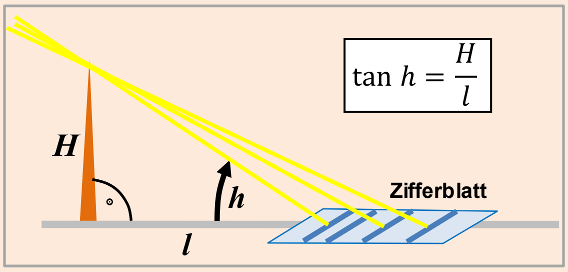
Berechne die Länge des Schattens, den die 240 m hohe Felsnadel der „Spider Rocks“ im Canyon de Chelly (Arizona, USA) bei einem Sonnenstand von 5° Höhe wirft.

Es gilt: $\tan h = \frac{H}{l}$.
Gegeben sind $H = 240$ m und $h = 5°$, gesucht ist l.

$$l = \frac{H}{\tan h} = \frac{240\text{ m}}{\tan 5°} \approx 2743\text{ m}.$$

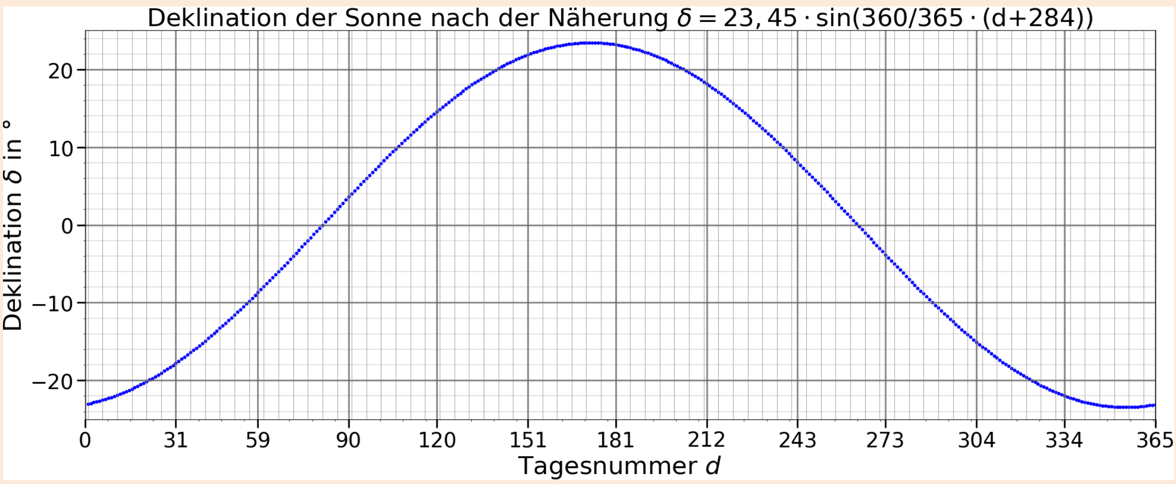
Aufgabe 2 – Gnomon als Sonnenuhr

Berechne das Zifferblatt für eine Gnomon-Sonnenuhr (siehe Bild), das für Orte mit einer geografischen Breite von $\varphi = 50°$ am 31. Mai gültig ist!
Nutze dazu zunächst die mathematische Beziehung, die den Zusammenhang herstellt zwischen dem Stundenwinkel τ der Sonne (der die wahre Ortszeit wiedergibt) und der Höhe h der Sonne, ihrer Deklination δ und der geografischen Breite φ.



$$\sin h = \cos\varphi \cdot \cos\tau \cdot \cos\delta + \sin\varphi \cdot \sin\delta.$$

Die für die Rechnung benötigte Deklination der Sonne kannst du aus dem anhängenden Diagramm ablesen. Die Abstände l der Zifferblattlinien vom Fußpunkt der Gnomonspitze können mit der ebenfalls gegebenen trigonometrischen Beziehung berechnet werden. Dazu wird für den Gnomon eine Höhe H von 0,2 m angenommen.



$\sin h = \cos\varphi \cdot \cos\tau \cdot \cos\delta + \sin\varphi \cdot \sin\delta$.

Es werden die Zifferblattlinien für die Stundenwinkel der Sonne τ = 8 h, 9 h, 10 h, 11 h, 12 h, 13 h, 14 h, 15 h und 16 h berechnet, wobei 1 h einem Winkel von 15° entspricht. Wegen der Symmetrie der Schattenverlaufs zum Meridian müssen aber nur die Werte für τ = 8 h, 9 h, 10 h, 11 h, 12 h betrachtet werden.

zurück zum Anfang

Es werden die Zifferblattlinien für die Stundenwinkel τ = 8 h, 9 h, 10 h, 11 h, 12 h, 13 h, 14 h, 15 h und 16 h berechnet, wobei 1 h einem Winkel von 15° entspricht. Wegen der Symmetrie des Wegs des Schattenendpunkts zum Meridian müssen aber nur die Werte für τ = 8 h, 9 h, 10 h, 11 h, 12 h betrachtet werden.
Zu beachten ist, dass dem Stundenwinkel der Sonne von 0° die wahre Ortszeit von 12 Uhr zugeordnet ist.
Für den 31. Mai wurde für die Sonne eine Deklination von δ = 22° im Diagramm abgelesen. Mit der gegebenen geografischen Breite von $\varphi = 50°$ erhält man schließlich eine Formel zur (evt. **programmierten**) Berechnung von h für alle vorgegebenen τ:

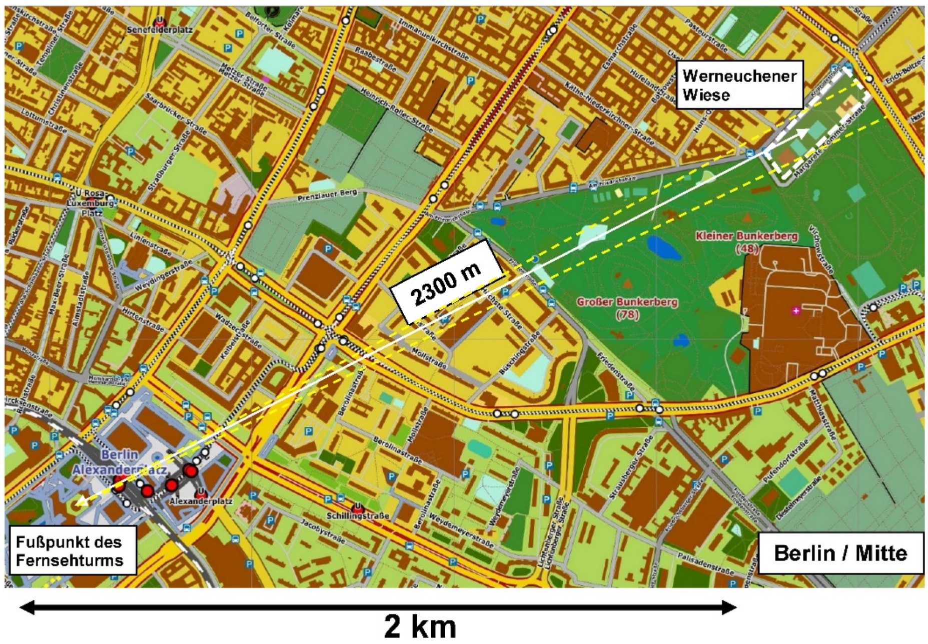
τ in h	τ in °	h in °	l in cm
8	300	35,8	27,7
9	315	45,1	19,9
10	330	53,4	14,8
11	345	59,6	11,7
12	0	62,0	10,6
13	15	59,6	11,7
14	30	53,4	14,8
15	45	45,1	19,9
16	60	35,8	27,7

$\sin h = \cos 50° \cdot \cos \tau \cdot \cos 22° + \sin 50° \cdot \sin 22° \approx 0{,}596 \cdot \cos \tau + 0{,}287$.

Bei Nutzung der trigonometrischen Beziehung $l = \frac{H}{\tan h}$ können mit H = 0,2 m schließlich die gesuchten Abstände l der Zifferblattlinien ermittelt werden (siehe Tabelle).

Aufgabe 4 – Beobachtung eines Schattens in der Ferne – Informatikprojekt

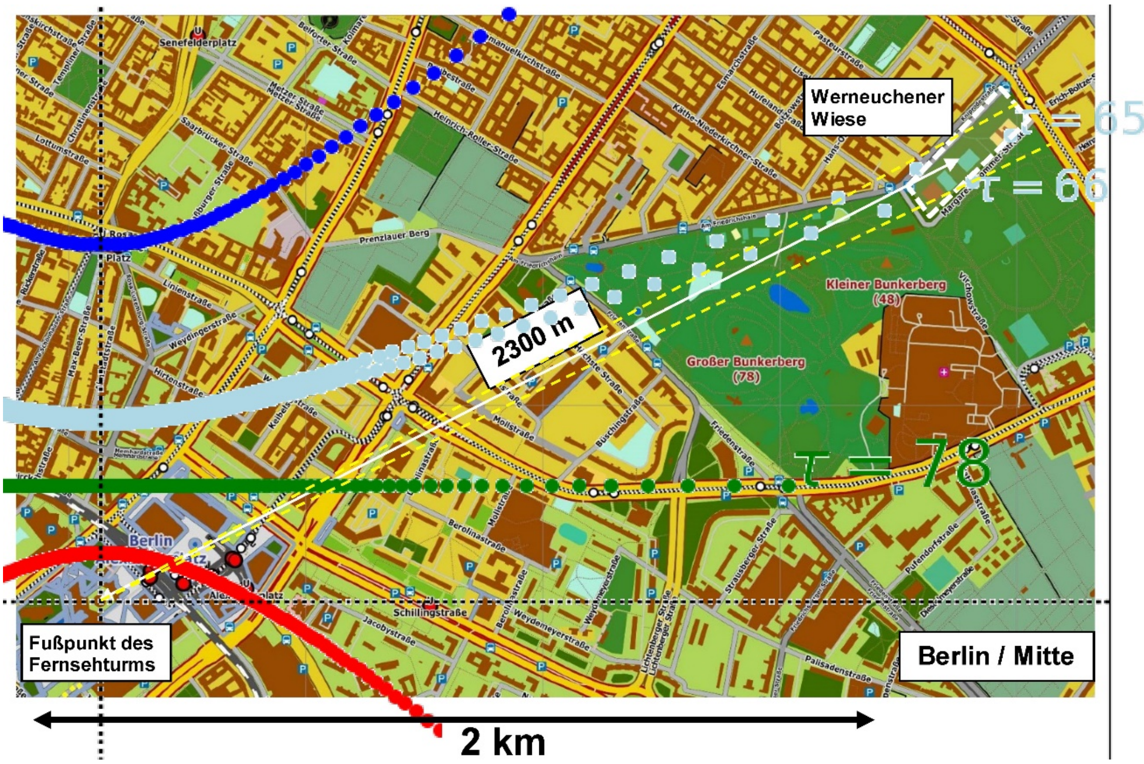
Bestimme die Zeitpunkte im Jahr, in denen der Kernschatten der Kugel des Berliner Fernsehturms (Höhe der Kugelmitte: 214 m, Durchmesser der Kugel: 32 m) die Werneuchener Wiese im Volkspark Friedrichshain in Berlin (Entfernung vom Fernsehturm: ca. 2300 m) trifft!
Zur Lösung der Aufgabe musst du bei Anwendung der im Anhang gegebenen Formalismen die Positionen des Kernschattenmittelpunkts der Kugel des Berliner Fernsehturms für verschiedene Uhrzeiten (Stundenwinkel) und verschiedene Tage des Jahres berechnen und die so erhaltenen Positionen (x, y) in einem Orts-Koordinatensystem veranschaulichen. Dies sollte sinnvollerweise mit Hilfe einer (evt. selbst zu programmierenden) **Computersimulation** erfolgen
Verschaffe dir eine digitale Landkarte von der unten gezeigten Region vom Fernsehturm bis hin zur Werneuchener Wiese und überlagere diese im gleichen Maßstab mit dem zuvor erzeugten Bild. Die Simulation muss solange wiederholt werden, bis die Tage gefunden wurden, an denen die Wege der Schattenendpunkte die Werneuchener Wiese treffen.



©: OpenStreetMap.org Mitwirkende

Karte vom Berliner Fernsehturm bis zur etwa 2,3 km entfernten Werneuchener Wiese im Berliner Volkspark Friedrichshain, Hintergundbild: ©: OpenStreetMap.org Mitwirkende, https://sonnenlandimmobilien.de/ratgeber/download/stadtplan/stadtplan-berlin-kostenlos/.
Die Frage ist, an welchen Tages des Jahres und zu welchen Zeiten (→ Beobachtungsplanung) die Schatten-endpunkte der 214 m hohen Kugel des Berliner Fernsehturms die Werneuchener Wiese (wo man den Schatten dann beobachten könnte) treffen (sich innerhalb der gelb gestrichelten Linien befinden).

zurück zum Anfang



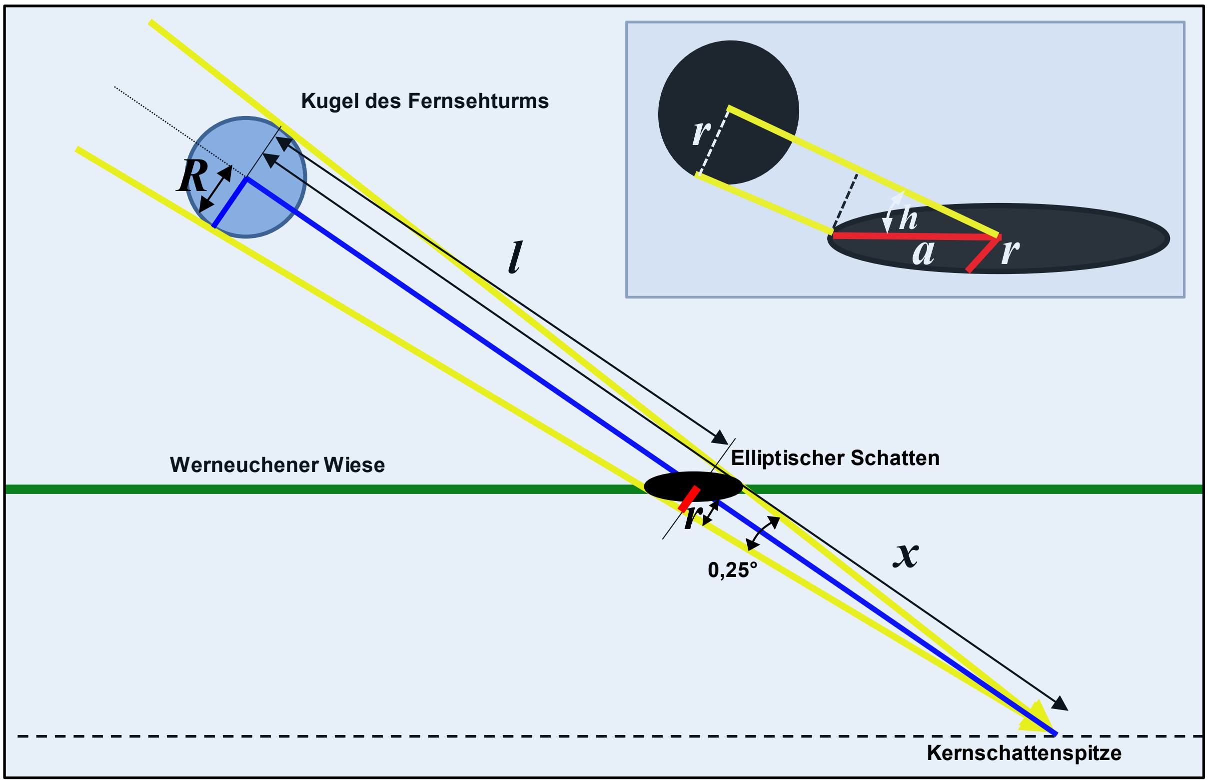
Die Luftaufnahme des Gebiets vom Berliner Fernsehturm (φ = 52,5°, Norden ist oben) bis zur etwa 2,3 km entfernten Werneuchener Wiese im Berliner Volkspark Friedrichshain (Hintergundbild: ©: OpenStreetMap.org Mitwirkende, https://sonnenlandimmobilien.de/ratgeber/download/stadtplan/stadtplan-berlin-kostenlos/) wurde überlagert durch die simulierten Wege des Mittelpunkts des Kernschattens der Fernsehturmkugel für den Tag des Winteranfangs (ca. 21.12., δ = -23,5°, dunkelblau), für die Tage des Frühlings- und Herbstanfangs (ca. 20.3./23.9., δ = 0°, grün), für den Tag des Sommeranfangs (ca. 21.6., δ = 23,5°, rot) und für den gesuchten Tagebereich, in dem der Kernschatten die Werneuchener Wiese trifft (ca. 17. - 20.2., δ = -12 … -11°, hellblau). Dabei gelangt der Kernschatten am 17. 2. bei einem Stundenwinkel der Sonne von τ = 64,5° und am 20. 2. bei τ = 66° auf die Wiese. In Zeitabständen sind das 4,3 h und 4,4 h zur Meridiandurchgangszeit (12 h). Mit 15°/h erhält man, dass der Kernschatten der Kugel des Fernsehturms am 17.2. etwa um 16:18 Uhr und am 20.2. um 16:24 Uhr (12 h + …) auf der Werneuchener Wiese erscheint.

Aufgabe 5 – Das Ende des Kernschattens

Die Kugel des Berliner Fernsehturms hat einen Durchmesser von 32 m. Der Antennenträger oberhalb der Kugel (der oberste Teil des Turms) verjüngt sich von einem Durchmesser von 4 m an der Basis bis auf einen Durchmesser von ca. 2 m an der Spitze.
Die Sonne hat eine Höhe von 8°.
Berechne den Durchmesser des Kernschattens der Kugel des Berliner Fernsehturms in 2,3 km Entfernung (also z. B. bei der Werneuchener Wiese in Volkspark Friedrichshain).
Wo endet der Kernschatten des Antennenträgers?
Welche Form (und Größe) hätte der Kernschatten der Kugel auf dem Erdboden? Ist es noch möglich, den Kernschatten des Antennenträgers in 2,3 km Entfernung wahrzunehmen?
Zur Lösung der Aufgabe empfiehlt es sich, eine schematische Skizze der Situation anzufertigen.

zurück zum Anfang

Schematische Skizze der Situation:



Gegeben sind:

- Winkelradius der Sonne = 0,25°
- Radius der Kugel des Fernsehturms ***R*** = 16 m
- Durchmesser Antennenträger = 4 … 2 m
- Abstand der Werneuchener Wiese von der Kugel des Fernsehturms ***l*** ≈ 2300 m
- Höhe der Sonne ***h*** = 8°

Gesucht ist der Radius (eigentlich die kleine Halbachse) ***r*** des Kernschattens der Kugel
Zunächst wird der Abstand ***x*** bis zur Spitze des Kernschattenkegels berechnet.
Dazu dient die Beziehung $\tan 0{,}25° = \frac{R}{x}$.

$$\mathrm{x} = \frac{R}{\tan 0{,}25°} = \frac{16\ \mathrm{m}}{\tan 0{,}25°} \approx 3667\ \mathrm{m}.$$

Der Kernschatten des Antennenträgers ist auf der Werneuchner Wiese nicht mehr zu sehen:

$$\mathrm{x} = \frac{R}{\tan 0{,}25°} = \frac{4\ \mathrm{m}}{\tan 0{,}25°} \approx 917\ \mathrm{m}, \qquad \mathrm{x} = \frac{R}{\tan 0{,}25°} = \frac{2\ \mathrm{m}}{\tan 0{,}25°} \approx 458\ \mathrm{m}.$$

Nun kann die unbekannte Dreiecksseite ***r*** mit Hilfe eines **Strahlensatzes** berechnet werden.

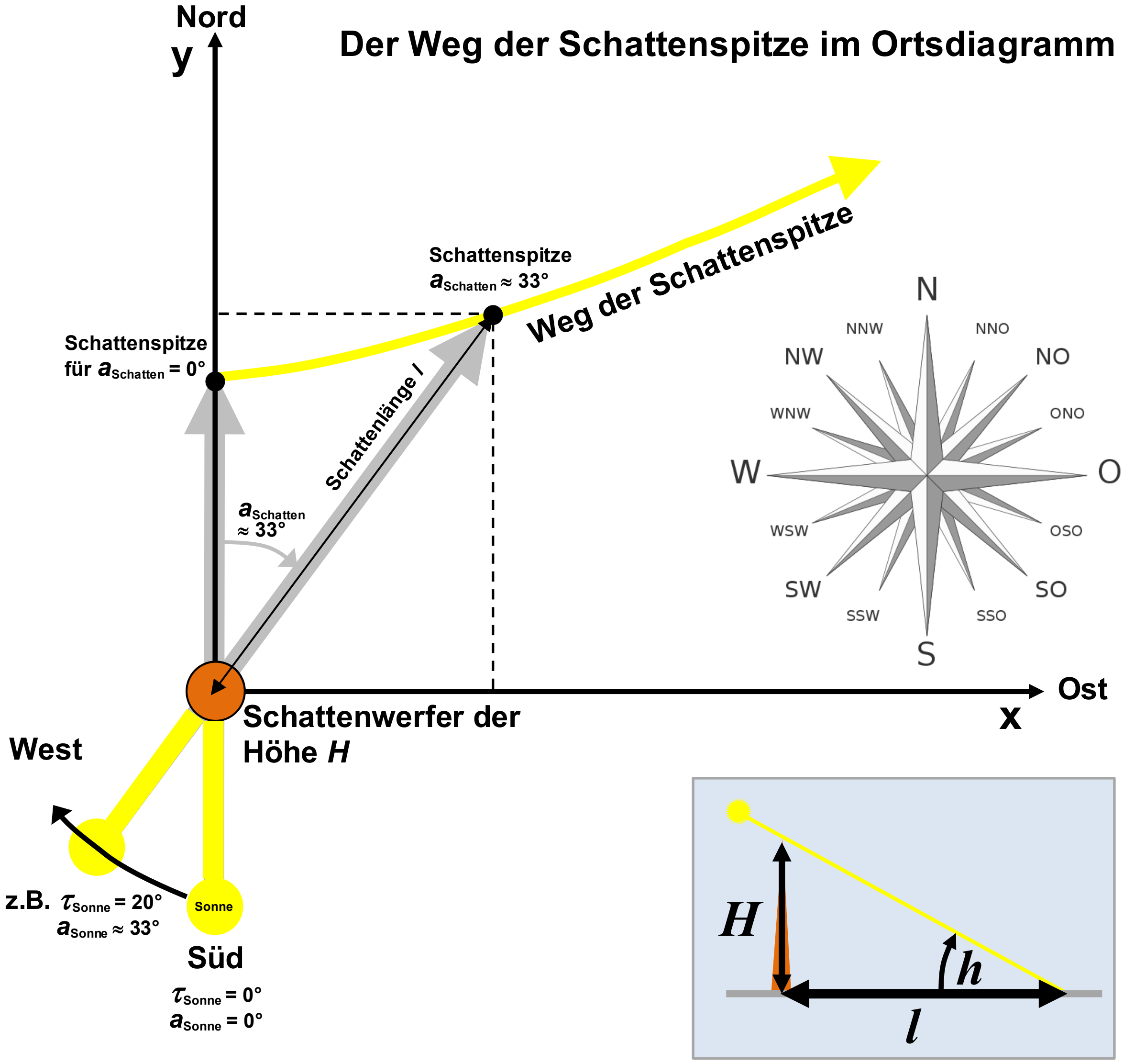
$$\frac{r}{\mathrm{R}} = \frac{x-l}{x} \qquad \rightarrow \qquad r = \frac{x-l}{x} \cdot R = \frac{3667\ \mathrm{m} - 2300\ \mathrm{m}}{3667\ \mathrm{m}} \cdot 16\ \mathrm{m} \approx 6\ \mathrm{m}.$$

Der Kernschatten erscheint in Projektion auf die Horizontebene (Werneuchener Wiese) elliptisch auseinandergezogen.
Die große Halbachse der Ellipse hängt mit dem Höhenwinkel ***h*** der Sonne und der kleinen Halbachse ***r*** wie folgt zusammen (siehe Skizze oben rechts): $\sin h = \frac{r}{a}$.

Entsprechend erhält man für ***a***: $\mathrm{a} = \frac{r}{\sin h} = \frac{6\ \mathrm{m}}{\sin 8°} \approx 43\ \mathrm{m}.$

ANHANG

zurück zum Anfang



Sonnenhöhe *h*

$$\sin h = \cos\varphi \cdot \cos\tau \cdot \cos\delta + \sin\varphi \cdot \sin\delta$$
$$h = \arcsin(\cos\varphi \cdot \cos\tau \cdot \cos\delta + \sin\varphi \cdot \sin\delta)$$

Schattenlänge *l*

$l = \dfrac{H}{\tan h}$ mit Hilfe des „trigonometrischen Pythagoras“ ($\sin^2 x + \cos^2 x = 1$) erhält man

$$l = H \cdot \frac{\sqrt{1 - \sin^2 h}}{\sin h}$$

Sonnenazimut *a*

$$\sin a \cdot \cos h = \sin\tau \cdot \cos\delta$$
$$\cos a \cdot \cos h = \sin\varphi \cdot \cos\tau \cdot \cos\delta - \cos\varphi \cdot \sin\delta$$
$$a = \arctan\left(\frac{\sin\tau}{\cos\tau \cdot \sin\varphi - \tan\delta \cdot \cos\varphi}\right)$$

Position der Schattenspitze (*x*, *y*) = f(*a*, *l*)

$$x = \sin a \cdot l, \quad y = \cos a \cdot l$$

Der Weg der Schattenspitze in der App „Horizontale Sonnenuhr“

(Autor: Dr. Thomas Müller, HdA)

https://www.haus-der-astronomie.de/vis/astroapps