Wie konstruiert man eine Zylinder-Sonnenuhr

In Bezug zu „Sonne aktuell“ in der Rubrik „Aktuelles am Himmel: Sonnensystem“ in SuW 11/2021 und zu den „SzeneNews“ in SuW 9/2021, WIS-ID: 1571292, Zielgruppe: Mittelstufe bis Oberstufe

Olaf Fischer, Thomas Müller

Noch vor nicht allzu langer Zeit war die Zeitbestimmung und -nutzung eine sehr lokale Angelegenheit, bei der Sonnenuhren eine grundlegende Rolle spielten. Heute sind Sonnenuhren eher schmückendes Beiwerk, die uns so manches Mal herausfordern, wenn es um die Uhrablesung geht. Doch sie erinnern uns an eine Zeit, in der die **Interpretation des Sonnenstands** sicherlich zu den wichtigen Kompetenzen gehörte.
In der Schule bieten einfache Sonnenuhren eine Gelegenheit, um das Thema ‚Zeit‘ vielleicht in einem **fächerverknüpfenden Projekt** zu behandeln, in dem sowohl das Alltagsleben unserer Vorfahren und die Geschichte der Zeitmessung als auch die mathematisch-naturwissenschaftlichen Aspekte behandelt werden.
Der WIS-Beitrag zeigt dazu, wie man eine Zylindersonnenuhr – eine Sonnenuhr, deren Zeitanzeige durch die Schattenlänge erfolgt – konstruiert und schrittweise verbessert. Dabei können Grundkenntnisse aus der Geometrie und Trigonometrie genutzt und das Zeitverständnis gefördert werden. Passende Aufgaben und Projektideen für Schüler zum Thema Sonnenuhren und ein Bastelbogen für eine Zylindersonnenuhr ergänzen den Beitrag.

Übersicht der Bezüge im WIS-Beitrag		
Astronomie	**Positionsastronomie, Astropraxis**	Sonnenlauf, Zylindersonnenuhr, Mittagshöhe der Sonne und geografische Breite, Deklination der Sonne, Unterschied zwischen Ortszeit und Zonenzeit, wahre Ortszeit, mittlere Ortszeit, Zeitgleichung, Analemma
Fächer-verknüpfung	**Astro - Mathematik Astro - Informatik Astro - Geo**	Geometrie, gerader Kreiszylinder, Mantelfläche, Mantellinie, Trigonometrie, Informatik-Projekt, Programmierung und Grafikausgabe von Sonnenuhrenzifferblättern, Sonnenstand mit Webcams, Zeitzonen und Längengrade
Lehre allgemein	**Erkenntnisgewinnungskompetenz, Unterrichtsmittel**	Erkennen den Zusammenhang zwischen Zeit und Sonnenlauf, berechnen Schattenlängen und Ausmaße eines Zylinders, Umrechnung zwischen WOZ und MOZ, Langzeitexperiment zur Bestimmung des Analemmas, Aufgaben zu Sonnenuhren, Projektideen zu Sonnenuhren, A4-Schnittbogen “Zylindersonnenuhr“, Anleitung zum Bau und zur Nutzung der Zylindersonnenuhr

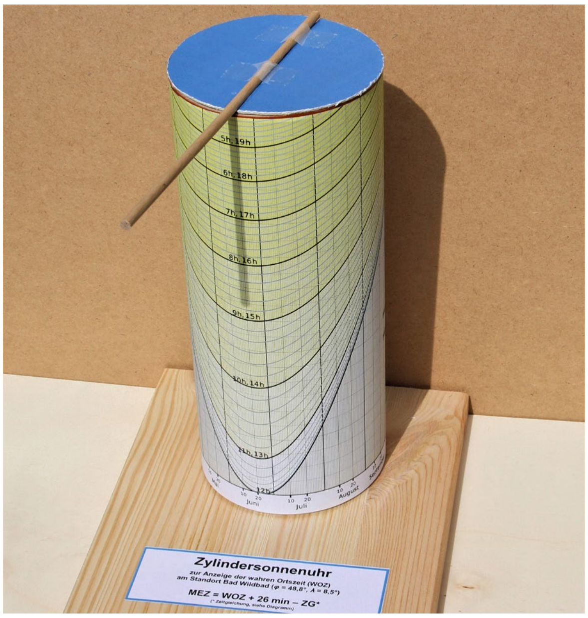


Abbildung 1: Zylindersonnenuhr (hier für den Breitengrad von Bad Wildbad - einem Ort der intensiven Lehrerfortbildung auch zur Astronomie in Baden-Württemberg).
Zur Ablesung der Uhr muss der waagerechte Schattenstab, der oben drehbar aufgesetzt ist, zunächst auf das entsprechende Datum gestellt werden. Dann wird der ganze Zylinder so gedreht, dass der Schatten des Stabes auf dem Zifferblatt senkrecht nach unten zeigt. Aus der Position des Schattenendpunktes zwischen den Stundenlinien (schwarz) und 10-min-Linien (grau) kann die Zeit abgelesen werden.
Die gezeigte Sonnenuhr zeigt die wahre Ortszeit (WOZ) an. Die auf der Grundplatte vermerkte Rechenvorschrift erlaubt es, aus der WOZ die MEZ (mitteleuropäische Zeit) zu ermitteln. ©: Olaf Fischer.

Die Schattenlänge als Zeitmaßstab – Zylindersonnenuhr

zurück zum Anfang

Die Zeiger der Sonnenuhren werden durch Schatten erzeugt. Die Lage der Schattenwerfer, z. B. eines Schattenstabs, ist entscheidend für die Zifferblattkonstruktion. Zeigt der Schattenstab in Richtung der Erdachse, dann ist die Zeitanzeige einer Sonnenuhr nur von der Schattenlage abhängig und die Schattenlänge spielt keine Rolle. Zeigt der Schattenstab nicht in Richtung der Erdachse, wird die Herstellung der Uhr zwar einfacher, ihre Ablesung wird aber mehrdeutiger, weil nun Schattenlage und Schattenlänge neben der Zeit auch noch von der Position der Sonne am Sternhimmel abhängen.
Eine Sonnenuhr, bei der der Schattenstab i. A. nicht parallel zur Erdachse ausgerichtet ist, ist der Gnomon, der schon im WIS-Beitrag „Wie ein Gnomon Mackenna half, den Schatz zu finden. Betrachtungen zu Gnomonen" (WIS 10/2021, http://www.wissenschaft-schulen.de/alias/kategorie/astronomie/1050333).
Im vorliegenden Beitrag wird die Konstruktion einer Sonnenuhr mit waagerecht orientiertem Stab, dessen Schatten auf eine senkrecht orientierte Skala, fällt (einer Zylindersonnenuhr), beschrieben. Die Schattenlänge l dient als Zeitindikator (siehe Abb. 2).

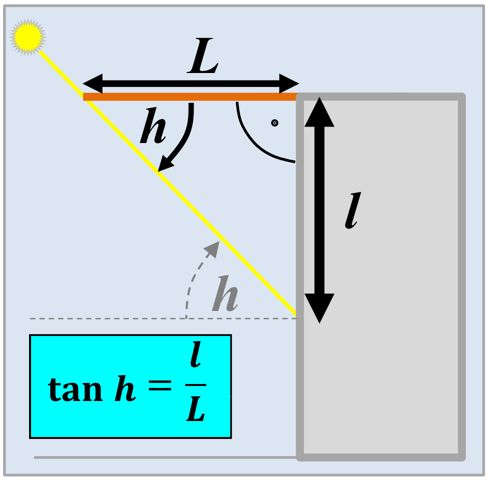


Abbildung 2: Links: Alltägliche Beobachtung des Schattens, der durch die kreisrunde Abdeckung einer Straßenlaterne erzeugt wird. Der Scheitelpunkt der Schattenkurve markiert den Punkt mit dem Azimut, bei dem die Sonne gerade steht.
Rechts: Zylindersonnenuhr schematisch: Der senkrecht nach unten verlaufende Schatten der Länge *l* und die Schattenstablänge *L* bilden ein rechtwinkliges Dreieck. Dieses kann trigonometrisch genutzt werden, um den Winkel *h* (die Höhe der Sonne) zu ermitteln. ©: Olaf Fischer

Die Zylindersonnenuhr nutzt einen **geraden Kreiszylinder**, der lotrecht auf die **Grundfläche** gestellt wird und auf der **Deckfläche** einen Schattenstab trägt, der dann rechtwinklig zur **Mantelfäche,** die die Zeitskale trägt, orientiert ist (siehe Abb. 1 und 2). Zur Ablesung wird der Schattenstab zunächst so gedreht, dass er bei der passenden Datumslinie (eine Mantellinie des Zylinders) steht. Dann wird der ganze Zylinder so gedreht, dass sein Schatten genau auf die Mantellinie fällt (also senkrecht verläuft).

Die **Gestaltung der Zylindersonnenuhr und ihres Zifferblatts** soll im Weiteren Schritt für Schritt erfolgen. Die Schüler können dabei ihre Kenntnisse zur Geometrie von senkrechten Kreiszylindern und zur Trigonometrie anwenden. Zudem können sie nach und nach in die Problematik der Zeitbestimmung mittels der Sonne einsteigen. Folgende Schritte beantworten die Frage, wie man eine Zylindersonnenuhr konstruiert:

- **1. Schritt:** Grundsätzliche Überlegungen zur Zifferblattgröße und Schattenstablänge.
- **2. Schritt:** Zifferblatt zur Anzeige der wahren Ortszeit am Aufstellungsort der Sonnenuhr.
- **3. Schritt:** Zifferblatt zur Anzeige der wahren Ortszeit am Ort des Bezugsmeridians der Zeitzone (die „wahre Zonenzeit").
- **4. Schritt:** Zifferblatt zur Anzeige der mittleren Sonnenzeit am Ort des Bezugsmeridians, welche der „Armbanduhrzeit" entsprechen sollte.

Schritt 1 – Zifferblatthöhe *H* und Schattenstablänge *l*

[zurück zum Anfang]

Zylinderhöhe *H* und geografische Breite φ

Der eigentliche Anzeigewert einer Zylindersonnenuhr ist die Länge des vom Schattenwerfer ausgehenden senkrecht nach unten verlaufenden Schattens l (siehe Abb. 3). Der Wertebereich der Schattenlänge l reicht von 0 bis l_{max} (Nullpunkt beim Fußpunkt des Schattenstabs).

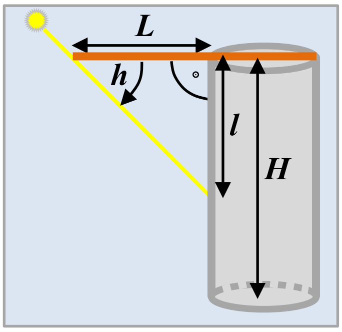


Abbildung 3: Zylinderhöhe *H*, Schattenwerferlänge *L*, Sonnenhöhe *h* und Schattenlänge *l*.

Die maximale Schattenlänge l_{max} liegt zur Zeit des wahren Mittag (bei einem Stundenwinkel $\tau_{max} = 0°$) in den Momenten der Sommersonnenwenden (Nordhalbkugel: $\delta_{max} = 23{,}5°$, Südhalbkugel: $\delta_{max} = -23{,}5°$) vor, wenn die Sonne ihre maximale Höhe h_{max} erreicht hat.

Die maximale Sonnenhöhe h_{max} (für Nord- und Südhalbkugel) erhält man aus: $h_{max} = 90° - |\varphi| + 23{,}5°$, wobei zu bedenken ist, dass der Wertebereich von h von $0 \ldots 90°$ reicht, so dass bei einem Ergebnis von $h_{max} > 90°$ das „Gegenstück“ auf dem Meridian zu nehmen ist, d.h. $h_{max} = 90° - |\varphi| + 23{,}5° - 90°$. Damit wird klar, dass die Sonne für alle geografische Breiten zwischen -23,5° und 23,5° die Maximalhöhe von $h_{max} = 90°$ (auf das Jahr bezogen) erreicht.

Die größte Schattenlänge l_{max} kann wie folgt berechnet werden: $l_{max} = \tan h_{max} \cdot L$ (siehe Abb. 3).

Auf Grundlage des „trigonometrischen Pythagoras“ gilt auch: $\tan h_{max} = \frac{\sin h_{max}}{\sqrt{1-\sin^2 h_{max}}}$.

Diese Form wurde gewählt, weil bei der folgenden Zifferblattberechnung die Werte von sin h eingehen (siehe weiter hinten).

Die maximale Schattenlänge erhält man so aus: $l_{max} = L \cdot \frac{\sin h_{max}}{\sqrt{1-\sin^2 h_{max}}}$.

Mit Hilfe dieser Beziehung kann man die maximale Schattenlänge l_{max} in Abhängigkeit von der geografischen Breite φ und der Schattenstablänge L ermitteln und kann damit die Zylinderhöhe H berechnen/planen (siehe Abb. 3 und 4).

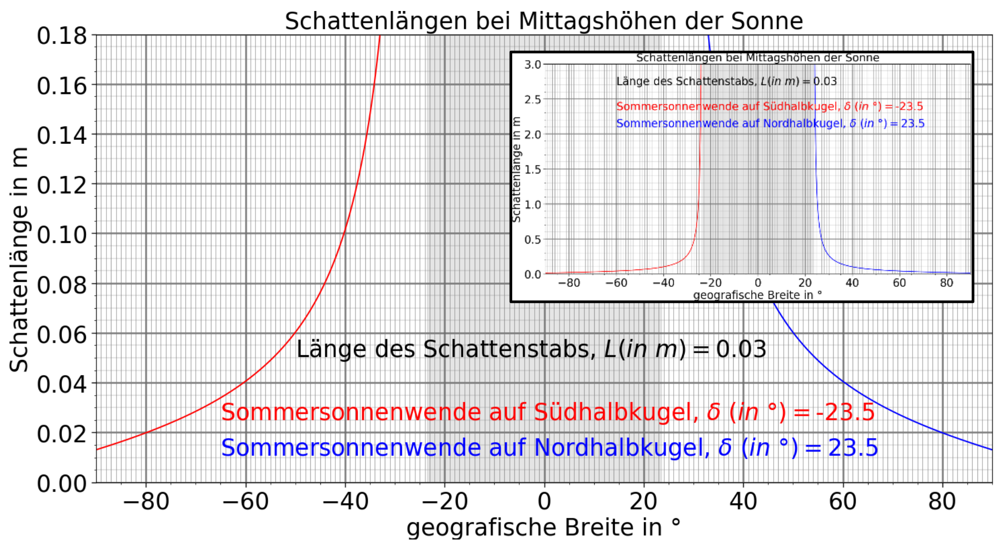


Abbildung 4: Aufgetragen ist die Länge des längsten Mittagsschattens an einer (senkrechten) Wand, hervorgerufen durch einen senkrecht zur Wand orientierten Schattenstab der Länge *L* = 3 cm, der zum Fußpunkt der Sonne am Horizont zeigt. Dieser liegt für die Breitengrade φ = -90°…- 23,5° und φ = 23,5°…90° am Tag der Sommersonnenwende, (δ_{Sonne} = 23,5° für die Nordhalbkugel, -23,5° für die Südhalbkugel) vor. Innerhalb des Breitenbereichs φ = -23,5°…23,5° gelangt die Sonne punktuell in den Zenit (*h* = 90°). Die extrem langen Schatten bei den äquatornahen Breitengraden (grau unterlegter Bereich) führen dazu, dass Zylindersonnenuhren (mit „sinnvollen“ Höhen) bei diesen Breitengraden nicht für alle Tage des Jahres die mit den größten Sonnenhöhen verbundenen Zeiten anzeigen können.
Die im Diagramm gezeigten Schattenlängen können dabei helfen, die Zylinderhöhe *H* für eine Zylindersonnenuhr bei gegebener Schattenstablänge *L* zu planen. So z. B. würde eine 18 cm hohe Zylindersonnenuhrskala bei φ = 33° mit einem Schattenstab der Länge *L* = 3 cm optimal ausgenutzt (siehe Diagramm). ©: Olaf Fischer.

zurück zum Anfang

Zylinderdurchmesser *D* und Datum

Die abrollbare **Mantelfläche des geraden Kreiszylinders**, ein Rechteck, bildet die Zifferblattebene einer Zylindersonnenuhr (siehe Abb. 6). Der Durchmesser ***D*** des Kreiszylinders ergibt sich aus dessen Umfang $U = \pi \cdot D$.
Entlang des Umfangs befindet sich die Datumsachse. Das Datum ist wichtig, weil die Sonnenhöhe und damit die Schattenlänge, die entlang der Zylinderhöhe gemessen wird, auch von der sich über das Jahr hinweg ändernden Sonnenposition δ (Deklination = himmlischer Breitengrad) abhängig ist.
Damit die Ablesung möglichst tagegenau erfolgen kann, sollten die entlang von Mantellinien des Zylinders verlaufenden Tagesstriche einen Abstand von mind. etwa 1 mm haben.

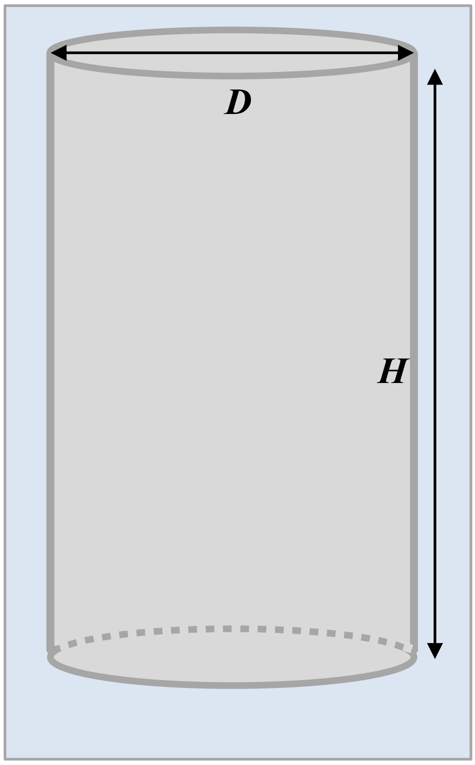


Abbildung 5: Zylinderdurchmesser *D* und Zylinderhöhe *H* legen die Zifferblattgröße $D \cdot \pi \times H$ fest. ©: O. Fischer

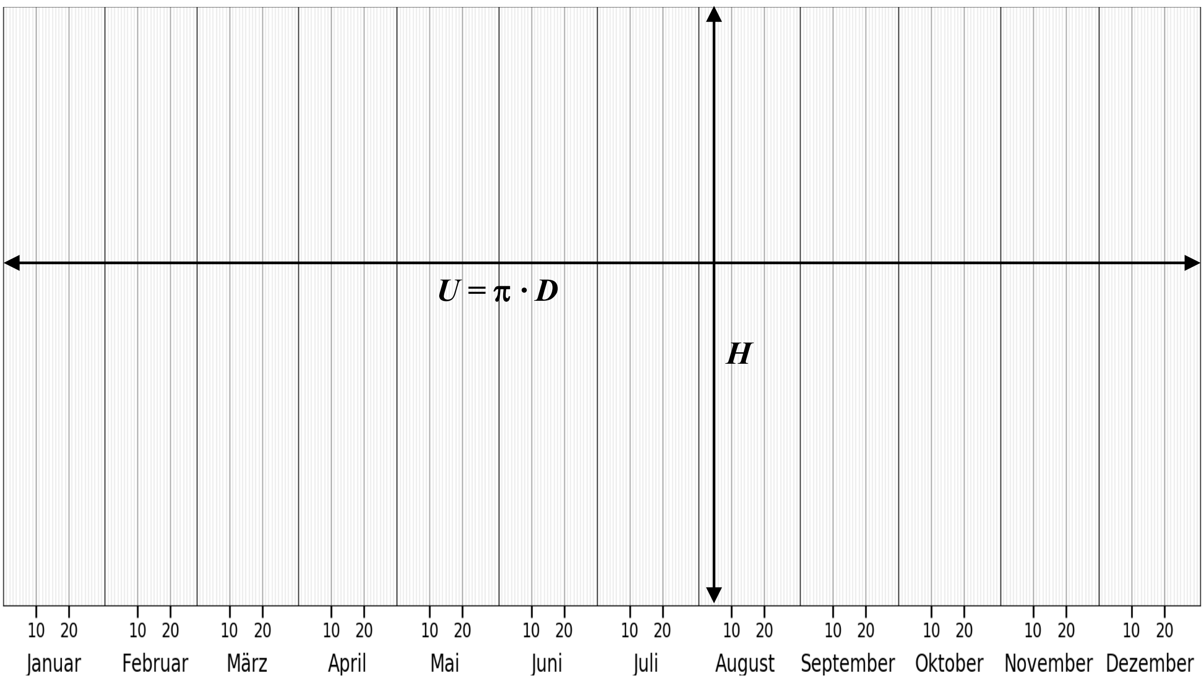


Abbildung 6: Die Zifferblattebene der Zylindersonnenuhr befindet sich auf seiner abgerollten Mantelfläche – einem Rechteck. ©: O. Fischer.

zurück zum Anfang

Schattenstablänge *L* zur optimalen Nutzung der gegebenen Zifferblatthöhe *H*

Bei aus praktischen Gründen gegebener Mantelebenengröße $\boldsymbol{H} \times \pi \cdot \boldsymbol{D}$ (die mit den zur Verfügung stehenden Materialien zusammenhängt) ist es sinnvoll, die Schattenstablänge $\boldsymbol{L}$, die es ermöglicht, eine gegebene Zifferblatthöhe $\boldsymbol{H}$ optimal auszunutzen, so dass der längste Schatten das Zifferblatt gerade noch trifft, zu berechnen: $l_{\max} = L \cdot \frac{\sin h_{\max}}{\sqrt{1-\sin^2 h_{\max}}}$ → mit $l_{\max} = H$: $L = H \cdot \frac{\sqrt{1-\sin^2 h_{\max}}}{\sin h_{\max}}$.
Beispielergebnisse werden in Abb. 7 gezeigt.

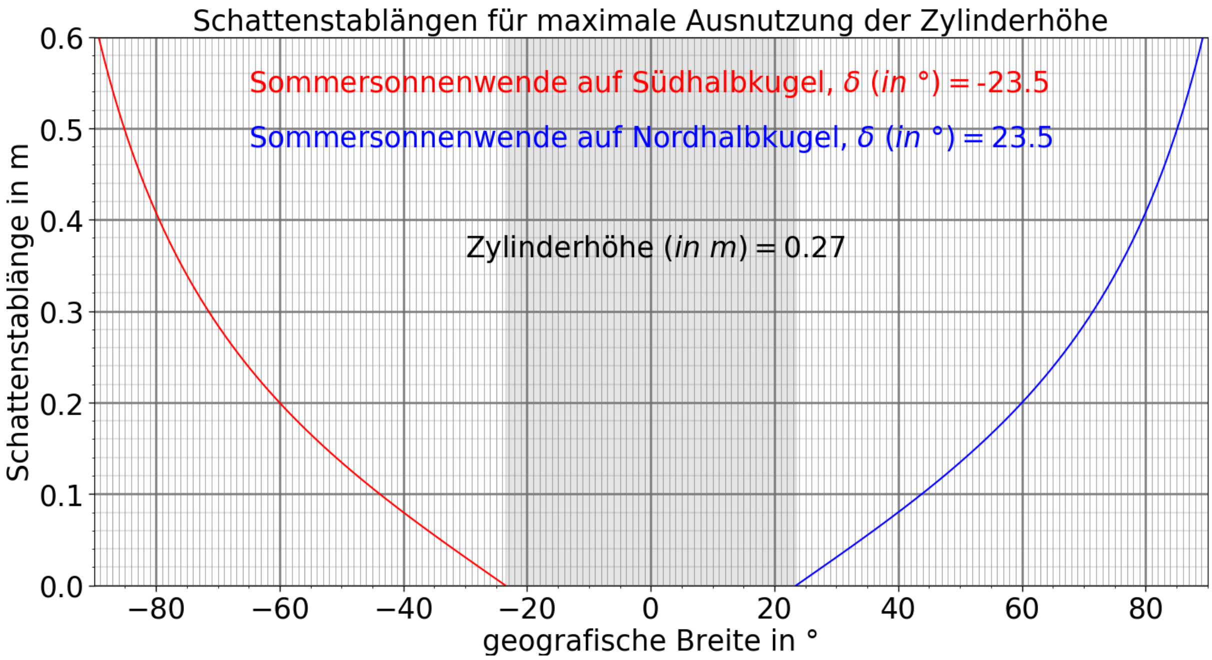
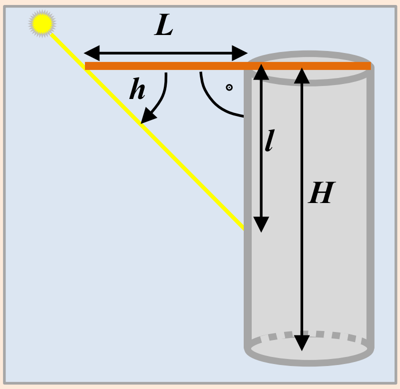


**Abbildung 7: Aufgetragen ist Länge (*L*) des Schattenstabs einer Zylindersonnenuhr, deren Zifferblatt eine Höhe (*H*) von 27 cm (Breitseite von A3-Papier) hat (gemessen vom Fußpunkt des Schattenstabs bis zur maximal möglichen Schattenlänge für den Breitengrad). Der Zylinder muss etwas höher sein, weil die Datumsskala dazukommt.
Der grau unterlegte Bereich zwischen den Breitengraden der Wendekreise (φ = -23,5°…23,5°) wurde ausgespart, weil die Sonne dort in den Zenit gelangt, was zu einer unendlich langen Schattenlänge führt. Entsprechen kann die 12-h-Stundenlinie dort nicht mehr auf dem Zifferblatt sein. Für Breitengrade sehr nahe den Wendekreisen wäre der Schattenstab unpraktisch kurz, weshalb die 12-h-Stundenlinie auch hier nicht mehr auf dem Zifferblatt sein kann. Ab etwa -30°/30° kann man mit einer Schattenstablänge von z. B. *L* = 3 cm (bei *H* = 27 cm) ein Zifferblatt erzeugen, welches alle Stundenlinien enthält. (Man wird aber feststellen, dass die Stundenlinienabstände zum Mittag hin sehr stark zunehmen.) Die Schattenstablängen (also die Überstände über der Mantelfläche) für eine A3-Bastelvorlage (nutzbare Zifferblatthöhe: H = 270 mm) für Orte in Deutschland (φ = 48° … 54°) wären dann ca. 12 cm … 16 cm. ©: Olaf Fischer.**

zurück zum Anfang

Aufgabe 1 – Berechnung der Schattenstablänge

Berechne die Länge $\boldsymbol{L}$ des Schattenstabs für eine Zylindersonnenuhr, die bei einem Breitengrad von φ = 50° aufgestellt werden soll.
Die maximal mögliche Schattenlänge $\boldsymbol{l}$ soll gerade noch auf das Zifferblatt der Höhe $\boldsymbol{H}$ = 18 cm passen.
Den Wert von $\boldsymbol{l}$ erhält man über die maximal mögliche Sonnenhöhe $\boldsymbol{h}$, die am Tag der Sommersonnenwende (δ = 23,5°) zum Mittag erreicht wird. Wenn die Sonne dann im Meridian steht, gilt: $\boldsymbol{h = 90° - \varphi + \delta}$.

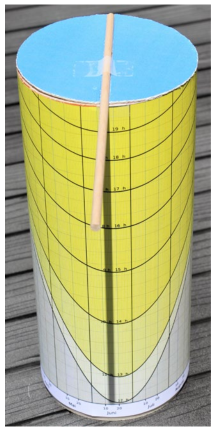


Schritt 2 – wahre Ortszeit

zurück zum Anfang

Im Weiteren soll das Zifferblatt für eine Zylinder-Sonnenuhr berechnet werden. Die Rechnung basiert auf der folgenden Transformationsbeziehung zwischen Horizont- und Äquatorkoordinaten der Sonne:

$$\sin h = \cos\varphi \cdot \cos\tau \cdot \cos\delta + \sin\varphi \cdot \sin\delta.$$



Ziel ist zunächst die **wahre Ortszeit** (WOZ). Diese erhält man ganz einfach, indem man zum **Stundenwinkel** τ ***** der Sonne 12 Stunden addiert:

$$\mathrm{WOZ} = \tau + 12\ \mathrm{h}.$$

* Der Stundenwinkel entspricht der Zeit (hier als Winkelangabe), die seit dem Meridiandurchgang der Sonne (dem wahrem Mittag) vergangen ist.

Der Stundenwinkel der Sonne τ steht dabei im Zusammenhang mit der geografischen Breite φ des Aufstellortes, der Deklination der Sonne δ und der Höhe h der Sonne, welche wiederum mit der Schattenlänge zusammenhängt.
Die Zeitablesung der Zylinder-Sonnenuhr erfolgt mit Hilfe von Stundenlinien, die auf ihrem Zifferblatt abgedruckt sind. Jeder Punkt einer Stundenlinie steht für eine Schattenlänge, die an einem bestimmten Tag zu der für diese Linie festgelegten Uhrzeit erreicht wird.
Für jede Stundenlinie, d. h. für jeden Stundenwinkel τ, wird nach oben gezeigter Beziehung jeweils die Sonnenhöhe für jeden Tag des Jahres (oder auch feiner geteilt) und aus dieser dann die Schattenlänge berechnet. Da man diese Rechnung sehr oft durchführen muss, empfiehlt es sich sehr, einen Computer (ein **Programm**) dafür zu nutzen. Abb. 9 zeigt beispielhaft ein Ergebnis eines **computergestützt erzeugten Zifferblatts** einer Zylindersonnenuhr.

Eine für diese Rechnung wichtige Eingangsgröße ist die **Deklination δ der Sonne**. Diese kann näherungsweise wie folgt berechnet werden [1]:

$$\delta = 23{,}45° \cdot \sin\left[\frac{360°}{365} \cdot (d + 284)\right].$$

Etwas genauer [1]:

$$\delta = -\arcsin\{0{,}39779 \cdot \cos[0{,}98565° \cdot (d + 10) + 1{,}914° \cdot \sin(0{,}98565° \cdot (d - 2))]\}.$$

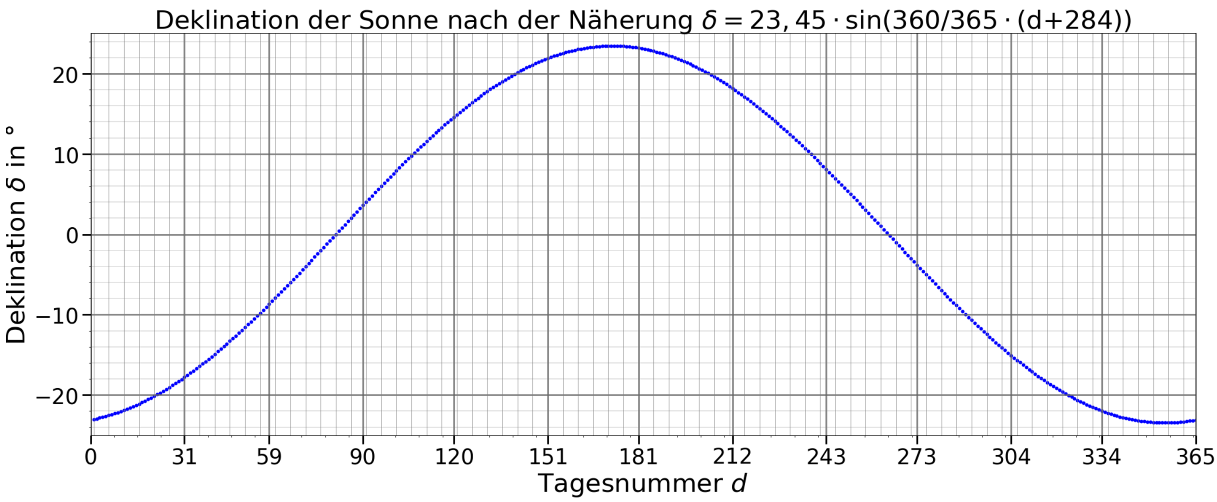


Abbildung 8: Bedingt durch den Umlauf der Erde um die Sonne und durch die Achsneigung der Erde (23,5°) verändert sich die Position der Sonne am Sternhimmel im jährlichen Rhythmus im Deklinationsbereich δ = -23,5° bis 23,5°. Der hier gezeigte jährliche Verlauf der Deklination wurde nach der folgenden Näherungsformal [1] in Abhängigkeit von der Tageszahl *d* im Jahr ermittelt: $\delta = 23{,}45° \cdot \sin\,[360°/365 \cdot (d + 284)]$. *d* wird gezählt ab Mitternacht UT (Zeit beim Bezugslängengrad 0° - Greenwich). So z. B. hätte der 1. Januar, 12 Uhr MEZ (= 11 Uhr UT) eine Tageszahl von *d* = 11 / 24 ≈ 0,46.

zurück zum Anfang

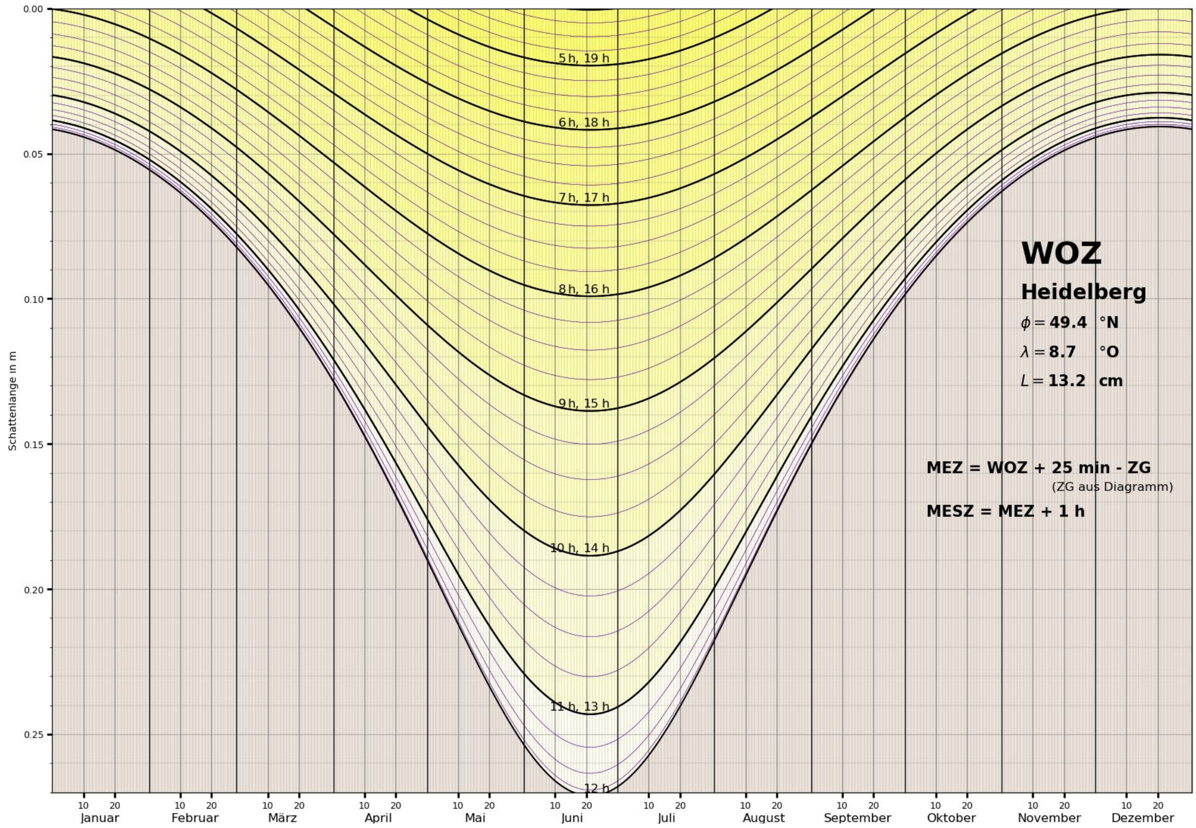
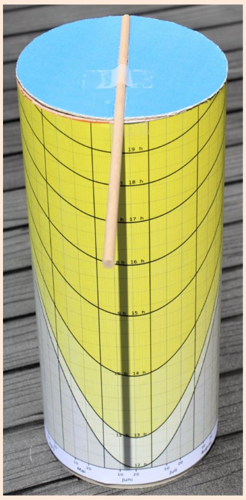


Abbildung 9: Zifferblatt einer Zylinderuhr für den Breitengrad φ = 49,4° (Heidelberg). Um die Zifferblatthöhe von hier 27 cm (A3) voll auszunutzen (aber auch nicht zu überschreiten), hat der Schattenstab eine Länge von L = 13,2 cm. Das Zifferblatt zeigt die wahre Ortszeit (WOZ) an jedem Ort mit diesem Breitengrad in 15-min-Abständen an, wobei die vollen Stunden in Schwarz dargestellt werden. Subtrahiert man davon 12 h, so erhält man den jeweils aktuellen Stundenwinkel τ der Sonne ($\tau = WOZ - 12$ h). Die angegebene Korrekturrechnung (siehe auch in den Anhang) ermöglicht es, aus der angezeigten wahren Ortszeit auf die Zeit einer Armbanduhr (MEZ) zu schließen. ©: Olaf Fischer.

zurück zum Anfang

Aufgabe 2 – Stundenlinie einer Zylindersonnenuhr

Konstruiere die Stundenlinie für die wahre Ortszeit (WOZ) von 12 Uhr (der Stundenwinkel der Sonne beträgt dann $\tau = 0^h$) für eine Zylindersonnenuhr, die bei 50° nördlicher Breite aufgestellt werden soll. Berechne dazu die Schattenlängen, die ein Schattenstab der Länge L = 9 cm um 12 Uhr WOZ an jedem Monatsersten erzeugt. Die Ergebnisse sind der Übersicht halber in der Tabelle unten festzuhalten.



Für 12 Uhr WOZ vereinfacht sich die Rechnung stark, weil die Sonne dann im Meridian steht und es gilt: $\boldsymbol{h = 90° - \varphi + \delta}$.

Die Mittagshöhen der Sonne $\boldsymbol{h}$ stehen mit den für die Stundenlinienkonstruktion benötigten Schattenlängen $\boldsymbol{l}$ in einem einfachen trigonometrischen Zusammenhang. Die Deklinationswerte $\boldsymbol{\delta}$, welche die Sonne an den Monatsersten hat, können der Tabelle entnommen werden.

Tag	1.1.	1.2.	1.3.	1.4.	1.5.	1.6.	1.7.	1.8.	1.9.	1.10.	1.11.	1.12.
δ	-23,0°	-17,2°	-7,7°	4,5°	15,0°	22,0°	23,1°	18,1°	8,4°	-3,1°	-14,4°	-21,8°
h												
l												

Zur Konstruktion werden die Schattenendpunkte über dem Datum bzw. der Tageszahl aufgetragen und durch eine Kurve interpoliert.

Schritt 3 – wahre Zonenzeit

zurück zum Anfang

(wahre Ortszeit beim Zeitzonenmeridian)

Die Rotation der Erde hat zur Folge, dass der Sternhimmel am Erdbewohner scheinbar vorbeizieht. So bestimmt der scheinbare tägliche Lauf der Sonne unseren Tag. Da die Erde eine Kugel ist, hängt die Position der Sonne am Himmel vom Ort auf der Erde ab. So steht die Sonne nur für Beobachter auf dem gleichen Längengrad zur gleichen Zeit im Meridian. Für jeden anderen Längengrad ist die Position der Sonne gegenüber dem Meridian etwas verschoben. Entsprechend spricht man von Ortszeit.

Damit sich die Bewohner eines Gebiets, dass mehrere Längengrade umfasst, sich zeitlich einfacher organisieren können, hat man eine **Zonenzeit** eingeführt, welche sich von der Ortszeit des jeweiligen Bezugsmeridians ableitet. Für Deutschland gilt die mitteleuropäische Zeit mit dem Bezugsmeridian 15° Ost (Görlitz).

Im Folgenden soll die Sonnenuhr die wahre Ortszeit nicht für den Längengrad des Aufstellorts, sondern für den Bezugsmeridian anzeigen. Die Sonne hat aber am Aufstellort einen anderen Stundenwinkel als am Ort des Bezugsmeridians. So z. B. hat die Sonne an einem Aufstellort der Länge λ = 8,7° Ost (Heidelberg) einen um 6,3° verschobenen Stundenwinkel in Bezug zum Ort des Bezugsmeridians bei 15° Ost. Die Berechnung der Stundenlinie erfolgt dann auf Grundlage des entsprechend dem Längenunterschied $\Delta\lambda$ um $\Delta\tau$ korrigierten Stundenwinkels: $\boldsymbol{\tau_\lambda = \tau_{15°} - \Delta\tau}$ **(τ in °),** $\Delta\tau = \Delta\lambda \cdot \frac{1\,\mathrm{h}}{15°}$.

Abb. 10 zeigt (in Fortsetzung zu Abb. 9) beispielhaft das Zifferblatt einer Sonnenuhr, die bei λ = 8,7° Ost aufgestellt ist, aber die Ortszeit für den Bezugsmeridian bei λ = 15° Ost (die Zonenzeit) anzeigt.

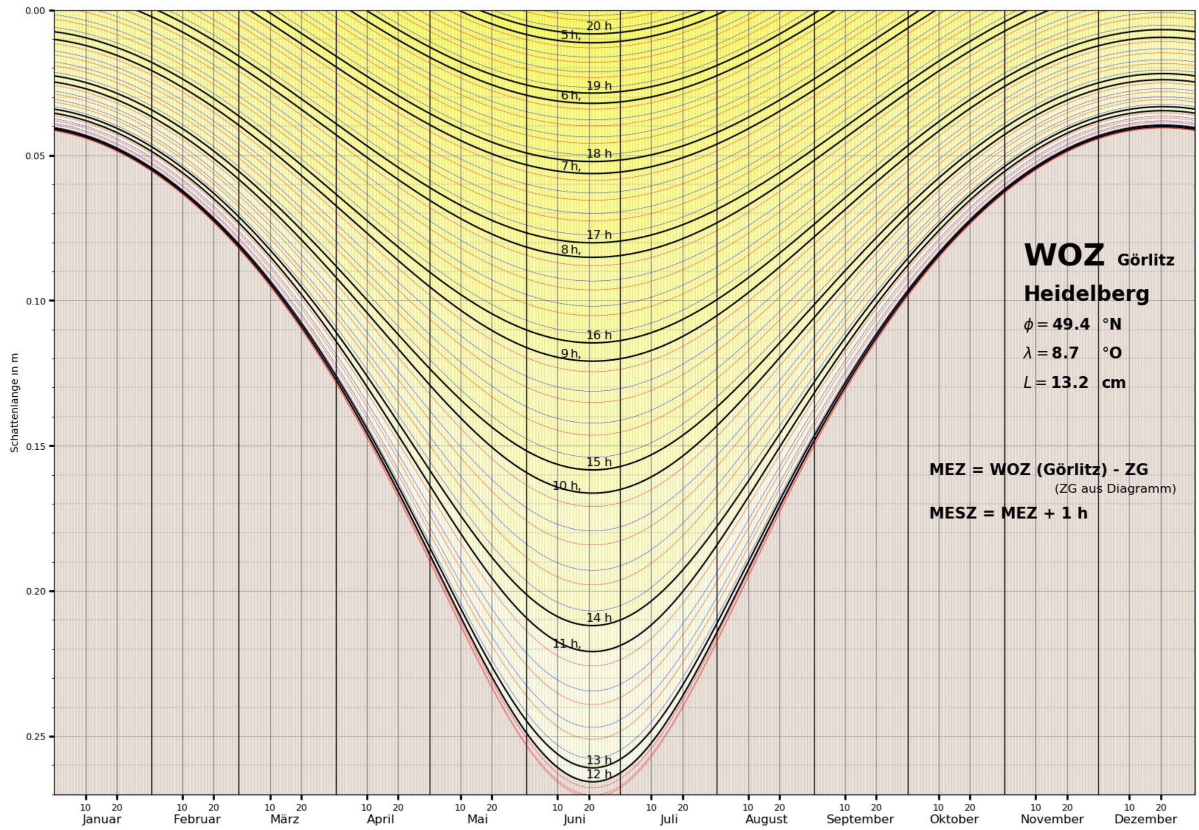


Abbildung 10: Zifferblatt einer Zylindersonnenuhr für den Breitengrad φ = 49,4°N, die bei einem Längengrad von λ = 8,7°O (Heidelberg) aufgestellt ist, aber die wahre Ortszeit für Orte auf dem Zeitzonenmeridian (λ = 15°O) anzeigt. Mit der Schattenstablänge *L* = 13,2 cm wird das Zifferblatt der Höhe *H* = 27 cm (A3) voll ausgenutzt.
Im Vergleich zu Abb. 9 fällt auf, dass sich die Stundenlinien nun teilen. Die Stundenlinien für die vollen Stunden erscheinen in Schwarz, die 15-min-Linien des Vormittags in Blau und die des Nachmittags in Rot.
Während in Abb. 9 z. B. die 11-Uhr-Linie und die 13-Uhr-Linie zusammenfallen, fällt die 11-Uhr-Linie nun flacher aus als die 13-Uhr-Linie (siehe dazu auch Abb. 13 im Anhang). Mit der aufgeführten Korrekturrechnung kann aus der angezeigten wahren Ortszeit am Zeitzonenmeridian (hier in Görlitz) auf die Zeit auf der Armbanduhr geschlossen werden (Weiteres dazu im Anhang). ©: Olaf Fischer.

zurück zum Anfang

Aufgabe 3 – Sonnenstand und Webcams

Nutze Livecams, die bei verschiedenen Längengraden installiert sind und im Internet abrufbar sind, um anhand verschiedener Anzeichen (Sonne direkt, Schattenwurf, Himmelshelligkeit) in den gezeigten (Live-)Bildern den gleichzeitig vorliegenden unterschiedlichen Sonnenstand und damit die unterschiedlichen wahren Ortszeiten zu demonstrieren!

Aufgabe 4 – wahre Zonenzeit

Eine Sonnenuhr wird in Greenwich (λ = 0°) aufgestellt. Sie soll aber die WOZ von Görlitz (λ = 15°) anzeigen. Welche Zeit muss sie anzeigen, wenn die Sonne in Greenwich durch den Meridian geht (im Süden steht)?

Schritt 4 – mittlere Zonenzeit

(mittlere Ortszeit beim Zeitzonenmeridian)

zurück zum Anfang

Damit die Anzeige der Sonnenuhr mit derjenigen einer im Alltag verwendeten Uhr (am Armband, auf den Handy, auf dem Bahnhof, …) übereinstimmt, bedarf es schließlich noch einer wichtigen Korrektur, die den „Mangel" behebt, dass die Sonne sich am Himmel ungleichmäßig schnell (aufgrund des Umlaufs der Erde um die Sonne) weiterbewegt. Dies führt dazu, dass sich die wahren Tageslängen (von Mittag zu Mittag WOZ) um bis zu 30 s voneinander unterscheiden. Eine gedachte gleichmäßig wandernde Sonne (praktisch: eine Uhr) liefert die mittlere Ortszeit (MOZ). Um die Stundenlinien der Sonnenuhr mit den Angaben der MOZ zu versehen, muss der Unterschied zwischen WOZ und MOZ korrigiert werden. Dazu nutzt man die sogenannte **Zeitgleichung** (ZG).

Es gilt: **ZG = WOZ – MOZ**. Eine gute Näherung von ZG erhält man aus der folgenden Gleichung [3] (siehe auch Abb. 11) in Minuten:

$$\boldsymbol{ZG = -7{,}65\,\mathrm{min}\cdot\sin\left[(d-3)\cdot\frac{360°}{365}\right] - 9{,}83\,\mathrm{min}\cdot\sin\left[(d+10)\cdot\frac{360°}{182{,}5}\right]},$$

wobei die Tageszahl d wie schon bei der zuvor aufgeführten Näherungsformel zur Deklination der Sonne ab Mitternacht UT (Zeit beim Bezugslängengrad 0° – Greenwich) gezählt wird.
Die Tageszahl d wurde schon in Schritt 2 zur Berechnung der Deklination der Sonne benötigt (siehe auch Abb. 8).

Soll eine Sonnenuhr nicht die wahre Ortszeit (WOZ), sondern die mittlere Ortszeit (MOZ) anzeigen, so muss die Zeitgleichung bei der Berechnung der Stundenlinien eines Sonnenuhrenzifferblatts einbezogen werden.
Der nach wie vor nach WOZ (eben nach der Sonne vor Ort) angezeigte Schatten muss also eine um ZG korrigierte Zeitangabe bekommen: **WOZ = MOZ + ZG**. Soll also z. B. eine Sonnenuhr in Görlitz anzeigen, wann es in Görlitz 12 Uhr MOZ (das ist in Görlitz auch gleich der MEZ) ist, dann muss die 12-h-Stundenlinie an der Stelle auf dem Zifferblatt verlaufen, wo bei einer Sonnenuhr, welche nur die WOZ anzeigt, die (12 h+ZG)-„Stundenlinie" liegt.
Abb. 12 zeigt beispielhaft das Zifferblatt einer bei φ = 49,4°N (Schattenstablänge L = 13,2 cm für das Zifferblatt der Höhe H = 27 cm) und einen Längengrad von λ = 8,7°O aufgestellten Zylindersonnenuhr (siehe auch Abb. 9 und 10), die nun auch zeitgleichungskorrigiert ist, d. h. die mittlere Ortszeit (MOZ) anzeigt, welche der dem Schüler vertrauten „Armbanduhrzeit" entspricht.

zurück zum Anfang

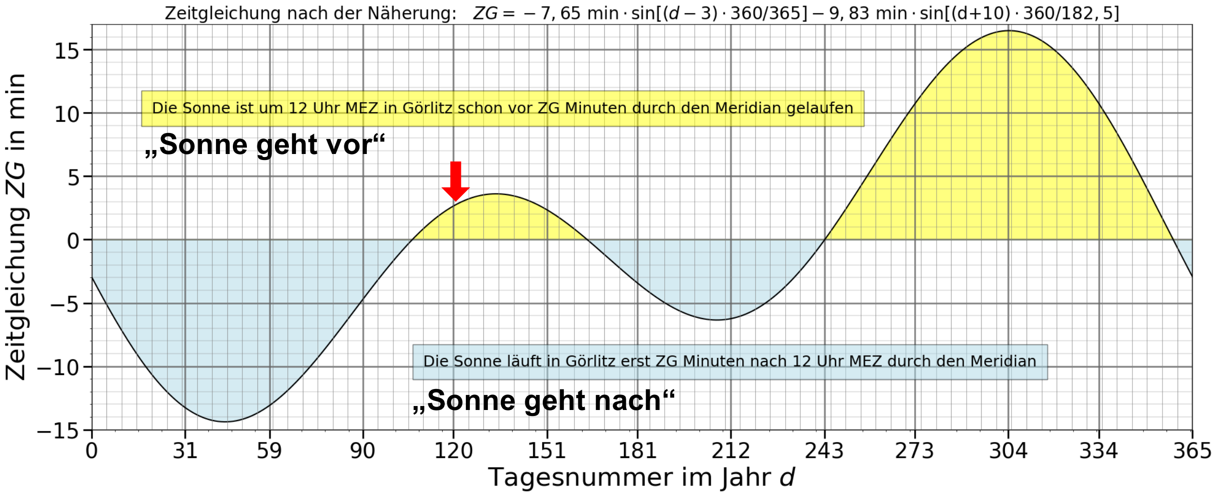


Abbildung 11: Verlauf der Zeitgleichung, d.h. der Differenz ZG = WOZ – MOZ im Laufe eines Jahres. Die Kurve wurde mit Hilfe der oben angegebenen Beziehung angenähert. Der Wert von ZG kann verwendet werden, um die Stundenlinien einer Sonnenuhr so zu berechnen, dass sie die Zeit in MOZ anzeigen. Für die Berechnung der Stundenlinie, die MOZ anzeigen sollen, muss ein um ZG korrigierter Stundenwinkel genutzt werden: $\tau_{WOZ} = \tau_{MOZ} + ZG$ (siehe auch im Anhang). So z. B. müsste für die Berechnung der 12-h-Stundenlinie (MOZ) für eine Sonnenuhr in Görlitz am 1. Mai (der Tag 121, roter Pfeil) ein Stundenwinkel von $\tau_{WOZ} = 0^{h} + 3^{\ min}$ genutzt werden.

zurück zum Anfang

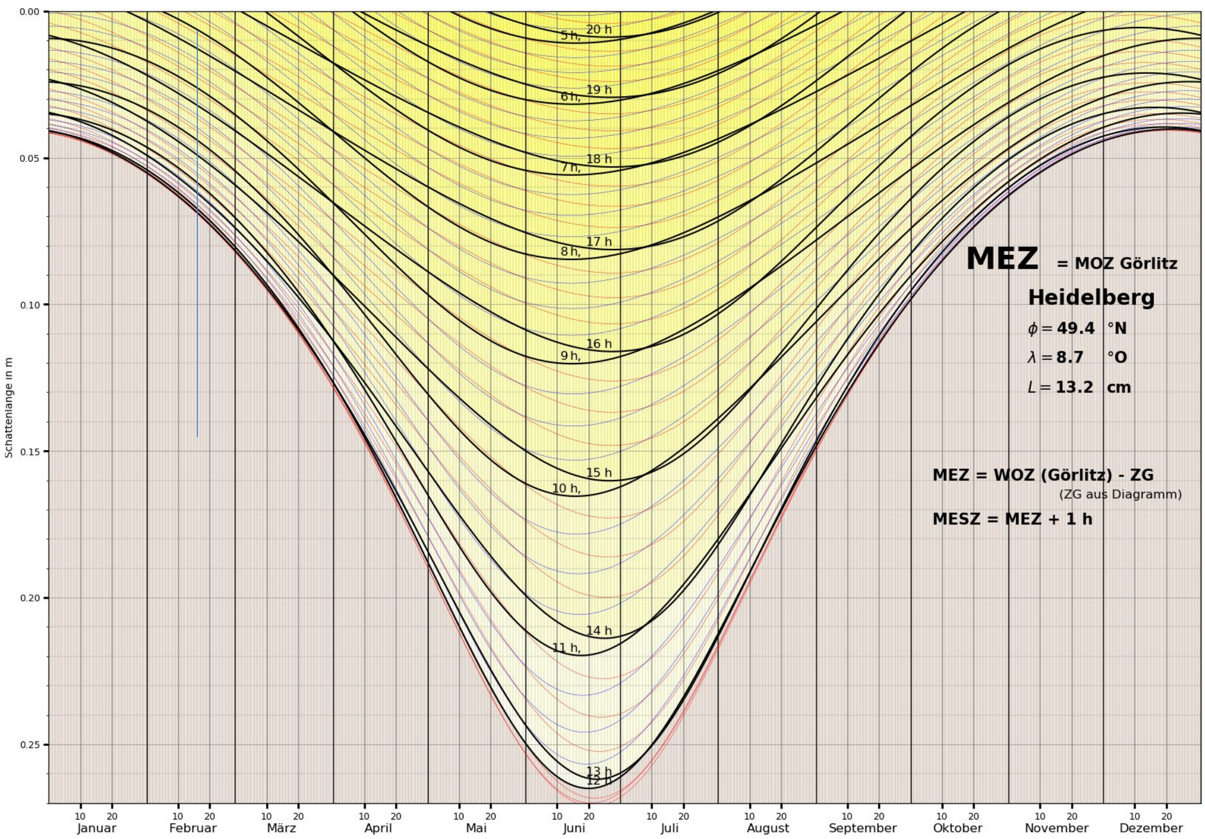


Abbildung 12: Zifferblatt einer Zylindersonnenuhr für den Breitengrad φ = 49,4°N, die bei einem Längengrad von λ = 8,7°O (Heidelberg) aufgestellt ist, aber die mittlere Ortszeit (MOZ) für den Zeitzonenmeridian (λ = 15° O), d. h. die mitteleuropäische Zeit (MEZ - die Zeit von der Armbanduhr) anzeigt. Mit der Schattenstablänge L = 13,2 cm wird das Zifferblatt der Höhe H = 27 cm (A3) voll ausgenutzt. Im Vergleich zu Abb. 10 kommt noch die Zeitgleichungskorrektur hinzu. Die Stundenlinien für die vollen Stunden erscheinen in Schwarz, die 15-min-Linien des Vormittags in Blau und die des Nachmittags in Rot. Man vergleiche mit dem nicht zeitgleichungskorrigierten Zifferblatt in Abb. 10.
©: Olaf Fischer

zurück zum Anfang

Aufgabe 4 – Langzeitexperiment – Aufzeichnung des Analemmas

Suche dir eine Südwand, an der du wettergeschützt Markierungen anbringen kannst! Installiere einen waagerechten Schattenwerfer, dessen Schattenendpunkt gut definiert auf der Wand erscheint! Markiere nun jeden Tag zur exakt gleichen Uhrzeit (es empfiehlt sich dazu die Nutzung einer Funkuhr) den Schattenendpunkt! Interpretiere den Verlauf der Schattenendpunkte!

Man bezeichnet die Figur, die man erhält, wenn man alle im Laufe eines Jahres aufgezeichneten Punkte durch eine interpolierende Kurve verbindet als Analemma.

Im Bild rechts wird eine Anordnung gezeigt, die In der Sternwarte Sonneberg zur Aufzeichnung Der Schattenendpunkte jeweils um 12 Uhr MEZ verwendet wurde.

Ganz praktisch – Bauanleitung und Hinweise zur Nutzung

zurück zum Anfang

Für Bastelvorlagen auf bedruckbarem stabilem Papier (120 … 140 g/m²) ist es sinnvoll, von den gängigen Druckpapiergrößen auszugehen. Der bedruckbare Bereich einer A4-Seite (210 mm × 297 mm) hat etwa eine Größe von 200 mm × 285 mm). Für eine A3-Seite (297 mm × 420 mm) beträgt er etwa 285 mm × 297 mm. Entsprechend groß kann man die **Mantelfläche** des Zylinders planen.

Version 1: Schnittbogen

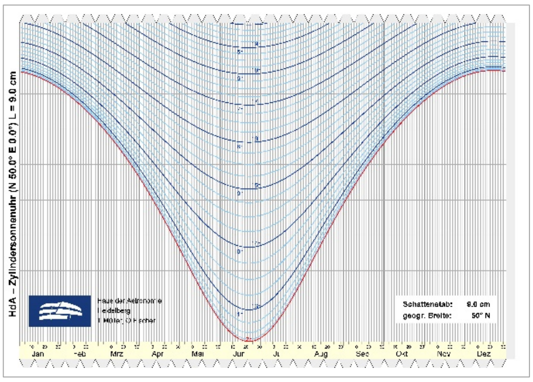
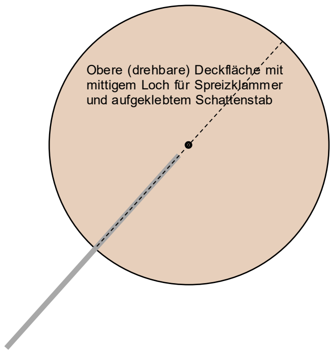


Abbildung 13: Die erste Seite des Schnittbogens enthält das Zifferblatt (die Mantelfläche) einer Zylindersonnenuhr für den Breitengrad von Heidelberg. Die zweite (hier nicht gezeigte Seite) enthält dann die Kreise für die Grund- und Deckfläche sowie einen „Aufkleber“ mit Hinweisen zur Nutzung der Sonnenuhr. ©: Thomas Müller / HdA.

Der schnellste Weg zu einer Zylindersonnenuhr basiert auf einem **Schnittbogen-Vordruck** (siehe Abb. 13 und im Anhang).
Für die Herstellung der Sonnenuhr werden neben dem zweiteiligen Schnittbogen nur noch etwas Pappe, ein Holzstab, eine Schere, etwas Klebstoff und evt. eine Spreizklammer benötigt.
Nach dem Ausschneiden der Mantelfläche werden die Klebelaschen gefalzt und oben und unten genickt. Schließlich kann die Mantelfläche zum Zylinder gerollt und verklebt werden. Zur Stabilisierung des Zylinders könnte man noch einen Pappkreis mittig in diesen einkleben. Die weitere Stabilisierung geschieht durch die **Grundfläche** und die **Deckfläche** des Zylinders. Diese Kreisflächen sind auszuschneiden und durch Pappe zu verstärken und dann mit den Klebelaschen der Mantelfläche zu verkleben.
Der Aufkleber mit den Nutzungsinformationen wird auf das ungenutzte Zifferblattfeld geklebt.
Der **Schnittbogen-Vordruck** (für verschiedene Breitengrade**)** wie auch eine **Anleitung zum Bau und zur Nutzung der Sonnenuhr** für die Hand des Schülers findet sich im Anhang.

Direkt am oberen Ende des Zylinders (Schattenlänge = 0 cm) wird der Schattenstab auf der Deckfläche positioniert. Dieser muss senkrecht zu dieser stehen und einen durch die Zifferblatthöhe und den Breitengrad definierte Länge haben. Zudem muss er sich in alle Radiusrichtungen der Deckfläche auf den Tag der Ablesung einstellen lassen. Eine Möglichkeit wäre, den Schattenstab mit einer zweiten ebenfalls pappverstärkten Deckfläche zu verbinden, welche dann z. B. mittels einer Spreizklammer um die Zylinderachse drehbar mit der festen Deckfläche verbunden wird.



Version 2: Nutzung von „Alltagszylindern“ *zurück zum Anfang*

Für eine stabilere und damit auch langlebigere Ausführung empfiehlt sich die Nutzung von zylindrischen Grundkörpern, wie sie uns im Alltag des Öfteren begegnen (Verpackungen, Papprollen, Rohre, … siehe Abb. 14). Die Durchmesser müssen lediglich so groß sein, dass die Zifferblattlänge (meist durch die Längen von A4 oder A3 bestimmt) komplett auf den Zylinderumfang passt.

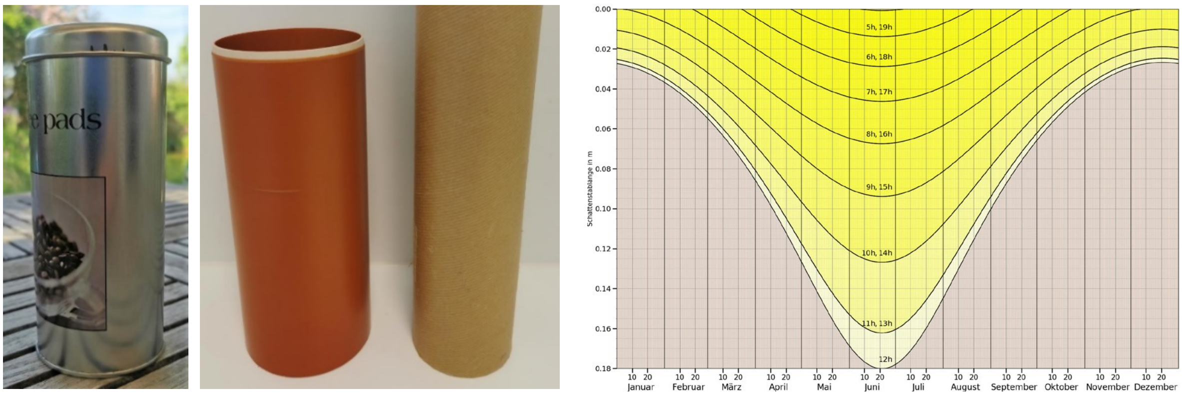
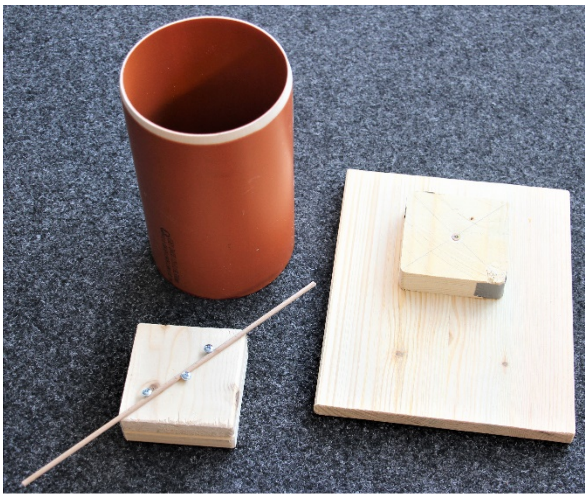


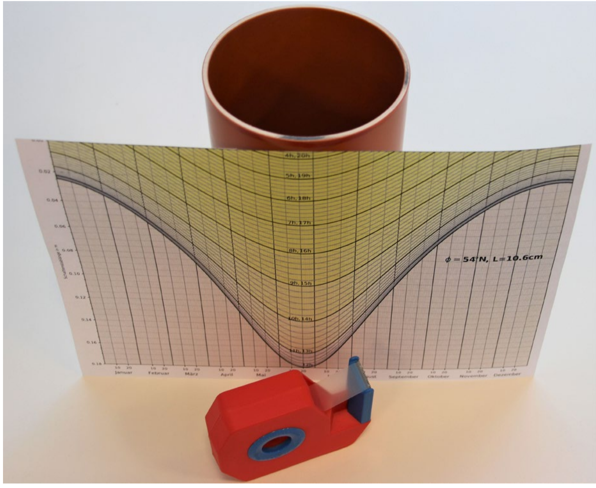
Abbildung 14: Verschiedene Alltagsobjekte (hier eine Dose, ein Abwasserrohr und eine Papphülse) eignen sich als Grundkörper für eine Zylindersonnenuhr. Das rechts gezeigte Zifferblatt wird dann einfach um den Zylinder gewickelt, wobei es diesen nicht unbedingt komplett umschließen muss. ©: Olaf Fischer.

Im Folgenden wird eine Idee in Bildern vorgestellt, bei der ein heutzutage übliches und im Baumarkt erhältliches Abwasserrohr die zentrale Rolle spielt.

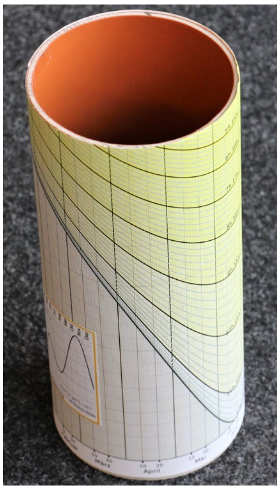


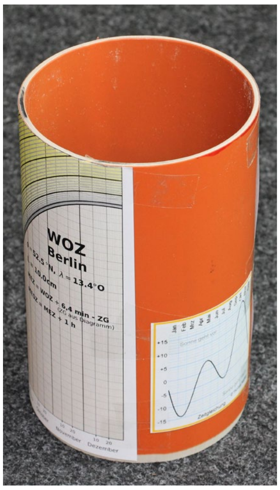
Das Rohr (der Zylinder) wird zunächst auf die nötige Länge gekürzt (man achte auf einen Schnitt exakt senkrecht zur Rohrachse), die der ausgedruckten Zifferblatthöhe (mit Skala) entspricht. Im Falle eines A4-Ausdrucks sind das 20 cm und im Falle eines A3-Ausdrucks 29 cm.
Auf eine Holzplatte (ca. 20 × 25 cm) wird ein quadratisches Prisma (Höhe ca. 3 cm) wie dargestellt befestigt. Dieses Prisma dient später zur Fixierung des Rohrs auf der Platte. Die Diagonale des Prismas entspricht dem Innendurchmesser des Rohrs.
Ein weiteres gleich großes quadratisches Prisma dient als Schattenstabhalterung. Der Schattenstab wird durch drei Schrauben in Richtung der Diagonale befestigt, Diese Art der Befestigung erlaubt eine genaue Justierung der Schattenstablänge.

zurück zum Anfang

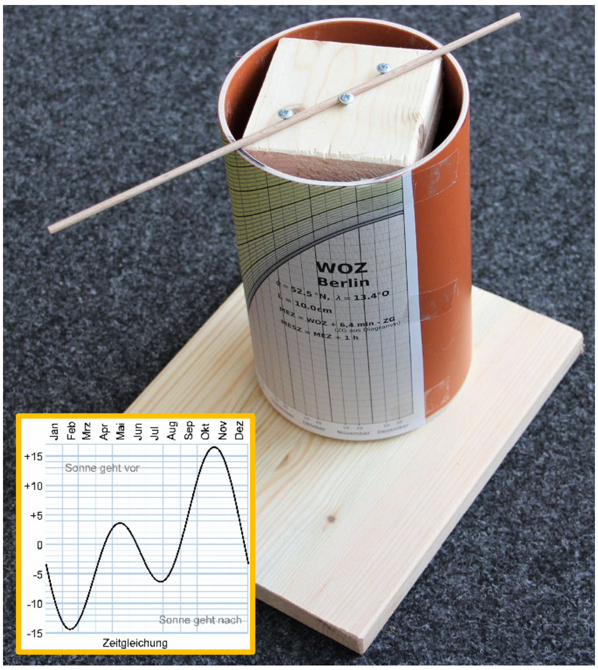


Das zuvor auf A4 oder A3 ausgedruckte Zifferblatt wird nun mittels Klebestreifen mit dem Rohr verbunden. Es ist darauf zu achten, dass die Nulllinie der Schattenlängenskala bündig am oberen Rand anliegt.





Das Zifferblatt bildet die Mantelfläche des Kreiszylinders. Die Länge des Zifferblatts (die Länge der Datumsskala) darf maximal dem Umfang des Zylinders entsprechen, sie kann aber (aus Papierformatgründen) auch kürzer sein. Der frei bleibende Platz könnte z. B. zum Anbringen von wichtigen Zusatzinformationen (hier das Zeitgleichungsdiagramm) genutzt werden.



Der mit dem Zifferblatt versehene Zylinder wird nun auf das auf der Holzplatte befestigte quadratische Prisma gesetzt und ist damit verankert.
Das zweite quadratische Prisma (welches ebenso exakt ins Rohr passt) wird nun oben eingesetzt und die über die Außenseite des Rohrs ragende Schattenstablänge ist genau einzustellen.
Schließlich können Informationen zur Sonnenuhr und ihrer Nutzung (w. z. B. das abgebildete Zeitgleichungsdiagramm) auf die freien Bereiche des Zylinders und der Grundplatte geklebt werden.
Die anhängende Datei **‚Bastel- und Nutzungsanleitung – Zylindersonnenuhr.pdf‘** enthält die hier beschriebene Bauanleitung für die Hand des Schülers und gibt dazu noch die nötigen Hinweise zur Nutzung der Sonnenuhr und zur Bestimmung der „Armbanduhrzeit“ aus der abgelesenen Sonnenuhrzeit (WOZ).

Quellen

zurück zum Anfang

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Position_of_the_Sun

[2] https://www.timeanddate.de/astronomie/mittag (gute Quelle in Sachen Zeit und Sonne)

[3] http://www.swetzel.ch/sonnenuhren/zgel/zgel.html

[4] https://de.wikipedia.org/wiki/Zeitgleichung

[5] Zenkert, A.: Faszination Sonnenuhr, Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt am Main, 1995

[6] Zenkert, A.: Sonnenuhren (Bastelvorlagen), Verlag für Lehrmittel, Pößneck

[8] Fischer, O., Müller, Th.: Wie kommt eine Sonnenuhr an die Schulhauswand?, WIS 9/2021

[9] Fischer; O.: Wie ein Gnomon-Schatten Mackenna half, den Schatz zu finden. Betrachtungen zu Gnomonen, WIS 10/2021

Digitale Zusatzmaterialien (Dateien) im Anhang

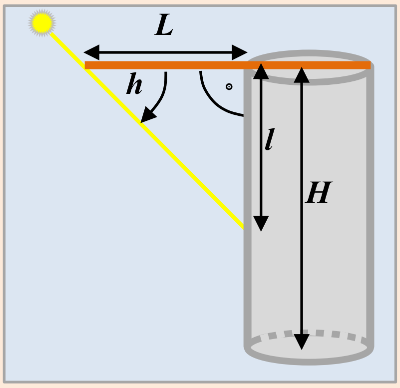
- **‚HdA-Zylindersonnenuhren.zip‘:**
  komprimiertes Verzeichnis mit **A4-Schnittbögen** zu Zylindersonnenuhren mit Zifferblättern zur Anzeige der **wahren Ortszeit** für Orte bei den Breitengraden 25S, 30S, 33S, 35S, 37S, 40S, 42S, 45S (in Spanisch) und 48N, 49N, 50N, 51N, 52N, 53N, 54N
- **‚A4-diales para relojes de sol cilíndricos - hora local.pdf‘**:
  A4-Zifferblattvordrucke für Orte bei den Breitengraden 25S, 30S, 33S, 35S, 37S, 40S, 42S, 45S (in Spanisch) und
  ‚A4-Zifferblätter für Zylindersonnenuhren - wahre Ortszeit.pdf‘:
  A4-Zifferblattvordrucke für Orte bei den Breitengraden 48N, 49N, 50N, 51N, 52N, 53N, 54N zum Umwickeln von „Alltagszylindern“ (Rohre, Hülsen, Büchsen, …) mit einem Mindestdurchmesser von 8,7 cm
- **‚A3-diales para relojes de sol cilíndricos - hora local.pdf‘**:
  A3-Zifferblattvordrucke für Orte bei den Breitengraden 25S, 30S, 33S, 35S, 37S, 40S, 42S, 45S (in Spanisch) und
  ‚A3-Zifferblätter für Zylindersonnenuhren - wahre Ortszeit.pdf‘:
  A3-Zifferblattvordrucke für Orte bei den Breitengraden 48N, 49N, 50N, 51N, 52N, 53N, 54N zum Umwickeln von „Alltagszylindern“ (Rohre, Hülsen, Büchsen, …) mit einem Mindestdurchmesser von 12,5 cm
- **‚A3-Zifferblätter für Zylindersonnenuhren für Orte – WOZ und MOZ.pdf‘:**
  A3-Zifferblattvordrucke (wahre und mittlere Ortszeit) für Heidelberg (49,4°N, 8,7°O) Berlin (52,5°, 13,4°O) und Santiago de Chile (33,5°S, 70,7°W)
- **‚Herstellung und Nutzung der Zylindersonnenuhr.pdf‘:**
  Anleitung zum Bau und zur Nutzung der Sonnenuhr für die Hand des Schülers

Ergebnisse zu den Aufgaben

zurück zum Anfang

Aufgabe 1 – Berechnung der Schattenstablänge

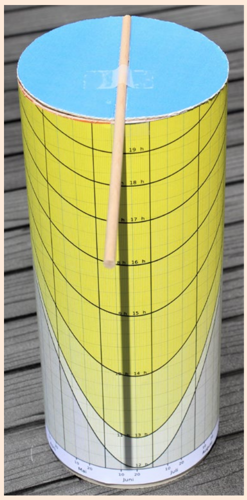
Berechne die Länge $\boldsymbol{L}$ des Schattenstabs für eine Zylindersonnenuhr, die bei einem Breitengrad von $\boldsymbol{\varphi}$ = 50° aufgestellt werden soll.
Die maximal mögliche Schattenlänge $\boldsymbol{l}$ soll gerade noch auf das Zifferblatt der Höhe $\boldsymbol{H}$ = 18 cm passen.
$\boldsymbol{l}$ erhält man über die maximal mögliche Sonnenhöhe $\boldsymbol{h}$, die am Tag der Sommersonnenwende ($\boldsymbol{\delta}$ = 23,5°) zum Mittag erreicht wird. Wenn die Sonne dann im Meridian steht, gilt: $\boldsymbol{h = 90° - \varphi + \delta}$.



Die maximal mögliche Sonnenhöhe h bei einem Breitengrad von φ = 50° beträgt am Tag der Sommersonnenwende (δ = 23,5°) $h = 90° - \varphi + \delta = 90° - 50° + 23{,}5° = 63{,}5°$.
Auf Grundlage der trigonometrischen Beziehung $\tan h = \frac{l}{L}$ erhält man die gesuchte Länge L des Schattenstabs: $L = \frac{l}{\tan h} = \frac{18\text{ cm}}{\tan 63{,}5°} \approx 9$ cm.

Aufgabe 2 – Stundenlinie einer Zylindersonnenuhr

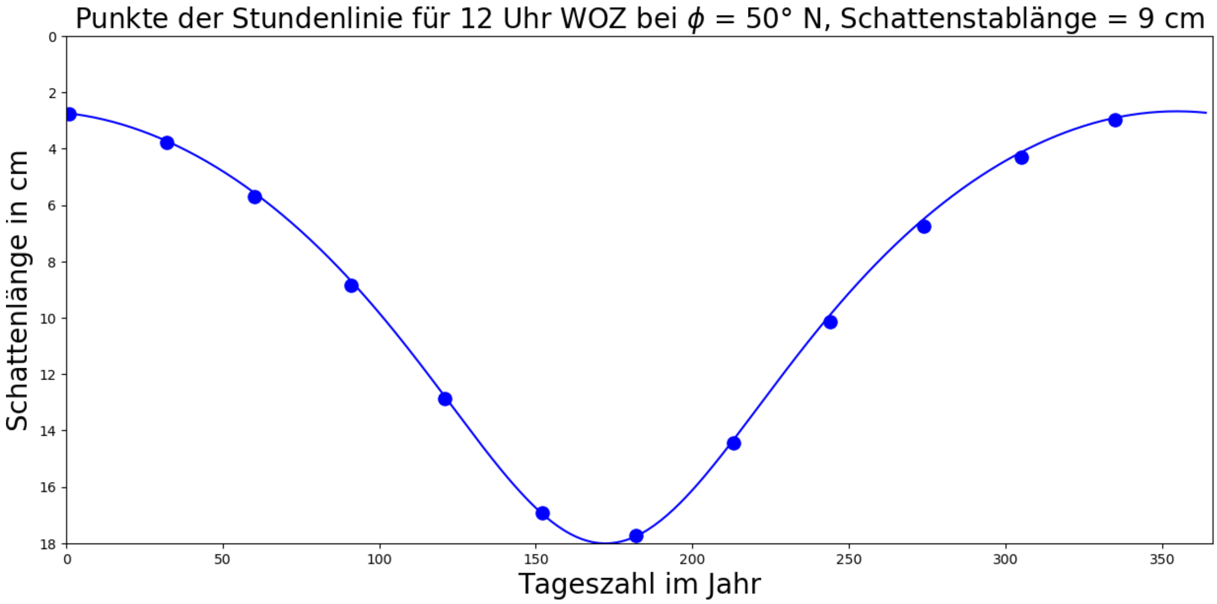
Konstruiere die Stundenlinie für die wahre Ortszeit (WOZ) von 12 Uhr (der Stundenwinkel der Sonne beträgt dann $\tau = 0^h$) für eine Zylindersonnenuhr, die bei 50° nördlicher Breite aufgestellt werden soll. Berechne dazu die Schattenlängen, die ein Schattenstab der Länge L=9 cm um 12 Uhr WOZ an jedem Monatsersten erzeugt.
Die Ergebnisse sind der Übersicht halber in der Tabelle unten festzuhalten.
Für 12 Uhr WOZ vereinfacht sich die Rechnung stark, weil die Sonne dann im Süden im Meridian steht und es gilt: $\boldsymbol{h = 90° - \varphi + \delta}$.
Die Mittagshöhen der Sonne $\boldsymbol{h}$ stehen mit den für die Stundenlinienkonstruktion benötigten Schattenlängen $\boldsymbol{l}$ in einem einfachen trigonometrischen Zusammenhang. Die Deklinationswerte $\boldsymbol{\delta}$, welche die Sonne an den Monatsersten hat, können der Tabelle entnommen werden.



Tag	1.1.	1.2.	1.3.	1.4.	1.5.	1.6.	1.7.	1.8.	1.9.	1.10.	1.11.	1.12.
δ	-23,0°	-17,2°	-7,7°	4,5°	15,0°	22,0°	23,1°	18,1°	8,4°	-3,1°	-14,4°	-21,8°
h	17°	22,8°	32,3°	44,5°	55,0°	62,0°	63,1°	58,1°	48,4°	36,9°	25,6°	18,2°
L in cm	2,7	3,8	5,7	8,8	12,8	16,9	17,7	14,5	10,1	6,8	4,3	2,9

Zur Konstruktion werden die Schattenendpunkte über dem Datum bzw. der Tageszahl aufgetragen und durch eine Kurve interpoliert.

Konstruierte 12-Uhr-Stundenlinie: *zurück zum Anfang*



> **Aufgabe 3 – Sonnenstand und Webcams**
>
> Nutze Livecams, die bei verschiedenen Längengraden installiert sind und im Internet abrufbar sind, um anhand verschiedener Anzeichen (Sonne direkt, Schattenwurf, Himmelshelligkeit) in den gezeigten (Live-)Bildern den gleichzeitig vorliegenden unterschiedlichen Sonnenstand und damit die unterschiedlichen wahren Ortszeiten zu demonstrieren!

Zum Beispiel könnte die Bilder folgender Livecams verglichen werden:

- Berlin (λ ca. 13,5° Ost) https://www.earthtv.com/de/webcam/berlin-brandenburger-tor
- Sankt Petersburg (λ ca. 30° Ost) https://www.elivewebcams.com/st-petersburg-grand-cascade-webcam-live/
- Tscheljabinsk (λ ca. 61,5° Ost) https://cams.is74.ru/live

> **Aufgabe 4 – wahre Zonenzeit**
>
> Eine Sonnenuhr wird in Greenwich (λ = 0°) aufgestellt. Sie soll aber die WOZ von Görlitz (λ = 15°) anzeigen. Welche Zeit muss sie anzeigen, wenn die Sonne in Greenwich durch den Meridian geht (im Süden steht)?

Wenn die Sonne in Greenwich im Meridian steht, dann stand sie schon vor einer Stunde im 15° weiter östlich gelegenen Görlitz. Die Stundenlinie, die in Greenwich für 12 h steht muss also mit 13 h beschriftet und entsprechend hat die ursprünglich 11-h-Linie nun die 12-h-Beschriftung.
Siehe dazu auch Abb. 17 im Anhang.

zurück zum Anfang

Aufgabe 4 – Langzeitexperiment – Aufzeichnung des Analemmas

Suche dir eine Südwand, an der du wettergeschützt Markierungen anbringen kannst! Installiere einen waagerechten Schattenwerfer, dessen Schattenendpunkt gut definiert auf der Wand erscheint! Markiere nun jeden Tag zur exakt gleichen Uhrzeit (es empfiehlt sich dazu die Nutzung einer Funkuhr) den Schattenendpunkt!
Interpretiere den Verlauf der Schattenendpunkte!

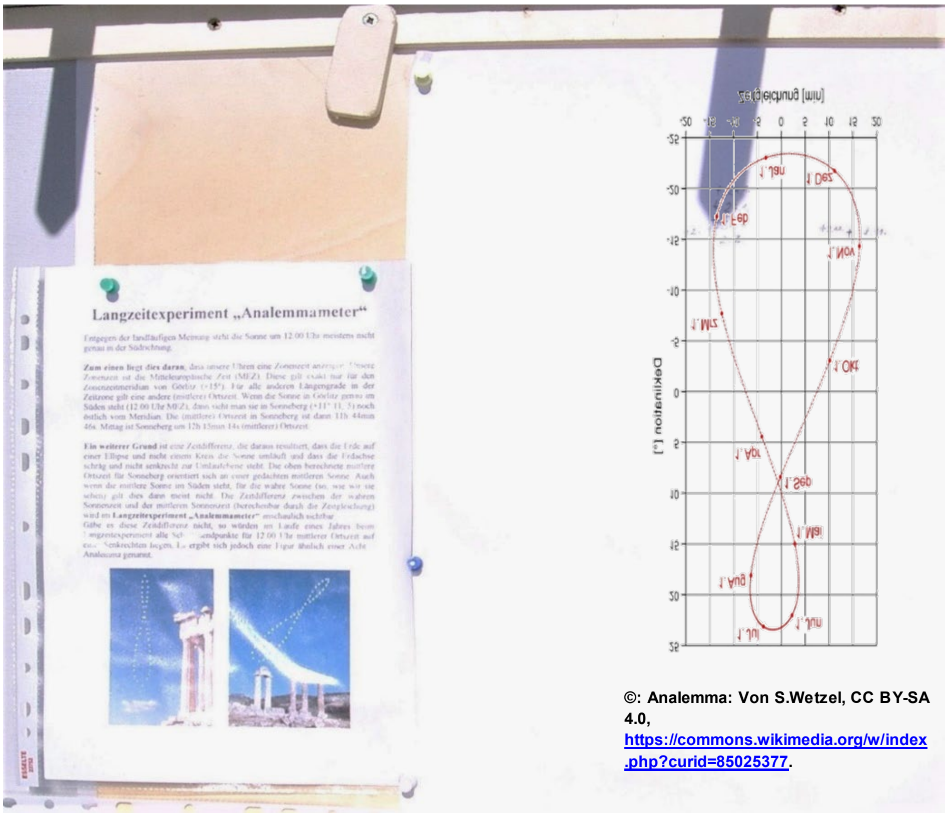
Man bezeichnet die Figur, die man erhält, wenn man alle im Laufe eines Jahres aufgezeichneten Punkte durch eine interpolierende Kurve verbindet als Analemma.

Im Bild rechts wird eine Anordnung gezeigt, die In der Sternwarte Sonneberg zur Aufzeichnung Der Schattenendpunkte jeweils um 12 Uhr MEZ Verwendet wurde.

Das Bild unten zeigt einige Schattenendpunkte, die mit Hilfe der in der Sternwarte Sonneberg installierten Einrichtung zum Aufnahmezeitpunkt im Zeitraum November bis Januar bereits markiert werden konnten. Diesen Punkten wurde im Bild (die zu erwartende Kurve – das Analemma) überlagert.

Die Interpretation sollte zwei Merkmale des Analemma betreffen:

- Die tägliche Höhenänderung der Sonne, weil sich die Deklination der Sonne täglich ändert.
- Die Abweichung von der Südrichtung bzw. Variation in Azimutrichtung bedingt durch die verschieden schnelle scheinbare jährliche Bewegung der Sonne vor dem Fixsternhimmel (in zwei Komponenten: in der Ebene des Erdorbits und senkrecht dazu, wegen der Neigung der Erdachse zur Umlaufbahn).



©: Analemma: Von S.Wetzel, CC BY-SA 4.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=85025377.

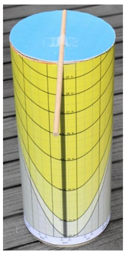
ANHANG

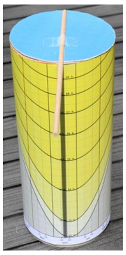
zurück zum Anfang

Zur Umrechnung zwischen WOZ und MOZ

Von der Sonnenuhr zur Armbanduhr

(von der von der Sonnenuhr angezeigten Zeit auf die „Armbanduhrzeit“ schließen)





WOZ	WOZ	MOZ
(wahre Ortszeit) beim Längengrad λ des Aufstellorts	(wahre Ortszeit) beim Bezugs-Längengrad der Zeitzone λ = 15° für MEZ	(mittlere Ortszeit) für die Zeitzone λ = 15° für MEZ

$$WOZ_{\text{Aufstellort}} \;\rightarrow\; WOZ_{\text{Zeitzonenmeridian}} \;\rightarrow\; MOZ_{\text{Zeitzonenmeridian}}$$

Die Sonnenuhr zeigt die wahre Zeit am Aufstellort, die sogenannte wahre Ortszeit (WOZ) an. Um diese mit der Zeit zu vergleichen, die die Armbanduhr anzeigt, muss man zwei oder drei Korrekturen vornehmen.

1.) Zunächst bestimmt man die wahre Ortszeit beim Zeitzonenmeridian. Diese erhält man, indem man den Zeitunterschied Δt addiert, der sich aus dem Längengradunterschied $\Delta\lambda$ zwischen Aufstellort und Zeitzonenmeridian ergibt:

$\boldsymbol{\Delta t = \Delta\lambda \cdot 1\ h/15°}$ mit $\boldsymbol{\Delta\lambda = \lambda_{\text{Zeitzonenmeridian}} - \lambda_{\text{Aufstellort}}}$

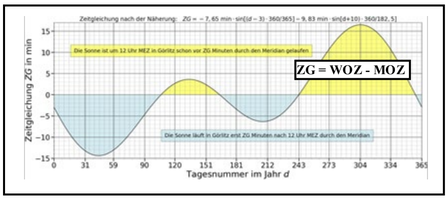
$\mathbf{WOZ_{Zeitzonenmeridian} = WOZ_{Aufstellort} + \Delta\lambda \cdot (1\ h/15°)}$

Zeigt also z. B. eine Sonnenuhr in Heidelberg (λ = 8,7°O) 15 Uhr (WOZ) an, so ist die wahre Ortszeit beim Zeitzonenmeridian in Görlitz (λ = 15°O) schon um 0,42 h (25,2 min) vorangeschritten und eine dortige Sonnenuhr zeigt 15 h 25,2 min WOZ an.

$\boldsymbol{\Delta\lambda = \lambda_{\text{Zeitzonenmeridian}} - \lambda_{\text{Aufstellort}} = 15° - 8{,}7° = 6{,}3°}$ **in Görlitz**

$\mathbf{WOZ_{15°} = WOZ_{8,7°} + 6{,}3° \cdot (1\ h/15°) = 15\ h + 0{,}42\ h = 15\ h\ 25{,}2\ min}$

2.) Um die gesuchte mittlere Ortszeit (MOZ) am Zeitzonenmeridian (die Zonenzeit) zu erhalten, subtrahiere man nun den MinutenWert der Zeitgleichung ZG, der im Diagramm abzulesen ist.



$\mathbf{MOZ_{Zeitzonenmeridian} = WOZ_{Zeitzonenmeridian} - ZG}$

Zum Beispiel: Der 15.6. ist der 166. Tag des Jahres. Die Zeitgleichung hat an diesem Tag einen Wert von etwa -30 s. Entsprechend ergibt sich eine mittlere Ortszeit (MOZ) beim Zeitzonenmeridian von 15 h 25,2 min – (-0,5 min) = 15 h 25,7 min.

$\mathbf{MOZ_{15°} = WOZ_{15°} - ZG = 15\ h\ 25{,}2\ min - (-\ 0{,}5\ min) = 15\ h\ 25{,}7\ min}$ **(=MEZ).**

Die mittlere Ortszeit am Zeitzonenmeridian, das ist die Zonenzeit. Im Falle von λ = 15°O handelt es sich um die mitteleuropäische Zeit (MEZ) bzw. im Sommer um die mitteleuropäische Sommerzeit (MESZ).

3.) Schließlich muss am 15.6. noch eine Stunde addiert werden, weil die Armbanduhr dann die mitteleuropäische Sommerzeit (MESZ) anzeigt:

MESZ = MEZ + 1 h = 16 h 25,7 min.

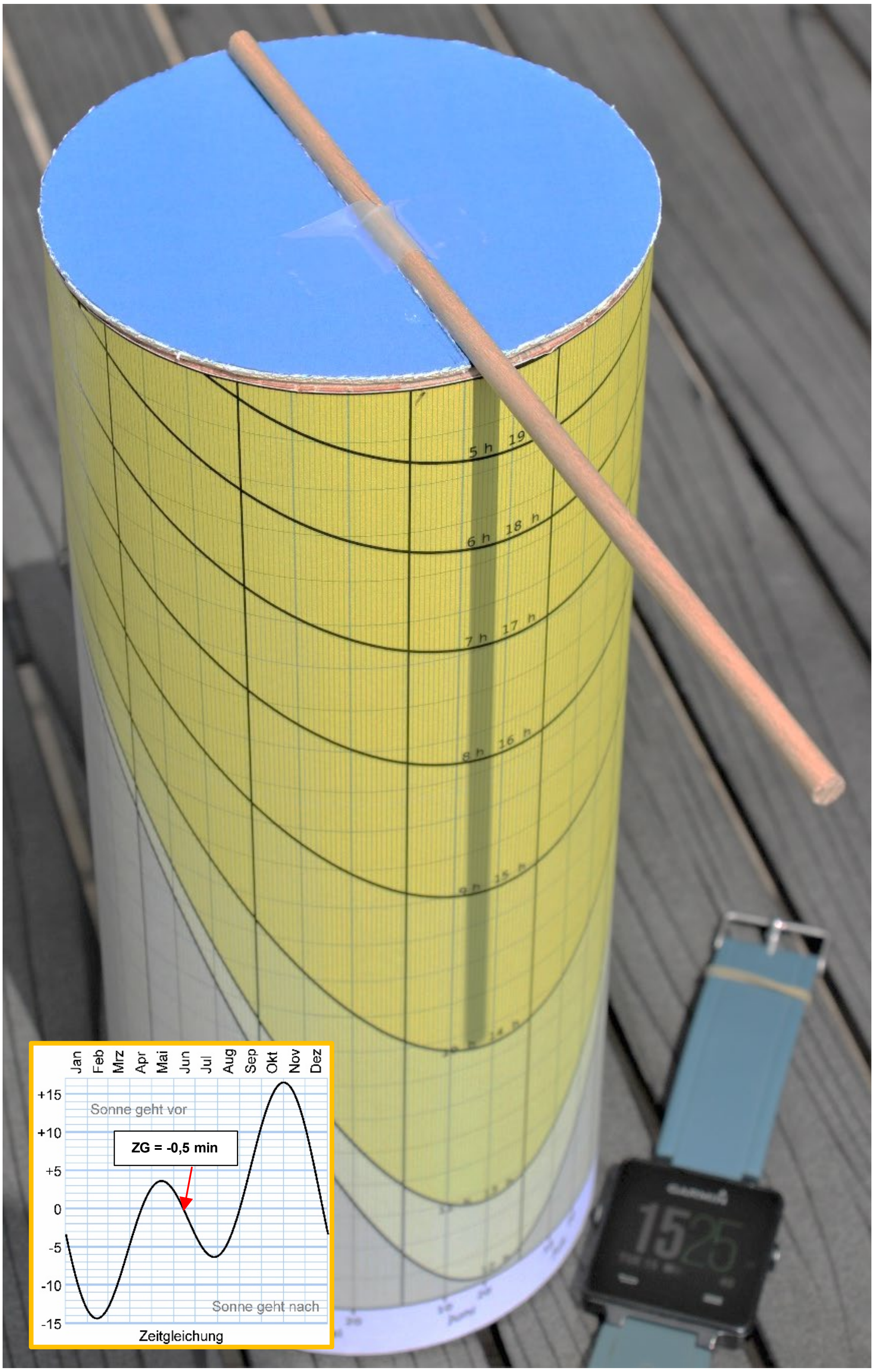
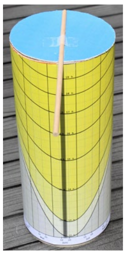


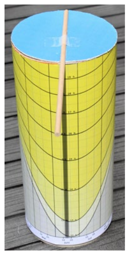
Abbildung 15: Beispiel zur Umrechnung der von einer Zylindersonnenuhr in Heidelberg (φ = 49,4°, λ = 8,7°O) am 15. 6. 2021 angezeigten wahren Ortszeit (WOZ) zur MESZ („Armbanduhrzeit“). Die Sonnenuhr zeigt für Heidelberg eine WOZ von knapp 14 Uhr. Am Zeitzonenmeridian (λ = 15°O) beträgt die WOZ dann 14 h + 25,2 min. Unter Hinzunahme der Zeitgleichung ZG (siehe Diagramm: erhält man 14 h + 25,2 min - (-0,5 min). Die MESZ erhält man schließlich durch Addition einer Stunde und es ergibt sich eine „Armbanduhrzeit“ von 15 h 25,7 min. ©: O. Fischer.

Von der Armbanduhr zur Sonnenuhr

zurück zum Anfang

(wenn man die Stundenlinien der Sonnenuhr so berechnet, dass sie die „Armbanduhrzeit" zeigen)





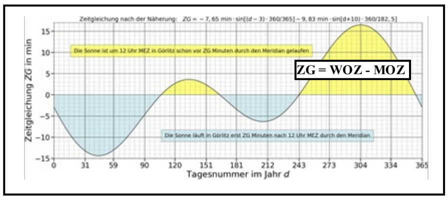
MOZ **(mittlere Ortszeit)** **für die Zeitzone** **λ = 15° für MEZ**	**WOZ** **(wahre Ortszeit)** **beim Bezugs-Längengrad** **der Zeitzone λ = 15° für MEZ**	**WOZ** **(wahre Ortszeit)** **beim Längengrad λ** **des Aufstellorts**

$$MOZ_{\text{Zeitzonenmeridian}} \leftrightarrow WOZ_{\text{Zeitzonenmeridian}} \leftrightarrow WOZ_{\text{Aufstellort}}$$

Will man, dass eine Sonnenuhr gleich die „Armbanduhrzeit" anzeigt, muss man das zuvor Demonstrierte rückwärts angehen. Ausgangspunkt ist diesmal die Armbanduhrzeit, also die mittlere Ortszeit (MOZ) am Ort des Zeitzonenmeridians.

1.) Bei Bedarf gilt es zunächst, die Sommerzeitstunde wieder „wegzunehmen" und so aus der Sommerzeit die Normalzeit herzustellen.
MEZ = MESZ – 1 h

2.) Im nächsten Schritt wird die Zeitgleichung (diesmal mit umgedrehtem Vorzeichen) angewendet, um die mitteleuropäische Zeit, welche (in guter Näherung) ja die mittlere Ortszeit am Zeitzonenmeridian darstellt, in die wahre Ortszeit am Zeitzonenmeridian umzurechnen.
$\mathbf{WOZ_{Zeitzonenmeridian} = MOZ_{Zeitzonenmeridian} + ZG}$



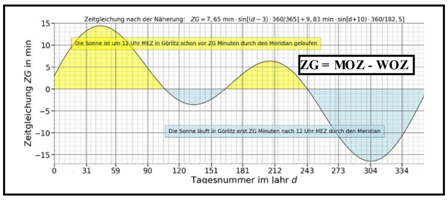
Es soll z. B. die Stundenlinie für das Zifferblatt für 15 Uhr MEZ (MOZ) berechnet werden. Zu dieser Zeit hat die mittlere (!) Sonne bei λ = 15°O (z. B. in Görlitz) einen Stundenwinkel τ von 15 h -12 h = 3 h. Die wahre Ortszeit in Görlitz beträgt dann
$\mathbf{WOZ_{15°} = 15\ h – 0{,}5\ min = 14\ h\ 59{,}5\ min.}$
Der Stundenwinkel der wahren Sonne über Görlitz hat dann einen Wert von $\tau = 2$ h 59,5 min.

3.) Im letzten Schritt wird aus der wahren Ortszeit am Zeitzonenmeridian (bzw. dem Stundenwinkel der Sonne dort) auf die wahre Ortszeit (den Stundenwinkel der Sonne) am Aufstellort geschlossen:
$\mathbf{WOZ_{Aufstellort} = WOZ_{Zeitzonenmeridian} - \Delta\lambda \cdot (1\ h/15°)}$
Mit $\Delta\lambda = \lambda_{\text{Zeitzonenmeridian}} - \lambda_{\text{Aufstellort}} = 6{,}3°$ erhält man dann:
$\mathbf{WOZ_{8,7°} = WOZ_{15°} - 6{,}3° \cdot (60\ min/15°) = 14\ h\ 59{,}4\ min – 25{,}2\ min = 14\ h\ 34{,}2\ min.}$
Um 15 Uhr MEZ hat die Sonne in Heidelberg einen Stundenwinkel von $\boldsymbol{\tau = 2\ h\ 34,2\ min}$.

In diese Richtung muss gedacht werden, um ein Sonnenuhrenzifferblatt zu konstruieren, welches gleich die „Armbanduhrzeit" anzeigt (siehe z. B. Abb. 12).

Übrigens:

Früher hat man die Zeit von der Sonnenuhr abgelesen und dann den Wert der Zeitgleichung addiert, um z. B. die Turmuhr am Kirchturm zu stellen. Entsprechend wurde damals die Zeitgleichung wie folgt aufgeschrieben: **ZG = MOZ – WOZ**



zurück zum Anfang

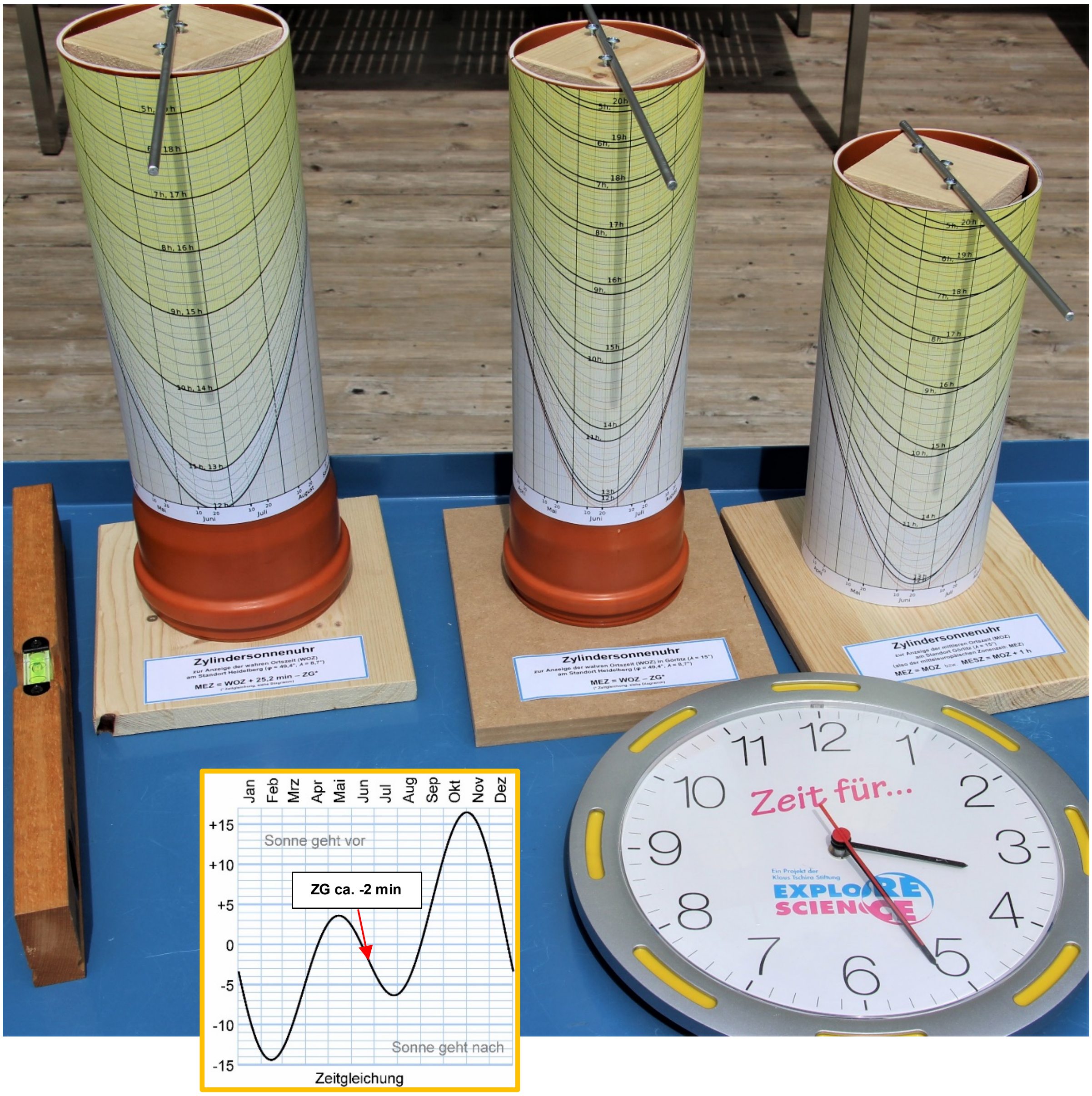


Abbildung 16: Drei Zylindersonnenuhren, die in Heidelberg (φ = 49,4°, λ = 8,7°O) aufgestellt sind und am 26. 6. nachmittags verschiedene Zeiten anzeigen. Die Stundenlinien für die vollen Stunden erscheinen in Schwarz und die 15-min-Linien des Vormittags in Blau und die des Nachmittags in Rot. Bei der WOZ-Uhr ganz links werden 10-min-Linien angezeigt.

Links: Anzeige der wahren Ortszeit von Heidelberg → ca. 13:52 Uhr.
Addiert man die Zeitabweichung zum Zeitzonenmeridian (≈ 25 min) und subtrahiert den Wert der Zeitgleichung für den 26.6. (-2 min), so erhält man für die MEZ einen Wert von 14:19 Uhr (= 15:19 Uhr MESZ).

Mitte: Anzeige der wahren Ortszeit von Görlitz (beim Zeitzonenmeridian) → ca. 14:21 Uhr.
Subtrahiert man den Wert der Zeitgleichung für den 26.6. (-2 min), so erhält man hier für die MEZ einen Wert von 14:23 Uhr (= 15:23 Uhr MESZ).

Rechts: Anzeige der mittleren Ortszeit von Görlitz (Zonenzeit, MEZ) → ca. 14:20 Uhr.
Die MESZ ist also 15:20 Uhr.

Die Unterschiede zwischen den Sonnenuhren und zur Wanduhrzeit (15262 Uhr) diese Abweichungen sind im Rahmen der zu erwarteten Genauigkeit von vielleicht ±5 min zu erwarten.

©: O. Fischer.

Zifferblätter, die bei verschiedenen λ alle die WOZ von λ=15°O anzeigen

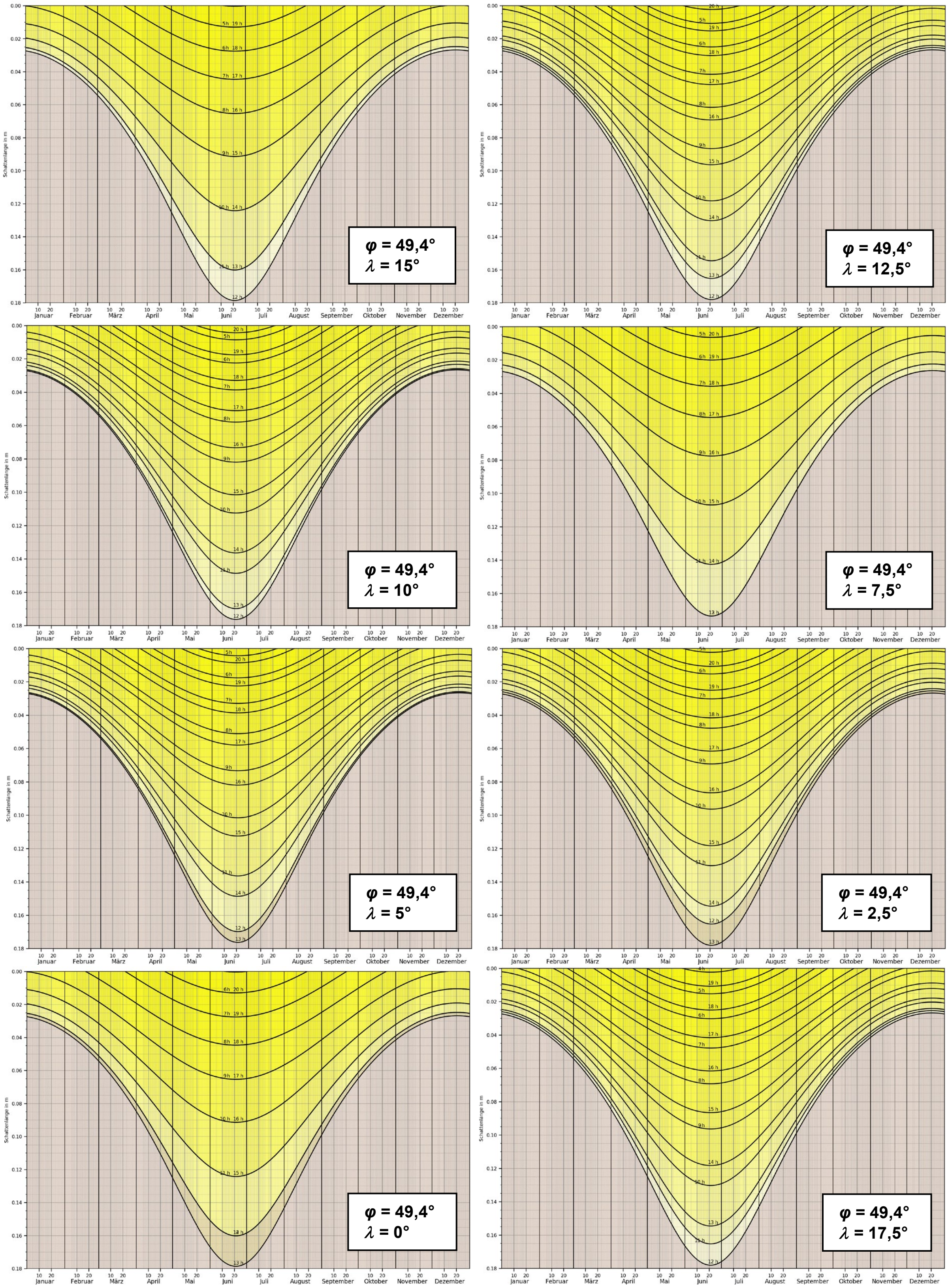


Abbildung 17: Zifferblätter von Zylindersonnenuhren für den Breitengrad φ = 49,4°N, die an Orten mit verschiedenen Längengraden λ stehen. Alle Zifferblätter zeigen nicht die WOZ am Aufstellort, sondern am Zeitzonenmeridian (λ = 15° O) an. Steht die Uhr in Greenwich (λ = 0°), dann erhält man das Bild wie bei λ = 15° O, bloß mit einer Stunde Verschiebung. Ansonsten teilen sich die Stundenlinien (z. B. 11 und 13 Uhr) so, dass für Orte westlich vom Zeitzonenmeridian (λ < 15° O) die 11-Uhr-Linie flacher ausfällt als die 13-Uhr-Linie. Für Orte westlich vom Zeitzonenmeridian (λ > 15° O) ist dies genau umgekehrt.
Interessanter Fakt: bei 7,5° fallen wegen des Halbstundenabstands zum Zeitzonenmeridian die Vor- und Nachmittags-linien wieder zusammen. Bei λ = 7,5° O sind die Sonnenhöhen bei WOZ = 11.30 Uhr und 12.30 Uhr gleich. Angezeigt wird aber die um eine halbe Stunde verschobene WOZ bei λ = 15° O, also 12 Uhr und 13 Uhr, die zusammenfallen.

„Litfaßsäulen-Sonnenuhr“ der Sommer-Imaginata Jena 1997

zurück zum Anfang

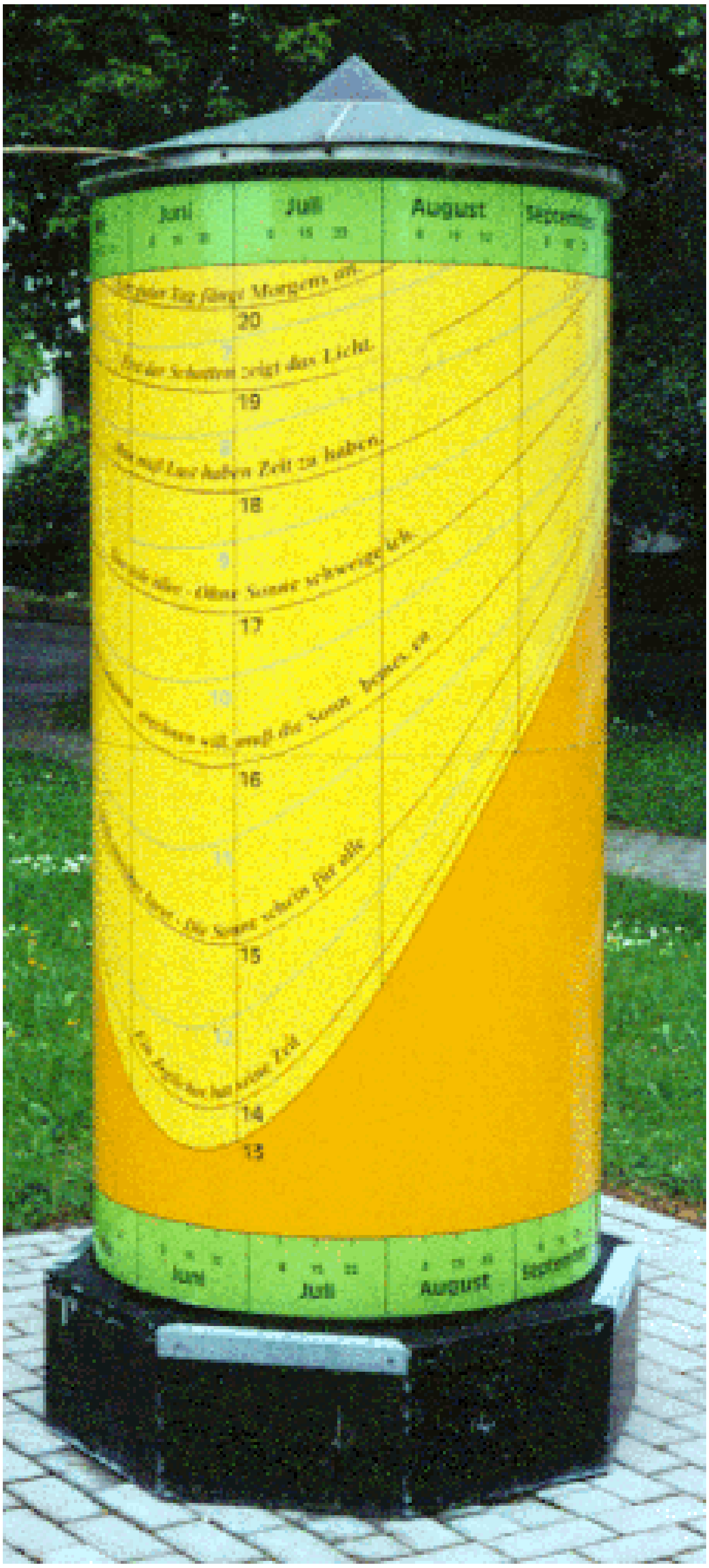


Abbildung 18: Zifferblatt einer Zylindersonnenuhr in Form einer ca. 2 m hohen Litfaßsäule, die für die Imaginata Jena (Som-merveranstaltung 1997) konstruiert und gebaut wurde. Das Zifferblatt wurde gestaltet für die geografische Länge von Jena, unter Berücksichtigung von Sommerzeit und Längengradunterschied zum Zeitzonenmeridian. Es zeigt also die wahre Sommersonnenzeit für den Zeitzonenmeridian 15°O an. Zur Ablesung der Uhr muss zunächst der waagerechte Schattenstab, der am drehbaren Säulendach angebracht ist, zum entsprechenden Datum gedreht werden. Nun muss die ganze Säule so gedreht werden, dass der Schatten des Stabes auf dem Zifferblatt senkrecht nach unten zeigt. Aus der Position des Schattenendpunktes zwischen den Stundenlinien kann die Zeit interpoliert werden. ©: Olaf Fischer.

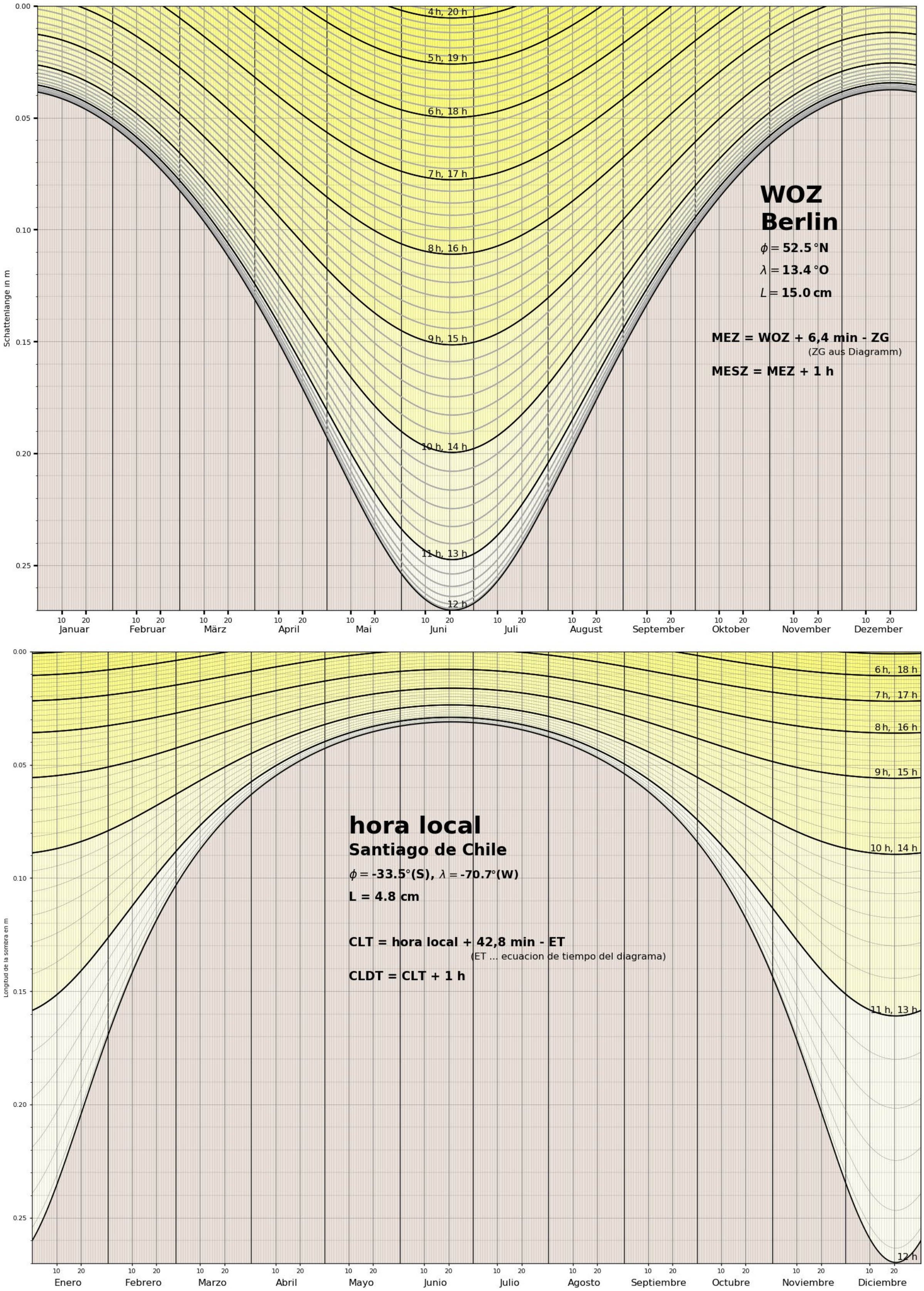


Abbildung 19: Vergleich der Zifferblätter von Zylindersonnenuhren für den Breitengrad φ = 52,5°N (Berlin) und φ = 33,5°S (Santiago de Chile). Sofort ins Auge sticht die Verschiebung des Bereichs der längsten Schatten um ein halbes Jahr. ©: Olaf Fischer.