Gleichgewicht von Archimedes bis Lagrange

In Bezug zum SuW-Beitrag „Die Erde hat einen zweiten Trojaner“ (Brennpunkt 2167) aus der Rubrik: „Blick in die Forschung: Nachrichten“ in der Zeitschrift »Sterne und Weltraum« 5/2022
WIS-ID: 1571152, Zielgruppe: Mittelstufe bis Oberstufe

Thomas Jahre, ehemals Lehrer am Chemnitzer Schulmodell – www.schulmodell.eu

Den Begriff ‚Gleichgewicht‘ nutzen wir in vielfältiger Art und Weise. So z. B. reden wir vom seelischen Gleichgewicht, vom Gleichgewicht des Schreckens oder vom ökologischen Gleichgewicht. Auch die Stabilität unserer physikalischen Welt und ganz speziell unserer kosmischen Welt bedarf aber eines Gleichgewichts.
Dieser Beitrag gibt Anregungen zur Beschäftigung mit dem physikalischen Gleichgewicht des Archimedes, mit Schwerpunkten von einfachen Flächen und von kosmischen Systemen sowie mit Gleichgewichtsorten im All nach Lagrange.

Übersicht der Bezüge im WIS-Beitrag		
Astronomie	**Kleinkörper, Himmelsmechanik**	**Trojaner, Lagrangepunkte, Drei-Körper-Umlauf**
Physik	**Mechanik**	**Hebelgesetz, Schwerpunkt, Gleichgewicht, Goldene Regel der Mechanik**
Fächer-verknüpfung	**Astronomie - Mathematik / Informatik** **Astronomie - Sprache**	**Schwerpunkt von ebenen Dreiecken und Vierecken, Geogebra** **Synonym ‚Trojaner‘**
Lehre allgemein	**Kompetenzen (Erkenntnisgewinnung, Kommunikation), Unterrichtsmittel**	**Konstruktionen von Schwerpunkten, Experimente zur Schwer-punktsbestimmung, Rechnungen mit dem Hebelgesetz, Arbeitsaufträge, Mindmap**

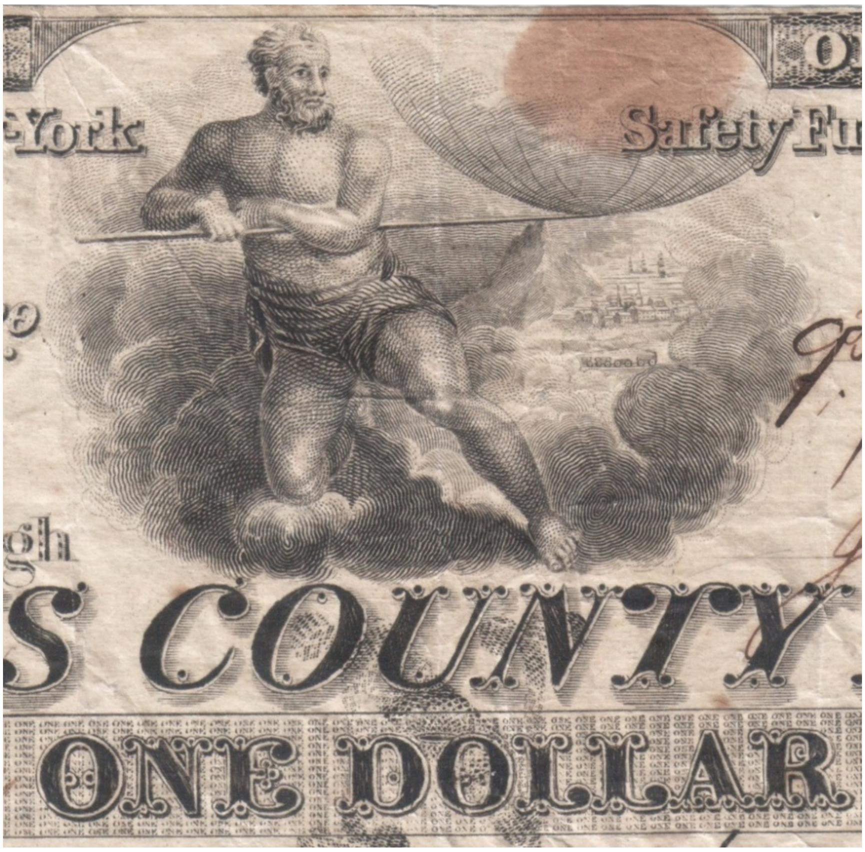


Abbildung 1: Eine sehr alte (1853) Ein-Dollar-Banknote (hier ein Ausschnitt) der Lewis County Bank New York zeigt (vermutlich) Archimedes, der mit einem Hebel die Erde heben möchte. ©: Geldschein aus der Sammlung von Thomas Jahre.

Zurück zum Anfang

Arbeitsaufträge

Auftrag 1 – Goldene Regel der Mechanik

- Fertige eine **Mindmap** zur goldenen Regel der Mechanik an.

Auftrag 2 – Hebelgesetz

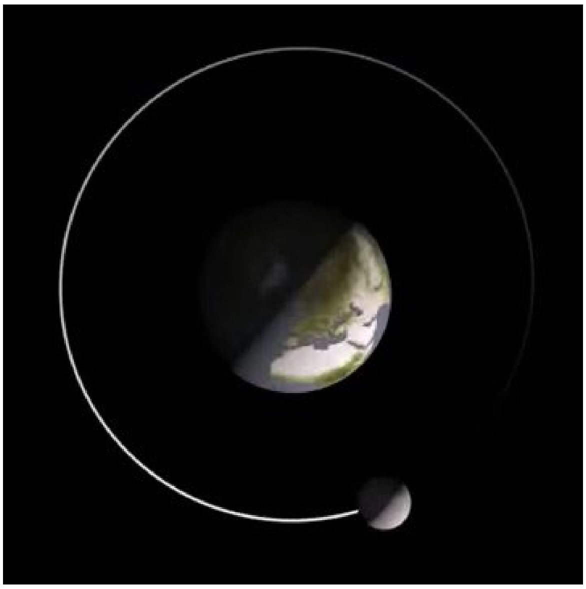
Archimedes von Syrakus (287 v.u.Z – 212 v.u.Z.) soll gesagt haben **„Gebt mir einen Punkt, wo ich hintreten kann und ich hebe die Erde aus den Angeln.“** (Quelle: https://de.wikiquote.org/wiki/ Archimedes.) Auf einem alten US-amerikanischen Geldschein (siehe Abb. 1) hat man versucht, diesen Ausspruch zu illustrieren. Man sieht man einen Mann der ganz entspannt eine riesige Kugel mittels einer Stange ausbalanciert. Eine andere Übersetzung wird noch deutlicher: „Gib mir einen Punkt, wo ich sicher stehen kann [, einen Hebel, der lang genug ist,] und ich bewege die Erde mit einer Hand".

- Fertige Zeichnungen zum Hebelgesetz an und **berechne** die nötige Hebellänge, um die Gewichtskraft der Erdmasse (rund $6 \cdot 10^{24}$ kg) durch die Gewichtskraft der Masse von Archimedes (rund 100 kg) auszubalancieren. Aus welchen Gründen kann das nur eine rein hypothetische Aufgabe sein?

[Zurück zum Anfang](#)

Bei Himmelskörpern, die einander umlaufen, findet man eine physikalische Gesetzmäßigkeit (den **Schwerpunktsatz**), die dem Hebelgesetz gleicht.

- Wo wäre danach der „Hebel" Erde – Mond für das **Gleichgewicht** zu lagern, d.h., wo befindet sich der Schwerpunkt des Erde-Mond-Systems? Die Massenmittelpunkte seien 384.000 km voneinander entfernt. Statt Gewichtskräften werden die Massen verwendet, die noch recherchiert werden müssen.



©: Apollo 8 crewmember Bill Anders - NASA: old link, new link, Gemeinfrei, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=1221.

©: NASA/Goddard Space Flight Center Scientific Visualization Studio, Public domain, via Wikimedia Commons.

Auftrag 3 – Schwerpunkt:

- Freihand-**Experiment**: Nimm einen Besen oder einen Spazierstock o. ä. und halte diesen auf den Zeigefingern der ausgestreckten Arme. wie im Bild gezeigt. Nun bewege bei geschlossenen Augen die Hände vorsichtig aufeinander zu. Wenn es konzentriert gemacht wird, so nähern sich die Finger dem Schwerpunkt des Stabes, wo dieser nun balanciert werden kann.

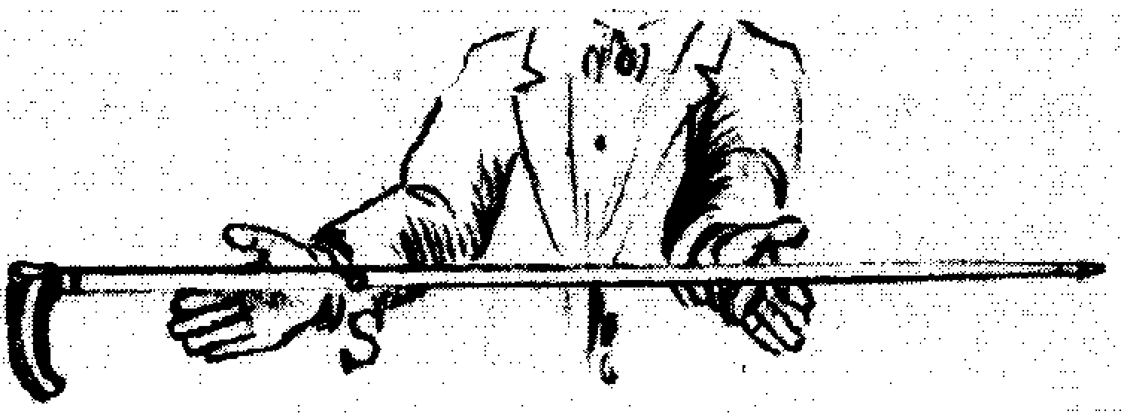


Abbildung 2: Aus: Dussler G.: „Spiel und Spielzeug im Physikunterricht", Reprint Stark Verlagsgesellschaft Freising 1995, S. 40

Zurück zum Anfang

Geometrische Schwerpunkte lassen sich recht schnell für ebene Dreiecke und Vierecke konstruieren.

- Konstruiere für ein **beliebiges Dreieck** den Ort des geometrischen Schwerpunktes und gib an, wie du vorgegangen bist.

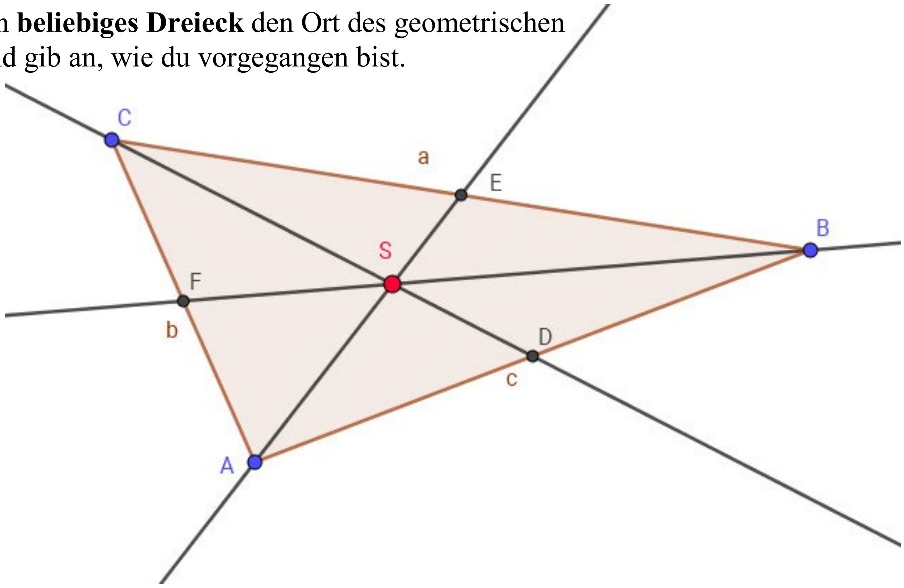


Abbildung 3: Konstruktion des geometrischen Schwerpunktes mittels GeoGebra durch den Autor.

- Zeichne das zuvor genutzte Dreieck ABC nun auf ein Stück Pappe und schneide es anschließend aus. Das Dreieck sollte sich dann auf der Zirkelspitze balancieren lassen.

Die Konstruktion des Schwerpunkts eines Vierecks ist auch nicht kompliziert. Das Bild zeigt das für ein allgemeines konvexes Viereck. (Für konkave Vierecke braucht man die Schritte nur anzupassen.)

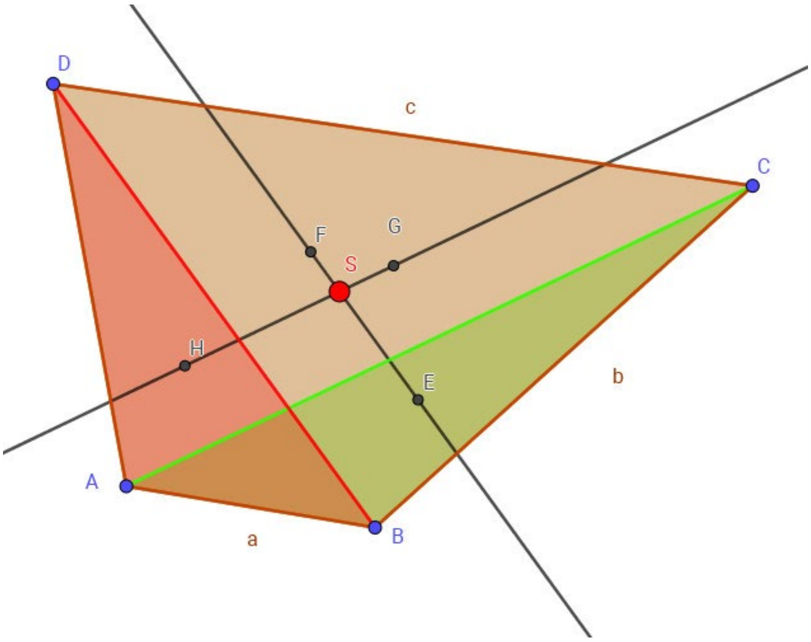


Abbildung 4: Die Konstruktion des Schwerpunktes für ein Viereck basiert auf den Schwerpunkten der Teildreiecke. Die Konstruktion wurde mittels GeoGebra durch den Autor durchgeführt.
Vorgehensweise:
Viereck ABCD zeichnen.
Der Punkt E ist der Schwerpunkt des Dreiecks ABC, F ist der Schwerpunkt des Dreiecks ACD.
Die Punkte E und F sind zu verbinden.
Der Punkt H ist der Schwerpunkt des Dreiecks ABD, G der Schwerpunkt des Dreiecks BCD.
Die Punkte G und H sind zu verbinden.
Der Schnittpunkt der beiden Geraden ist dann der gesuchte Schwerpunkt S des Vierecks.

- Zeichne ein Viereck ABCD auf ein Stück Pappe. Konstruiere die Seitenhalbierenden der Teildreiecke und den Schwerpunkt S. Schneide das Viereck aus. Es sollte sich dann auf der Zirkelspitze balancieren lassen.

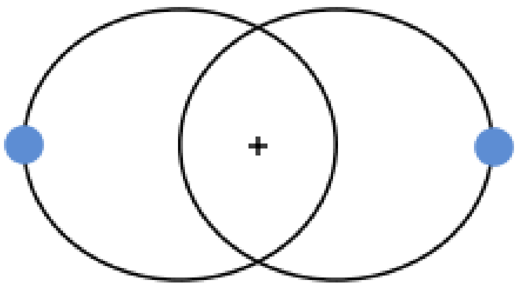
Eine komplexere Berechnung eines Schwerpunktes ist notwendig, wenn es sich um ein unregelmäßiges n-Eck handelt. Ein Beispiel dafür ist hier zu finden:
https://www.schulmodell.eu/2704.html.

[Zurück zum Anfang](#)

Auftrag 4: Dreikörperproblem und Schwerpunkt

Astronomisch gesehen ist der Schwerpunkt bei der Modellierung der Bewegung von Himmelskörpern von zentraler Bedeutung.
Die Bewegung zweier sich umlaufender Körper kann durch die Keplerschen Gesetze beschrieben werden, wobei man meist nicht erwähnt, dass sich beide Körper (z. B. Sonne und Planet oder Erde und Mond) jeweils um den gemeinsamen Schwerpunkt bewegen (siehe Abb.5).

Es ist zu bemerken, dass der **Schwerpunkt** mehrerer sich umlaufender Massen immer am gleichen Ort bleibt. Die Vorhersage der Bahnen der Einzelobjekte ist nur aber trotzdem nur für Spezialfälle möglich.



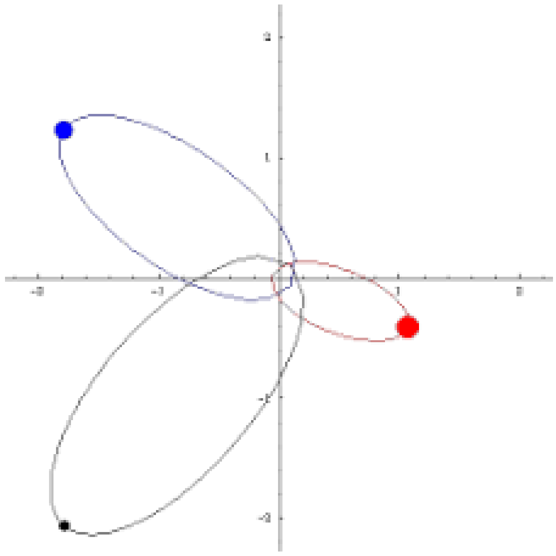


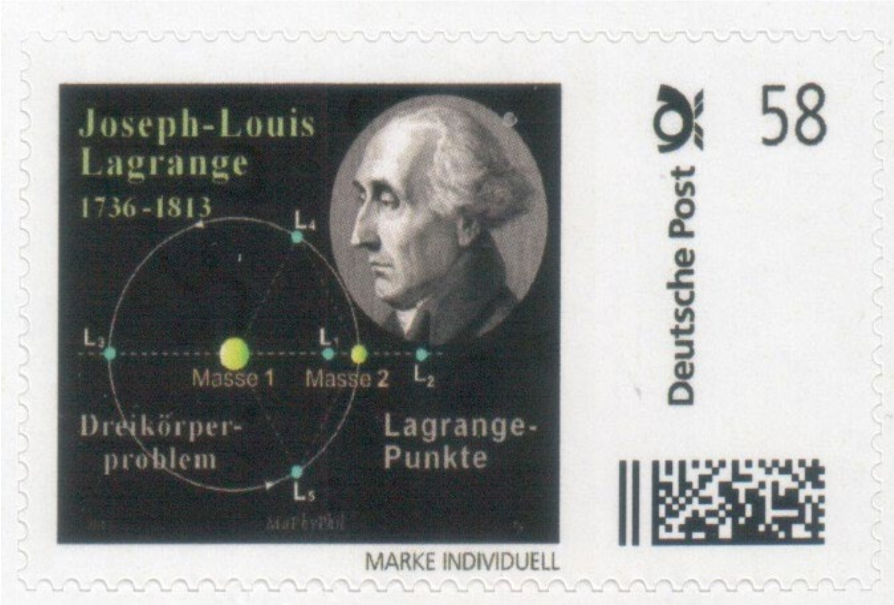
Abbildung 5: Umlaufbahnen zweier (links) und dreier (rechts) sich umlaufender Himmelskörper.
©: Philip D. Hall - Eigenes Werk, CC BY-SA 4.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=51775305
https://www.itp.unihannover.de/fileadmin/itp/user/ag_flohr/lectures/proseminar/ss14/Vortrag9.pdf. .

- Markiere die Schwerpunkte der in Abb. 5 gezeigten Systeme sich umlaufender Himmelskörper.

Ein Spezialfall ist das eingeschränkte Dreikörperproblem. Der Trick dabei ist: Zwei massereiche Körper umkreisen einander (Sonne – Planet oder Erde – Erdmond) und gesucht sind die Orte für einen dritten, sehr leichten Körper, der eine synchrone Umlaufbahn wie der leichtere der zwei großen Körper besitzt. Einer der ersten, der dafür eine Lösung gefunden hatte, war Leonard Euler (1707 – 1783).

Abbildung 6: Banknote (10 Schweizer Franken) mit dem in Basel (Schweiz) geborenen Leonhard Euler (1707 - 1783). ©: Aus der Sammlung von Thomas Jahre.

Zurück zum Anfang



Die Lösung des eingeschränkten Dreikörperproblems ist aber vor allem mit dem Namen des berühmten Mathematikers, Astronomen und Physikers Joseph-Louis Lagrange (1736 – 1813) verbunden.

Abbildung 7: Briefmarke mit Lagrange aus der Sammlung von Thomas Jahre. Die Marke zeigt die Langrangepunkte L1 bis L5 – eine Art „Gleichgewichtspunkte".

Nimmt man für die Masse 1 die Sonne und die Masse 2 die Erde (siehe Abb. 7), so lässt sich feststellen, dass alle Objekte, die sich in einem der **Lagrangepunkte** befinden oder dort hingebracht werden (Satelliten) die gleiche Umlaufzeit haben wie die Erde. Man sieht sie von der Erde aus (außer L_3, da er hinter der Sonne liegt) immer an der gleichen Position und in einem gleichen Winkelabstand. L_4 läuft vor der Erde her und L_5 der Erde hinterher.

Im Brennpunkt von SuW 5/2022 heißt es, die Erde hat einen zweiten Trojaner. Dieser ca. 1,2 km große Asteroid befindet sich im Punkt L_4.

Himmelskörper oder auch künstliche Objekte, die sich in L_4 oder L_5 befinden, werden Trojaner genannt. Die ersten **Trojaner** sind im System Sonne – Jupiter beobachtet worden.

Zurück zum Anfang

Zum Namen Trojaner:

Eine der bekanntesten Sagen und Legenden in der griechischen Mythologie wird in dem Epos „Illias" von Homer beschrieben. In 24 Kapiteln wird vom Kampf um die Stadt Troja berichtet. Die schöne Helena ist nach Troja entführt worden und die großen Helden Griechenlands wollen sie befreien. Dieser Kampf dauert 10 Jahre. Die zwei kämpfenden Parteien sind also die griechischen Angreifer und die Verteidiger Trojas, die eigentlichen Trojaner.

Aber so genau haben es die Entdecker der „Trojaner" nicht genommen. Alle Jupiter-Trojaner im Punkt L_4 gehören in das Lager der griechischen Angreifer (bis auf Hektor, der nach Troja gehört). In L_5 befinden sich die Verteidiger der Stadt Troja. Da L_4 und L_5 weit voneinander entfernt sind, findet letztlich keine Schlacht statt und das ist gut so. Bei Homer werden die Trojaner mittels einer List besiegt mit dem berühmt berüchtigten trojanischen Pferd.

Auftrag 5:

- Informiere dich über das epochale Werk des Homer. Wie geht es nach dem Kampf um Troja weiter? Notiere kurz die wichtigsten Inhalte.

Auftrag 6:

- Trojaner sind inzwischen **in vielen Bereichen unseres Lebens** „anzutreffen". Finde eine angemessene Form zu diesem Thema (**Mindmap**, Präsentation, ...). Es heißt, die (nicht astronomischen) „Trojaner" seien schädlich – ist das so?

Zurück zum Anfang

Weitere Quellen zum Thema:

- „Die Lagrange-Punkte – mehr als nur Lösungen einer Differentialgleichung“, http://www.wissenschaft-schulen.de/alias/material/zentrales-wis-dokument-suw-1-2008/1049564
- „Ein Modell des Herschel-Teleskops“, http://www.wissenschaft-schulen.de/alias/material/zentrales-wis-dokument-ah-12-2007/1049580
- „Gaia – Die Milchstraßen-Weltkarte wird revolutioniert“, http://www.wissenschaft-schulen.de/alias/material/zentrales-wis-dokument-ms-os-1-2014/1217945

Ein weiterer „Astrolink“ auf einem Geldschein:

Die Rückseite des in Abb. 6 gezeigten Franken-Scheins mit Euler zeigt eine schematische Darstellung des Planetensystems, wie es zu Lebzeiten von Euler (1707 – 1783) bekannt war - Uranus und Neptun fehlen. Der gezeigte Komet ist sehr wahrscheinlich der Komet Halley, der am 13. März 1759 einen Periheldurchgang hatte.