

## Experimente zur Heisenberg'schen Unschärferelation

Eine Unterrichtsidee von Dr. Matthias Hauck

Mit der zunehmenden Gewichtung der Quantenmechanik in den Lehrplänen der gymnasialen Kursstufe gewinnt die Heisenberg'sche Unschärferelation eine immer größere Bedeutung. Eine exakte theoretische Herleitung ist auf Schulniveau jedoch problematisch, und experimentell ist diese grundlegende Aussage der Quantenphysik im Unterricht nur schwer zu zeigen. Dies ist bedauerlich, da es für die Vermittlung der Unbestimmtheitsrelation wichtig ist, geeignete Wege zu ihrer Herleitung und Veranschaulichung zu finden.

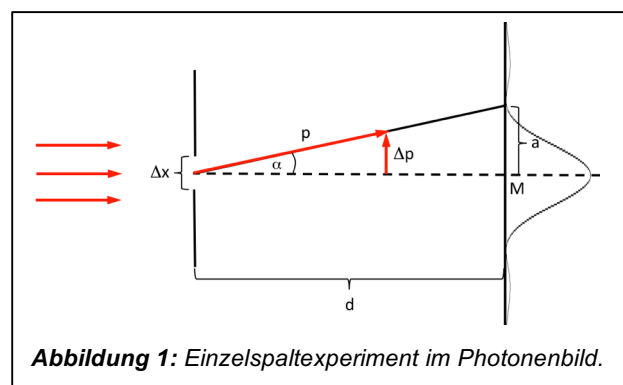
<b>Fachgebiet</b>	Physik
<b>Bezug zu</b>	Philosophie, Ethik
<b>Thema</b>	Quantenphysik
<b>Stichwort</b>	Heisenberg, Unschärferelation, Interferenz, Kohärenzlänge
<b>Klassenstufe</b>	Kursstufe
<b>Zeit</b>	2 Stunden

Das hier dargestellte Material soll keine fachdidaktische Abhandlung zur Heisenberg'schen Unschärferelation darstellen. Hierzu wurden bereits unzählige Publikationen veröffentlicht. Exemplarischen sind die Arbeiten von Müller und Wiesner (1997) sowie Passon und Grebe-Ellis (2015) zu nennen. Darüber hinaus werden auch keine alternativen Überlegungen zur Einführung respektive Konzeption der Quantenphysik in der Schule angestellt, welche in der fachdidaktischen Literatur immer wieder diskutiert werden [Bartelmann (2015)]. Im Folgenden werden vielmehr zwei Experimente beschrieben, die einen experimentellen Zugang zur Unschärferelation ermöglichen. Als Unterstützung hierzu bietet sich der Artikel „[Werner Heisenberg zum 100. Geburtstag](#)“ aus der Zeitschrift „Physik in unserer Zeit“ [Jacobi (2001)] an. Dieser zeichnet den Werdegang Werner Heisenbergs nach und kann als historische Grundlage für die Erarbeitung der Unschärferelation dienen. Für eine tiefer gehende Auseinandersetzung mit diesem Thema, zum Beispiel in einem Begabtenkurs, kann der Artikel „[Unschärfen in der Unschärferelation](#)“ von Kofler (2014), ebenfalls aus „Physik in unserer Zeit“, verwendet werden.

Das erste Experiment wird in der Schule häufig verwendet um die Heisenberg'sche Unschärferelation zu motivieren. Dieses ist meines Erachtens allerdings mit einigen didaktischen Schwächen behaftet. Darüber hinaus wird dieser Versuch meist nur qualitativ eingesetzt, wobei gerade dessen quantitative Analyse großes Potenzial birgt. Der zweite Versuch ist eher unbekannt. Beide hier dargestellten Experimente wurden bereits mehrfach in Physikkursen der gymnasialen Kursstufe in Baden-Württemberg eingesetzt.

### Experiment 1

Der im Folgenden beschriebene Versuch dient in der Regel zur Motivation der Unschärferelation. Hierbei handelt es sich eigentlich um das klassische Einzelspalt-Experiment aus der Wellenoptik. Dieses wird aufgegriffen, der Lichtstrahl wird nun allerdings nicht mehr als Welle aufgefasst, sondern als Strahl aus einzelnen Photonen. Wie in Abbildung 1 dargestellt, bedingt dieser Wechsel



**Abbildung 1:** Einzelspaltexperiment im Photonenbild.

vom Wellen- ins Photonenbild, dass den Photonen als Teilchen ein Querimpuls  $\Delta p$  senkrecht zu ihrer Ausbreitungsrichtung beim Durchqueren des Einzelspalts zugeordnet werden muss. Auf diese Weise entsteht schließlich das Beugungsbild auf dem Schirm. Hier ist zu beachten, dass sich eigentlich keine Grenze für  $\Delta p$  angeben lässt. Wie in Abbildung 1 dargestellt, wird die Aufweitung des Querimpulses in der Regel allerdings mit der Breite des Hauptmaximums abgeschätzt. Diese Betrachtungsweise führt direkt zu einer möglichen Herleitung der Formel für die Unschärferelation im Physikunterricht der gymnasialen Kursstufe:

Nach Abbildung 1 folgt

$$\Delta p \approx p \cdot \sin(\alpha) \quad (1)$$

Aus der klassischen Optik gilt bei einer Spaltbreite  $\Delta x$  für den maximalen Beugungswinkel unter dem das Hauptmaximum auftritt

$$\sin(\alpha) = \frac{\lambda}{\Delta x} \quad (2)$$

Einsetzen von Gleichung (2) in (1) liefert

$$\Delta p \approx p \cdot \frac{\lambda}{\Delta x} \quad (3)$$

$$\Delta p \cdot \Delta x \approx p \cdot \lambda \quad (4)$$

Unter Verwendung der De-Broglie-Beziehung [de Broglie (1929)]

$$p = \frac{h}{\lambda} \quad (5)$$

folgt schließlich

$$\Delta p \cdot \Delta x \approx h \quad (6)$$

In der gängigen Schulliteratur [F. Dorn und F. Bader (2006), J. Grehn und J. Krause (2007)] wird die Breite des Doppelspaltes zum Teil auch mit  $2\Delta x$  angegeben. Dann verändert sich Gleichung (6) entsprechend zu

$$\Delta p \cdot \Delta x \approx \frac{h}{2} \quad (7)$$

Um die Analogie zum Einzelspaltexperiment aus der Wellenoptik zu wahren ist es meines Erachtens allerdings sinnvoll, die Spaltbreite mit  $\Delta x$  anzunehmen.

Wird das Einzelspaltexperiment nicht nur qualitativ durchgeführt, sondern quantitativ ausgewertet, so kann man diesen theoretischen Zusammenhang an entsprechenden Messwerten verifizieren. Ein mögliches Arbeitsblatt sowie Messergebnisse für diesen Versuch sind dem hier vorgestellten Unterrichtsmaterial beigelegt. Aus den Messwerten ergibt sich im Mittel

$$\Delta p \cdot \Delta x \approx 6,67 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$$

Dieser Wert weicht lediglich um etwa ein Prozent vom Literaturwert  $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$  ab.

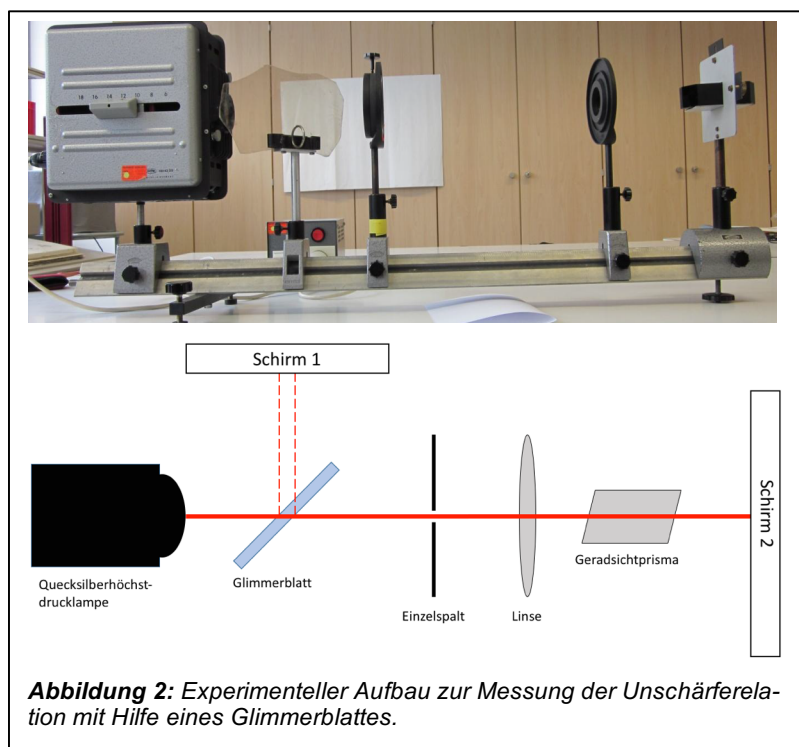
Trotz der einfachen Herleitung der Unschärferelation sowie der guten Übereinstimmung zwischen Experiment und Theorie hat dieser Ansatz didaktische Nachteile. So suggeriert diese Vorgehensweise die Existenz einer klassischen geraden Bahn, auf der sich das Elektron vom Spalt zum Schirm bewegt (siehe Abbildung 1). Darüber hinaus wird ihm ein fester Impuls und eindeutiger Auftreffpunkt auf dem Schirm zugeordnet. Beides widerspricht jedoch der grundsätzlichen Aussage der Heisenberg'schen Unschärferelation. So möchte man gerade zeigen, dass die Elektronen hinter dem Spalt keinen festen Impuls und einen unbestimmten Auftreffpunkt besitzen [Müller und Wiesner (1997)].

Darüber hinaus würde in diesem Experiment der eigentliche quantenphysikalische Zusammenhang erst dann gemessen werden, wenn es mit einzelnen Photonen durchgeführt würde. Entsprechende Einzelphotonenquellen gibt es allerdings nicht in den klassischen Physiksammlungen an Schulen. Lediglich an Universitäten oder in speziellen Schülerlaboren für moderne Optik sind diese vorhanden [Saur et al. (2014)].

Ein weiterer Nachteil dieses Versuches stellt die Tatsache dar, dass hierbei ein Experiment aufgegriffen wird, welches den Schülerinnen und Schülern bereits aus der Wellenoptik bekannt ist. Sie werden hier erneut mit dem klassischen Beugungsexperiment des Einzelspalts konfrontiert. Auch wenn die Betrachtungsweise vom klassischen Wellen- in das quantenphysikalische Photonenbild sehr elegant ist, birgt der experimentelle Aufbau nichts Neues. Gerade gute Schülerinnen und Schüler könnten dies als unbefriedigend empfinden. Ein Experiment, das eine Möglichkeit bietet, die Heisenberg'sche Unschärferelation zu messen und zugleich den Schülerinnen und Schülern nicht bereits bekannt ist, wird nun vorgestellt.

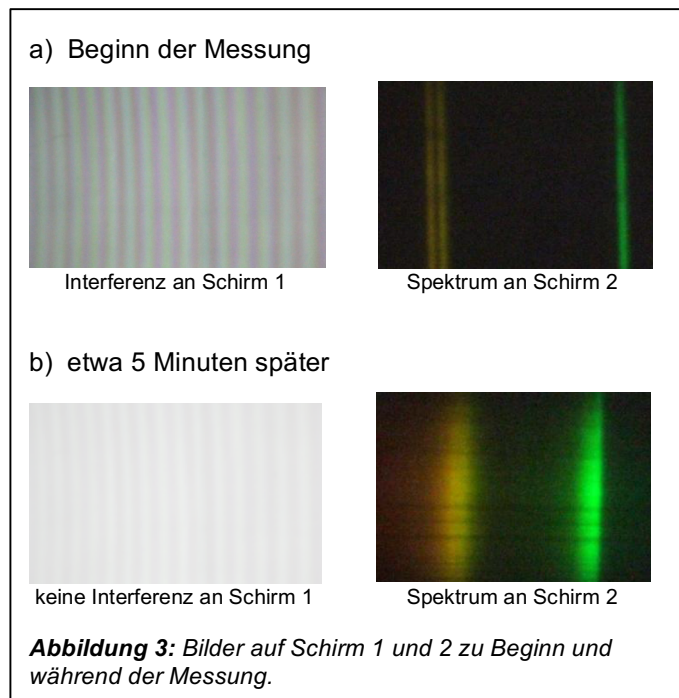
## Experiment 2

Den experimentellen Aufbau zeigt Abbildung 2. Hierin beleuchtet eine Quecksilber-Höchstdrucklampe ein Glimmerblatt, das zentral in einem  $45^\circ$  Winkel in den Strahlengang gesetzt wird. Ein Teil des einfallenden Lichts wird an der Vorderseite, ein Teil an der Hinterseite des Glimmerblatts reflektiert. Der restliche Teil des Lichts durchquert das Glimmerblatt und trifft anschließend auf einen Einzelspalt, der auf einen zweiten Schirm abgebildet wird. Dieser Lichtstrahl wird mit Hilfe eines Prismas in die einzelnen Spektrallinien des Quecksilber-Spektrums aufgespalten. Von besonderer Bedeutung ist hierbei die gelbe Doppellinie.



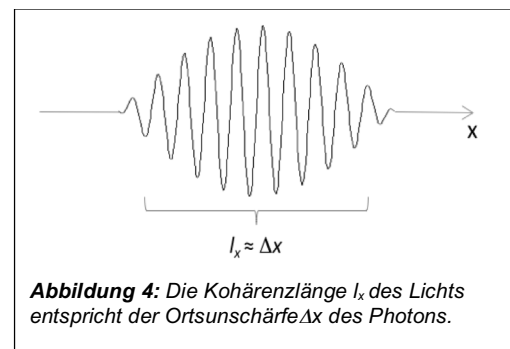
**Abbildung 2:** Experimenteller Aufbau zur Messung der Unschärferelation mit Hilfe eines Glimmerblattes.

Wie in Abbildung 3 gezeigt, erhält man auf Schirm 1, wie zu erwarten, ein Interferenzbild. Dieses entsteht nach dem Prinzip der Interferenz an dünnen Schichten, bedingt durch die Reflexionen der Lichtwellen an der vorderen und hinteren Seite des Glimmerblattes. Auf Schirm 2 erscheint bei hinreichend guter Justierung der Optik das scharfe Linienspektrum des Quecksilbers. Nach einer Messzeit von etwa vier bis fünf Minuten geht die Interferenz an Schirm 1 verloren und das Linienspektrum wird unscharf. Letzteres ist besonders gut an der gelben Doppellinie zu erkennen, die nun in eine einzelne verschwommene Linie übergeht.



### Versuchserklärung

Ein wesentlicher Unterschied des Lichts der Quecksilber-Höchstdruckdampfampe zum Licht eines Lasers ist die Kohärenzlänge der Strahlung. Während diese beim Laserlicht sehr groß ist, ist sie bei einer Dampfampe vergleichsweise klein. Jeder ausgesandte Wellenzug entspricht einem Photon. Somit ergibt sich als Abschätzung für die Ortsunschärfe des Photons gerade die Kohärenzlänge der entsprechenden Wellenzüge (siehe Abbildung 4).



Mit anhaltender Brenndauer wird die Quecksilber-Höchstdrucklampe zunehmend heißer, wodurch sich der Druck in ihrem Inneren erhöht. Dies führt dazu, dass die Licht aussendenden Quecksilberatome häufiger zusammenstoßen. Hierdurch nimmt die Lebensdauer der angeregten Zustände der Atome ab und somit deren Ausstrahlungszeit. Der Wellenzug wird kürzer [Haken und Wolf (2001)]. Da die Kohärenzlänge der mittleren Länge des Wellenzuges entspricht, verkleinert sie sich, und die Ortsunschärfe der Photonen nimmt ab.

Da die Interferenz durch Überlagerung von Wellen entstehen, die an der vorderen, beziehungsweise hinteren Grenzfläche des Glimmerblattes reflektiert werden, verschwinden die Interferenzstreifen, sobald der Wegunterschied der Wellen kleiner als die Kohärenzlänge des Wellenzuges wird. Wie in Abbildung 5 dargestellt, kann also in dem Augenblick, in dem das Interferenzmuster auf Schirm 1 gerade verschwindet, die Länge des Wellenzuges und damit die Unbestimmtheit des Ortes  $\Delta x$  durch die Wegdifferenz der beiden Wellen abgeschätzt werden. Diese entspricht ungefähr dem geometrischen Lichtweg durch das Glimmerblatt der Dicke  $d=0,07$  mm mit dem Brechungsindex  $n = 1,59$ . Damit ergibt sich für die Ortsunschärfe zum Zeitpunkt des Verschwindens der Interferenzstruktur zu

$$\Delta x \approx 2 \cdot 0,07 \text{ mm} \cdot 1,59 = 22,26 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

Außerdem bedeutet eine Verkürzung des Wellenzuges eine Verbreiterung des Frequenzbereiches. Daher verschwimmen mit zunehmender Brenndauer der Quecksilber-Höchstdrucklampe die Spektrallinien. Wenn die beiden zunächst getrennten gelben Linien mit  $\lambda_1 = 577 \text{ nm}$  und  $\lambda_2 = 579 \text{ nm}$  ineinander übergehen, besitzt jede der Linien eine Unschärfe von  $\Delta\lambda = 1 \text{ nm}$ . Es folgt:

$$\begin{aligned} \Delta p &= \left| \frac{h}{\lambda_1} - \frac{h}{\lambda_1 + \Delta\lambda} \right| \\ &= \left| \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{577 \text{ nm}} - \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{578 \text{ nm}} \right| \\ &\approx 1,99 \cdot 10^{-30} \text{ Ns} \end{aligned}$$

Diese Rechnung mit Wellenlänge  $\lambda_2$  liefert ein analoges Ergebnis. Hieraus ergibt sich schließlich für das Produkt von Orts- und Impulsunschärfe in diesem Experiment:

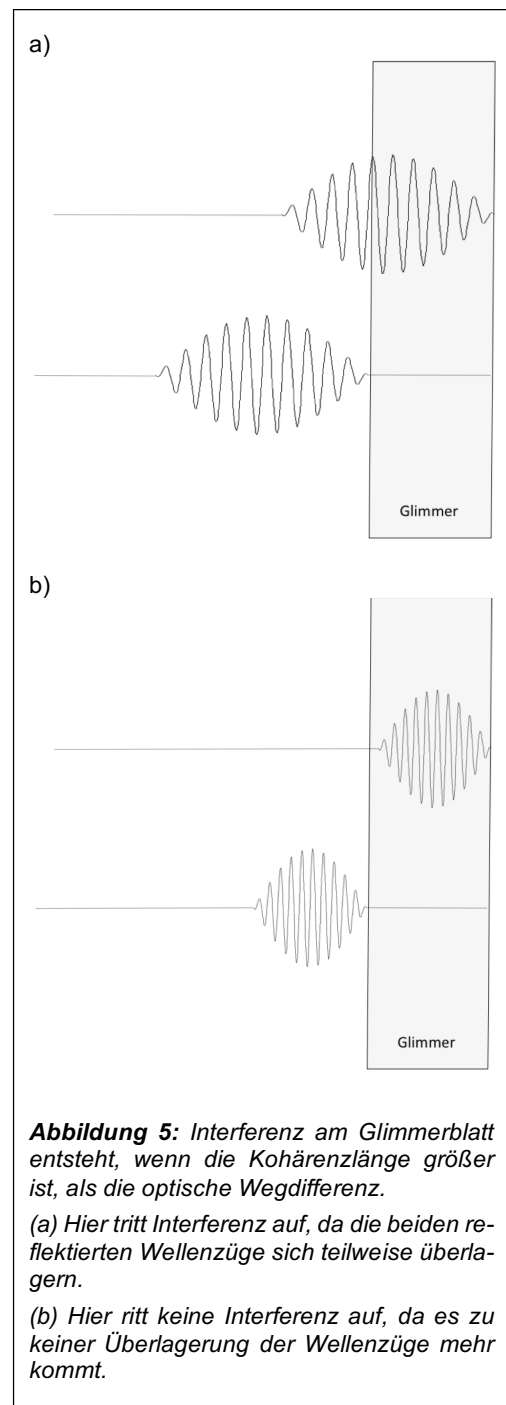
$$\begin{aligned} \Delta x \cdot \Delta p &\approx 22,26 \cdot 10^{-5} \text{ m} \cdot 1,99 \cdot 10^{-30} \text{ Ns} \\ &\approx 4,43 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis weicht deutlich stärker vom Literaturwert ab als in Experiment 1. Trotzdem liegt auch dieser Messwert im Bereich des Planck'schen Wirkungsquantums  $h$ .

In den theoretischen Überlegungen zu diesem Experiment ist stillschweigend die Abschätzung gemacht worden, dass die gemessenen Wellenzüge eine rechteckförmige Einhüllende besitzen. Die zu kleine Messergebnisse weisen darauf hin, dass diese Näherung nicht ausreichend exakt ist. Im Rahmen des Physikunterrichts in der Kursstufe muss diese aufgrund der Komplexität ihrer Alternativen allerdings ausreichen.

Während in Experiment 1 die Ortsunschärfe senkrecht zur Strahlrichtung gemessen wurde, geschieht dies in Experiment 2 parallel zur Strahlrichtung. Daraus lässt sich folgern, dass die Unbestimmtheitsrelation in allen drei Raumrichtungen gilt.

Bemerkenswert sind die Bilder während der Versuchsdurchführung auf Schirm 1 und 2. Wie bereits Abbildung 3 zu entnehmen ist, wirkt dieser Versuch optisch ungemein eindrucksvoll, und die Schülerinnen und Schüler sind in der Regel fasziniert von der Messung sowie dessen Ergebnis. Darüber hinaus bietet dieses Experiment die Möglichkeit die Heisenberg'sche Unschärferelation ohne Verwendung diverser Annahmen aus der klassischen Physik zu verifizieren.



**Abbildung 5:** Interferenz am Glimmerblatt entsteht, wenn die Kohärenzlänge größer ist, als die optische Wegdifferenz.

(a) Hier tritt Interferenz auf, da die beiden reflektierten Wellenzüge sich teilweise überlagern.

(b) Hier tritt keine Interferenz auf, da es zu keiner Überlagerung der Wellenzüge mehr kommt.

## Literatur

- F. Bader und F. Dorn (2006).** *Physik Gymnasium Sek II*, Schroedel, Braunschweig.
- M. Bartelmann (2015).** *Quantenmechanik in der Schule*. Physik in der Schule, 4: 7–13.
- L. de Broglie (1929).** *The wave nature of the electron*. Nobel Lecture, December 12, 1929.
- J. Grehn und J. Krause (2007).** *Metzler Physik*, Schroedel, Braunschweig.
- M. Jacobi (2001).** *Werner Heisenberg zum 100. Geburtstag*. Physik in unserer Zeit, 32(6): 274–278.
- J. Kofler (2014).** *Unschärfen in der Unschärferelation*. Physik in unserer Zeit, 45(4) : 186–190.
- H. Haken und H. C. Wolf (2001).** *Atom- und Quantenphysik*. Springer Verlag, Berlin.
- R. Müller und H. Wiesner (1997).** *Die Heisenbergsche Unbestimmtheitsrelation im Unterricht*. Physik in der Schule, 35: 380.
- O. Passon und J. Grebe-Ellis (2015).** *Was besagt die Heisenberg'sche Unschärferelation?* Physik in der Schule, 7: 44–49.
- M. Saur, N. Keller, M. Hauck, J. Wagner und M. Weidemüller (2014).** *Was ist Licht? Experimente zur modernen Optik und Quantenoptik im Schülerlabor*. Physik in der Schule, 8: 40–48.