

## Helmoltz-Resonatoren

Eine Unterrichtsidee von M. Hauck und H.G. Dosch

Der im Folgenden vorgeschlagene Unterrichtsgang basiert auf dem Artikel „Helmholtz auf dem Prüfstand“ aus Physik in unserer Zeit und bietet hierzu Arbeits- und Hintergrundmaterial [1]. Er kann im Rahmen der mechanischen Wellenlehre in der Kursstufe eingesetzt werden und bietet sich nach der Behandlung der Themen „erzwungene Schwingungen“ beziehungsweise „Wellenausbreitung auf begrenzten Trägern“ an.

Die entsprechenden Materialien wurden testweise bereits im Unterricht verwendet. Es zeigte sich, dass gerade der Vergleich zwischen eigenen experimentellen Ergebnissen und historischen Messwerten bei den Schülerinnen und Schülern großen Anklang findet.

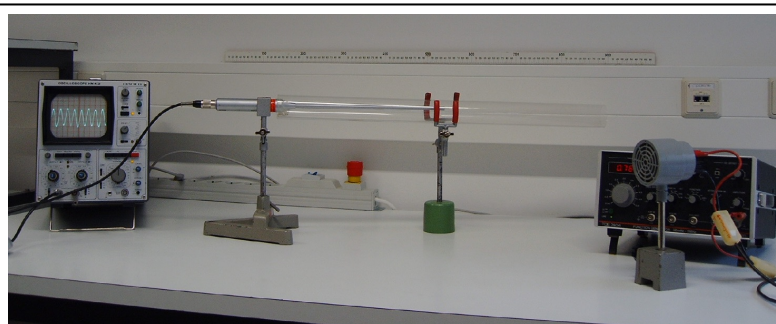
<b>Fachgebiet</b>	Physik
<b>Bezug zu</b>	Mathematik, Naturwissenschaft und Technik (NwT)
<b>Thema</b>	Akustik, Wellenlehre (Eigenschwingungen)
<b>Stichwort</b>	Hohlraumresonanz, Helmholtz-Resonator, Rayleigh, Eigenschwingung, Frequenz, Wellenlänge, Amplitude, Frequenzspektrum, Fourier-Transformierte
<b>Klassenstufe</b>	Kursstufe
<b>Zeit</b>	2-3 Stunden

## Hintergrundinformationen

### Allgemeine Betrachtungen

Wie im zitierten Artikel beschrieben haben viele bedeutende Physiker grundlegende Arbeiten in der Akustik und insbesondere zu Hohlraumresonanzen veröffentlicht. Für deren Verständnis ist die Auseinandersetzung mit der Theorie stehender Wellen auf respektive in begrenzten Wellenträgern fundamental. Diese ist ein beliebtes und in der Regel umfassend zu behandelndes Thema im Physikunterricht der gymnasialen Kursstufe. Hierbei werden meist auch Eigenschwingungen in Röhren angesprochen. Ein beliebtes Beispiel ist das Kundt'sche Rohr [1], wovon ein möglicher Versuchsaufbau in Abbildung 1 dargestellt ist.

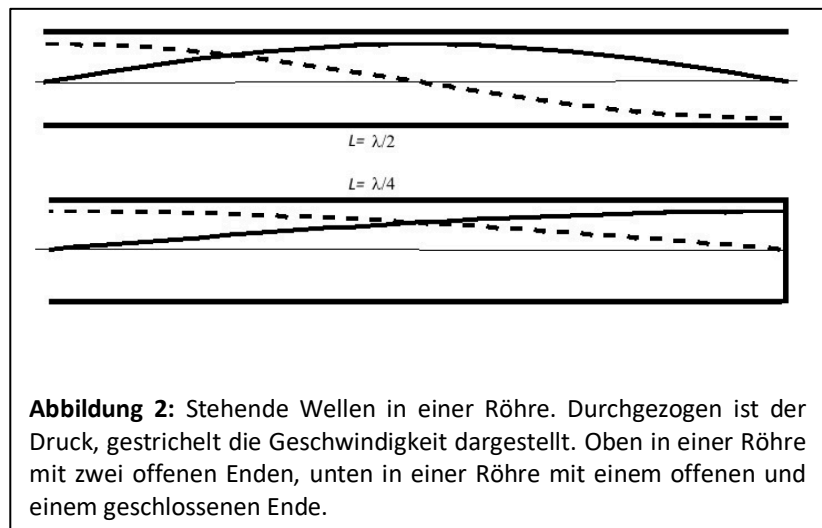
Erfahrungsgemäß ist das Resonanzverhalten von Röhren für Schülerinnen und Schüler häufig nicht direkt erklärbar und erzeugt zunächst einen



**Abbildung 1:** Experimenteller Aufbau zum Nachweis von stehenden Wellen in einer Röhre [Foto: R. Löhken, Universität Heidelberg].

kognitiven Konflikt. Obwohl sie entsprechende Phänomene bei Blasinstrumenten aus dem Musikunterricht kennen, ist es für sie nicht einsichtig, weshalb am offenen Ende einer Röhre Eigenschwingungen entstehen. Daher sollte zunächst umfassend geklärt werden, wie die stehende Welle an einem offenen Röhrenende entsteht, bevor dessen Resonanzfrequenzen hergeleitet werden. Eine anschauliche Erklärung wird im klassischen Schulphysik-Lehrbuch Dorn-Bader Physik 11/12 gegeben [2]. Darin wird beschrieben, dass am Lautsprecher eine Verdichtung der Luft (Druckbauch) entsteht, die sich durch das Rohr bewegt. Da der Druck im Inneren des Rohres sehr viel größer ist, als der Atmosphärendruck außerhalb „explodiert“ der beschriebene „Verdichtungspropf“ kurz nach Erreichen des Rohrendes regelrecht nach allen Seiten. Dadurch entsteht ein Unterdruck. Dieser führt dazu, dass die Luftteilchen wieder in die Röhre gezogen werden und sich schließlich zurück durch die Glasröhre bewegen. Folglich entsteht am Ende des Rohres ein Druckknoten. Aufgrund des hinlaufenden Über- und des reflektierten Unterdrucks bildet sich eine stehende Welle im Rohr.

Betrachtet man eine Röhre als ein lineares System, so lässt sich ihre Resonanzfrequenz approximativ mit Hilfe von Abbildung 2 aus den im Folgenden beschriebenen Überlegungen herleiten: an einem offenen Ende der Röhre muss der Druck ungefähr gleich dem Atmosphärendruck sein. Somit ist dort die Geschwindigkeit der Luftteilchen maximal, da der Druck innerhalb der Röhre



signifikant höher ist als der äußere Atmosphärendruck. An einem geschlossenen Ende ist die Geschwindigkeit der Luftteilchen Null und damit der Druck maximal. Hieraus ergeben sich in Abhängigkeit der Röhrenlänge  $L$  sowie den entsprechenden Randbedingungen stehende Wellen in deren Inneren. Bei zwei offenen Enden gilt für die Wellenlängen der sich ergebenden Eigenschwingungen die Beziehung

$$\lambda_n = n \cdot \frac{L}{2} \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

In einer Röhre mit einem offenen und einem geschlossenen Ende gilt analog

$$\lambda_n = (2n - 1) \cdot \frac{L}{4} \quad (n \in \mathbb{N})$$

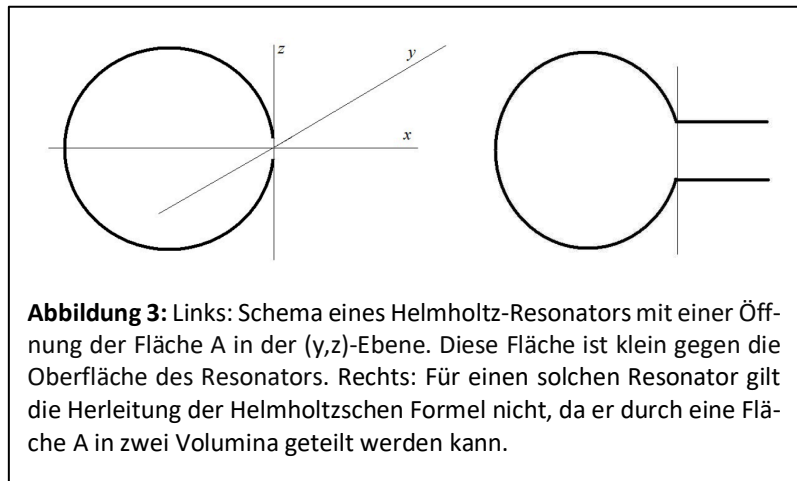
Da die Wellenlänge  $\lambda$  mit der Frequenz  $\nu$  und der Schallgeschwindigkeit  $c$  über die Beziehung  $c = \lambda \cdot \nu$  verknüpft ist, folgen hieraus die zugehörigen Eigenfrequenzen  $\nu_n$ .

Allgemein gilt für die Randbedingungen, dass an einem geschlossenen Ende des Resonators die Geschwindigkeit der Luftteilchen gegen Null konvergieren muss. Danach ist zu erwarten, dass die Wellenlänge der niedrigsten Resonanzfrequenz von der Größenordnung des Resonanzgefäßes ist. Diese Abschätzung gilt allerdings nicht für alle Hohlraumresonatoren. Da Helmholtz dies erkannte und sie gezielt als akustische Fourier-Analysatoren einsetzte, werden

sie Helmholtz-Resonatoren genannt. Er war es auch, der schließlich 1859 in einer grundlegenden Arbeit eine Theorie für diese Resonatoren angab [3]. Obwohl diese wohl zu komplex für den gymnasialen Unterricht ist, soll sie im Folgenden kurz beschrieben werden.

Helmholtz betrachtete einen Hohlraum vom Volumen  $V$  und

einer Öffnung der Fläche  $A$ . Diese muss sehr klein gegenüber der Oberfläche des Resonators sein, wie in Abbildung 3 (links) dargestellt. Darüber hinaus darf es nicht möglich sein, dieses Volumen durch eine Fläche von ähnlichen Ausmaßen wie die der Öffnung  $A$  in zwei oder mehr Teile zu trennen. Hat der Resonator zum Beispiel einen Hals wie in Abbildung 3 (rechts) gezeigt, ist diese Voraussetzung nicht erfüllt, da das Volumen des Halses auf die angegebene Weise vom übrigen Resonanzkörper abgetrennt werden kann. Somit ist die von Helmholtz hergeleitete Formel für diese Art von Resonatoren nicht anwendbar.



**Abbildung 3:** Links: Schema eines Helmholtz-Resonators mit einer Öffnung der Fläche  $A$  in der  $(y,z)$ -Ebene. Diese Fläche ist klein gegen die Oberfläche des Resonators. Rechts: Für einen solchen Resonator gilt die Herleitung der Helmholtzschen Formel nicht, da er durch eine Fläche  $A$  in zwei Volumina geteilt werden kann.

Helmholtz untersuchte solche akustischen Eigenschwingungen des Resonators, deren Wellenlänge sehr groß gegen die lineare Dimension des Volumens ist. Die Wandstärke des Resonators setzte er zu Null, ging also davon aus, dass sie sehr klein sei im Vergleich zur linearen Dimension der Öffnung, deren Größenordnung etwa  $\sqrt{A}$  beträgt. Unter diesen Voraussetzungen konstruierte Helmholtz eine Lösung, die die akustische Wellengleichung streng erfüllte und approximativ auch die Randbedingung beinhaltete, dass die Normalkomponente der Luftgeschwindigkeit an der Innenfläche des Resonators verschwindet. In seinem Lösungsansatz ist der Druck im Resonator räumlich konstant. Auf den Resonator fällt senkrecht eine ebene Welle ein, und eine Doppelschicht in der Öffnung sendet Schallwellen aus. Die Lösung ist durch die Wellengleichung und die Randbedingungen eindeutig festgelegt. Er fand schließlich die folgende Gleichung für den Intensitätsverlauf der Resonanzkurve

$$y^2(\nu) = \frac{\left(\frac{c^2 M}{4\pi V}\right)^2}{\left(\nu^2 - \frac{c^2 M}{4\pi V}\right)^2 + \left(\frac{\pi M \nu^3}{c}\right)^2}$$

Hierin ist  $c$  die Schallgeschwindigkeit. Die Größe  $M$  ist proportional zur Lineardimension der Öffnung. Es gilt

$$M = \sigma \sqrt{A}$$

Der dimensionslosen Faktor  $\sigma$  ist von der Form der Öffnung abhängig. Für eine kreisförmige Öffnung gilt beispielsweise  $M = \frac{2}{\pi} \cdot R$  woraus sich  $\sigma = \frac{2}{\sqrt{3}\pi} \approx 0,359$  ergibt.

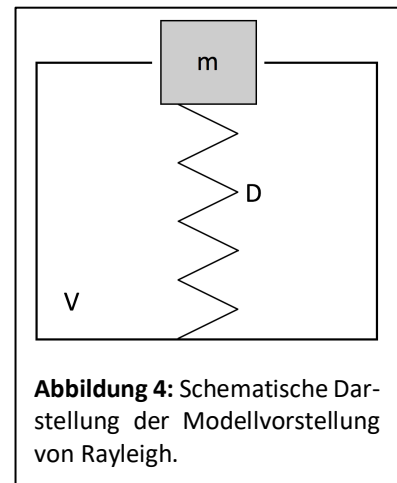
	A	B
$\nu_R$	$\frac{c}{2} \sqrt{\frac{M}{\pi V}}$	$\frac{c}{\pi} \sqrt{\frac{R}{2V}}$
$y^2(\nu_R)$	$\frac{4V}{\pi M^3}$	$\frac{\pi^2 V}{2R^3}$
$2\delta$	$\frac{cM^2}{4V}$	$2 \frac{cR^2}{\pi^2 V}$

**Tabelle 1:** Theoretische Werte für die Resonanzfrequenz  $\nu_R$ , die Resonanzhöhung  $y^2(\nu_R)$  und die Halbwertsbreite  $2\delta$  der Resonanzkurve. In Spalte A sind die Größen durch die geometrieabhängige Größe  $M$  ausgedrückt. Spalte B gilt für eine kreisförmige Öffnung.

Die Intensität der einfallenden ebenen Welle ist hierbei auf 1 normiert. Bei der Resonanzfrequenz wird die Funktion  $y^2(\nu_R)$  maximal. Dies gilt genau dann, wenn der linke Summand im Nenner Null wird. Hieraus folgt direkt für die Resonanzfrequenz  $\nu_R = \sqrt{\frac{c^2 \cdot M}{4\pi V}}$ .

Bei akustischen Untersuchungen spielen neben der Resonanzfrequenz  $\nu_R$  die Resonanzhöhe  $y^2(\nu_R)$  sowie die Halbwertsbreite  $2\delta$  der Resonanzkurve eine wichtige Rolle. Diese Größen sind in Tabelle 1 zusammengestellt. Für eine einfache Berechnung ist in Spalte A das allgemeine Resultat angegeben, ausgedrückt durch die geometrischen Größen  $M$  und  $V$  an. In Spalte B ist das spezielle Resultat für eine kreisförmige Öffnung mit Radius  $R$  dargestellt.

Eine anschaulichere Interpretation der Helmholtz-Resonanz, die sich auch hervorragend für den Unterricht in der gymnasialen Kursstufe anbietet, geht auf die Arbeiten von Rayleigh zurück [4]. Er betrachtete das schwingende Luftvolumen mit der Masse  $m$  an der Öffnung vom Flächeninhalt  $A$  des Resonators. Es wird getrieben durch die Kompression und Expansion der Luft im Inneren des Hohlraums (Abbildung 4). Geschieht die Kompression adiabatisch, das heißt findet während eines Schwingvorgangs kein Wärmeausgleich statt, so ergibt sich mit der Dichte  $\rho$  der Luft, der Proportionalitätskonstante  $D$  und der Verschiebung  $dx$  des Luftvolumens an der Öffnung für die rücktreibende Kraft die Formel



**Abbildung 4:** Schematische Darstellung der Modellvorstellung von Rayleigh.

$$\vec{F} = D \cdot d\vec{x} = \frac{c^2 \rho A}{V} d\vec{x}$$

Dass die rücktreibende Kraft auf die Schallgeschwindigkeit zurückgeführt werden kann liegt daran, dass die gleichen Vorgänge auch bei der Schallausbreitung stattfinden. Die Masse der schwingenden Luft ist  $m = A L_{eff} \rho$ , wobei  $L_{eff}$  die effektive beziehungsweise akustisch wirksame Länge des schwingenden Luftvolumens ist. Die Formel für die rücktreibende Kraft liefert die Differentialgleichung eines harmonischen Oszillators, die nichtvektoriell folgendermaßen geschrieben werden kann

$$m \cdot \ddot{x} = -\frac{c^2 \rho A}{V} \cdot x$$

Aus dem Ansatz

$$x(t) = \hat{x} \cdot \sin(\omega t)$$

ergibt sich dessen Resonanzfrequenz  $\nu_R$  zu

$$\nu_R = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{m}} = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{A}{V L_{eff}}}$$

Diese Überlegung lässt sich besonders gut für einen Hohlraumresonator mit Hals durchführen, bei dem die effektive Länge  $L_{eff}$  näherungsweise der tatsächlichen Länge des Halses  $L_H$  entspricht. Für kreisförmige Öffnungen mit dem Radius  $R$  gilt allgemein

$$L_{eff} = L_H + \alpha_H R,$$

wobei der Wert von  $\alpha_H$  auch von der Umgebung der Öffnung abhängt. Theoretisch berechnete Werte sind bei Fletcher und Rossing [5] angegeben und liegen zwischen

$$0,6 \leq \alpha_H \leq 0,85$$

Helmholtz selbst fand als Mündungskorrektur einen Wert von  $\alpha_H \approx \pi/4 \approx 0,758$ , Rayleigh bestimmte für eine Röhre mit geflanschten Enden einen leicht verschiedenen Wert. Die Berechnung für Röhren ohne Endflansch ist sehr kompliziert und das Problem wurde erst 1948 von Levine und Schwinger<sup>1</sup> gelöst. Die entsprechenden Mündungskorrekturen lauten

Rayleigh:  $\alpha_H \approx 8/(3\pi) \approx 0,85$

Levine & Schwinger:  $\alpha_H \approx 0,61$

Wie weit auf diese Korrekturen im Unterricht eingegangen wird hängt selbstverständlich von der Leistungstärke der Schülerinnen und Schüler ab. Sicherlich genügt die Behandlung des einfachsten Falls ohne Mündungskorrekturen zum Verständnis der grundlegenden physikalischen Vorgänge.

Abschließend ist festzustellen, dass ein realistisches Geschwindigkeitsprofil für eine kreisförmige Öffnung mit einer Singularität am Rand stark von dem abweicht, das im Rayleighschen Analogmodell angenommen wird. An den Rändern bewegt sich die Luft am schnellsten, was zu einem entsprechend großen Einfluss der Luftreibung auf die Resonanz führt.

Resonator	Volumen cm <sup>3</sup>	Öffnung		Ohröffnung	
		R cm	H cm	R cm	H cm
HR B'	225	0.74	0.05	0.7-0.96	2
HRut	155	0.65	0.05	0.24-0.5	1
HRmi	98	0.7	0.06	0.24-0.4	1

**Tabelle 2:** Maße der untersuchten Helmholtz-Resonatoren.

## Material und Methoden

Die in dem Artikel untersuchten Helmholtz-Resonatoren stammen aus der Sammlung des Physikalischen Instituts der Universität Heidelberg. Diese sind mit unterschiedlichen Bezeichnungen gestempelt: einer mit „B'“, einer mit „ut4“ und einer mit „mi4“. Im Folgenden werden diese als *HR B'*, *HR ut* und *HR mi* bezeichnet. Abbildung 5 zeigt ein Foto der Exponate. Alle drei Resonatoren haben eine Öffnung zur Anregung („Öffnung“), die sich in der Abbildung am unten Ende befindet, sowie eine Öffnung um den Resonator mit dem Ohr zu verbinden („Ohröffnung“). Beim größten



**Abbildung 5:** Die untersuchten originalen Helmholtz-Resonatoren aus der Sammlung des Physikalischen Instituts der Universität Heidelberg.

<sup>1</sup> Julian S. Schwinger erhielt 1965 den Physik-Nobelpreis zusammen mit R. P. Feynman und S. Tomonaga für ihre grundlegenden Leistungen in der Quantenelektrodynamik sowie den daraus resultierenden Konsequenzen für die Elementarteilchenphysik.

Helmholtz-Resonator, HR B', ist der Hals der Ohröffnung nahezu zylindrisch, bei den beiden anderen trichterförmig. Auch die Öffnungen sind bei den beiden kleineren Resonatoren leicht trichterförmig. Ihre Maße sind in der Tabelle 2 angegeben.

Als Alternative zu den originalen Helmholtz-Resonatoren bieten sich selbstgebaute Resonatoren aus Haushaltsgegenständen an. Sehr zu empfehlen sind hierbei Hipp-Gläschen, wie sie in Abbildung 6 gezeigt sind. In deren Deckel können Löcher verschiedener Größen gebohrt oder gestanzt werden. Hierbei ist allerdings zu beachten, dass die Bohrränder nicht verbogen oder ausgefranst sein sollten, da diese ansonsten die Reibung der Luft an ihren Rändern erhöhen. Dadurch kommt es zwangsläufig zu Abweichungen der gemessenen Werte zur Theorie.



**Abbildung 6:** Helmholtz-Resonatoren gefertigt aus Hipp- und Honig-Gläsern.

Der im Artikel beschriebene Versuchsaufbau ist bewusst einfach gehalten und mit wenig Stativmaterial realisierbar (Abbildung 7). Generell kann der gesamte Versuch als echtes Low-Cost-Experiment eingestuft werden. Die akustische Anregung erfolgte über einen einfachen Bass-Lautsprecher mit einer Leistung von 10 W und einem Durchmesser von 16,5 cm. Entsprechende Modelle sind für unter 10 Euro im Online-Handel erhältlich. Der Lautsprecher wurde mit Hilfe eines Stativs direkt über dem Resonator platziert. Zur Aufnahme wurde die interne Soundkarte eines Laptops<sup>2</sup> mit einem Mini-Mikrofon verwendet. Dieses passte gut in die Ohr-Öffnungen der Resonatoren, die danach sorgfältig versiegelt wurden. Bei der Verwendung von selbstgebauten Resonatoren wie in Abbildung 7 gezeigt, sollte das Mikrofon durch eine zweite Öffnung in den Innenraum eingeführt werden. Diese kann im Anschluss mit Knetmasse abgedichtet werden.



**Abbildung 7:** Experimenteller Aufbau zur Untersuchung der Helmholtz-Resonatoren.

Dabei ist zu beachten, dass bei einfachem Equipment weder Lautsprecher noch Mikrofon ideal sind und bei Untersuchungen in normalen, das heißt nicht reflexionsarmen Räumen, in der Regel Raumresonanzen auftreten. Bei den im Folgenden beschriebenen Messungen stellte sich heraus, dass es sehr vorteilhaft ist, den Lautsprecher möglichst nahe an der Öffnung des Resonators anzubringen. Auf diese Weise kann der Einfluss der Raumresonanzen stark vermindert werden.

<sup>2</sup> Wichtig ist hierbei, dass der Computer einen Audioeingang und einen separaten Audioausgang besitzt. Bei den hier vorgestellten Untersuchungen war dies bei einem einfachen, günstigen Netbook gegeben. Mit einem MacBook Pro konnten hingegen keine zufriedenstellenden Ergebnisse erzielt werden.

Darüber hinaus wurden weitere Messungen in einem mit Styropor ausgekleideten Kasten vorgenommen. Dieser ist in Abbildung 8 dargestellt. Dadurch können zwar Störgeräusche sehr effektiv reduziert werden, doch empfiehlt sich der Aufwand für einen solchen Aufbau nur, wenn starke Störgeräusche unvermeidlich sind, wie zum Beispiel bei einem Demonstrationsexperiment vor einer sehr unruhigen Klasse. Bei diesen Untersuchungen zeigte sich, dass die exakte Lage der Resonanzfrequenz durch die Umgebung beeinflusst wird. Allerdings beträgt dieser Effekt nur wenige Prozent der Resonanzfrequenz.

Prinzipiell können die im Artikel beschriebenen Messungen auf zwei Arten durchgeführt werden: entweder wird der Resonator mit einer Folge von Einzeltönen fester Frequenz oder mittels eines Rauschsignals mit möglichst breitem Frequenzband bestrahlt. Alle Töne beziehungsweise Rauschsignale können am PC mit der Software PRAAT erzeugt und abgespielt werden. Eine kurze Anleitung zu diesem Programm ist diesem Unterrichtsmaterial beigelegt. Dieses kann auch zur Fourier-Analyse der Aufnahmen benutzt werden. Die Untersuchung des Resonators mittels weißem Rauschen ist besonders bequem, da mit einer Anregungsdauer im Sekundenbereich das gesamte Spektrum überdeckt werden kann. Hierbei ist ein randomisiertes Gauß'sches Rauschen mit dem Mittelwert  $\mu = 0$  und der Standardabweichung  $\sigma = 0,1$  zu empfehlen, das sich ebenfalls leicht mit PRAAT erzeugen lässt. Die Sampling-Frequenz für die Untersuchungen kann auf 8000 Hz beschränkt werden, da die zu erwartenden Helmholtz-Resonanzen unter 1000 Hz lagen.

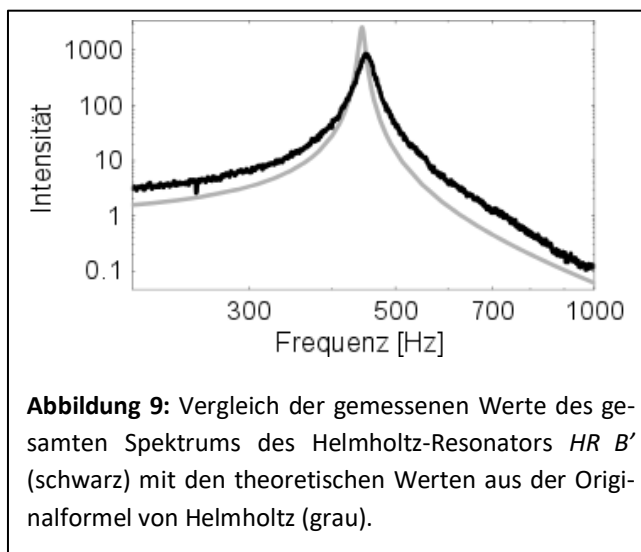
Alle Spektralmessungen müssen zunächst mit dem Mikrofon im Inneren des Resonators durchgeführt werden. Aufgrund des zuvor beschriebenen Einflusses der Raumresonanzen sowie des nichtlinearen Frequenzganges des Mikrofons und des Lautsprechers ist es allerdings unerlässlich, neben den Resonanzmessungen, bei denen das Mikrofon im Resonator untergebracht wird, mit dem selben Mikrofon auch Messungen der Anregungsstärke ohne Resonator an der Stelle vorzunehmen, an der sich die Öffnung des Resonators bei der ursprünglichen Messung befand. Mittels Quotientenbildung der Fourier-Transformierten der jeweiligen Originalsignale werden die äußeren Messwerte zur Normierung der im Inneren des Resonators aufgenommenen Resonanzkurve verwendet. Auf diese Weise lassen sich der Einfluss der Raumresonanzen sowie der Frequenzgang des Mikrofons und des Lautsprechers weitestgehend eliminieren.

Generell zeigt sich, dass die mit Gauß'schem Rauschen gewonnene resultierende Resonanzkurve sehr gut mit der übereinstimmt, in der der Resonator mit aufeinanderfolgenden Sinustönen bestimmter Frequenz bestrahlt wurde. Werden Sinustöne verwendet, so können diese



**Abbildung 8:** Mit Styropor ausgekleidete Box zum Schutz vor Störgeräuschen von außen.

entweder diskret aufeinanderfolgend als Tonfolge oder mit kontinuierlich wachsender Frequenz eingestrahlt werden, als so genannte Sweeps. Bei einem Frequenzgang von 1 Hz/s sind die kontinuierlichen Ergebnisse bei Mittelungen über ein Hertz nicht von denen mit einer Anregung durch eine diskrete Tonfolge zu unterscheiden. Die Resonanzkurven, welche durch sukzessive Einstrahlung erhalten wurden, sind etwas glatter als die mit weißem Rauschen erzeugten.



**Abbildung 9:** Vergleich der gemessenen Werte des gesamten Spektrums des Helmholtz-Resonators *HR B'* (schwarz) mit den theoretischen Werten aus der Originalformel von Helmholtz (grau).

## Vergleich der Messwerte mit Theorie

Im Folgenden werden exemplarisch einige Messwerte gezeigt und diese mit den theoretischen Werten verglichen. Um Beispielwerte für den eigenen Unterricht zu erhalten werden hierbei deutlich mehr Angaben gemacht, als in unserem Artikel in „Physik in unserer Zeit“ [1] dargestellt sind.

Grösse	HR B'			HR ut			HR mi		
	exp	theo	ex/th	ex	th	ex/th	ex	the	ex/th
$\nu_R$ [Hz]	445	445	1	494	502	0.98	637	655	0.97
$\nu_{bez}$ [Hz]	466			523			659		
amp. [dB]	30.8	34.3	0.90	32.8	34.4	0.95	31.0	31.5	0.98
Breite [Hz]	14	8.5	1.7	15	9.5	1.6	17	17.5	0.97

**Tabelle 3:** Experimentelle und theoretische Werte für die Resonanzfrequenz  $\nu_R$  der drei Helmholtz-Resonatoren. Die Bezeichnungen sind analog zu Tabelle 1 gewählt.  $\nu_{bez}$  ist die auf dem Resonator angegebene Frequenz basierend auf dem Kammerton  $a' = 440$  Hz. Die aufgestempelten Angaben stimmen mit den gemessenen überein, wenn man einen Kammerton von 425 Hz zugrunde legt.

In Abbildung 9 ist das komplette gemessene Spektrum des großen Helmholtz-Resonators *HR B'* dargestellt. Die Lage der Helmholtz-Resonanz stimmt mit der von Helmholtz berechneten auf einige Prozent überein, auch die allgemeine Form der Resonanzkurve ist gut vergleichbar mit der Theorie, allerdings sind die Diskrepanzen bei Breite und Höhe deutlich größer. Dies ist nicht verwunderlich, da bei der Helmholtz'schen Herleitung der Resonanzkurve Reibungsphänomene nicht berücksichtigt wurden.

Die Resonanzfrequenzen  $\nu_R$ , der Verstärkungsfaktor  $y^2(\nu_R)$  und die Halbwertsbreite  $2\delta$  der Helmholtz-Resonatoren sind in Tabelle 3 aufgelistet. Darüber hinaus sind die auf den Resonatoren angegebene Frequenz  $\nu_{bez}$  basierend auf dem Kammerton  $a' = 440$  Hz angegeben. Die Abweichungen der gemessenen von den theoretischen Werten (siehe Tabelle 1) betragen bei der Resonanzfrequenz maximal 5%. Die Reproduzierbarkeit der einzelnen Messungen unter



gleichen Bedingungen ist besser als 1 %. Wie bereits beschrieben können allerdings die Abhängigkeit von den äußeren Bedingungen sowie Fehler bei der Bestimmung der Abmessungen der Resonatoren zu Abweichungen von etwa 3 % führen.

Grundsätzlich ergibt sich aus der Zusammenstellung der Messwerte, dass die Voraussetzungen für die Herleitung der theoretischen Ergebnisse umso besser erfüllt sind, je kleiner das Verhältnis der Öffnungsfläche zu der Oberfläche des Resonators ist. Bei der Verstärkung  $y^2(\nu_R)$  und der Breite  $2\delta$  ist die Abweichung deutlich größer. Dies lässt sich durch die endliche Viskosität der Luft und die Reibungsverluste am Öffnungsrand erklären. Die Luftgeschwindigkeit wird an den Rändern der Öffnungen sehr groß, sodass selbst bei einer geringen Dicke der Wand Reibungen an dieser wohl nicht mehr zu vernachlässigen sind.

In Tabelle 4 sind, neben dem Originalresultat von Helmholtz (Spalte H), die theoretischen Werte nach Rayleigh unter Verwendung von zwei unterschiedlichen Mündungskorrekturen aufgeführt. Mit Ausnahme der Korrekturen von Levine und Schwinger [6] liegen die experimentellen Werte dieser Studie im Einklang mit der entsprechenden Theorie.

Hermann von Helmholtz selbst verglich seine ersten theoretischen Ergebnisse mit Messungen von Guillaume Wertheim [7]. Dieser untersuchte viele Resonatoren, für die er rein empirisch eine Anpassungsformel fand. In Tabelle 5 sind seine Messungen an Glaskugeln mit dem Volumen  $715 \text{ cm}^3$  und verschiedenen Öffnungsradien sowie die Ergebnisse seiner Anpassungsformel (Spalte Wertheim) aufgeführt. Wie erwartet zeigt sich, dass die von Helmholtz theoretisch hergeleitete Formel (Spalte Helmholtz) nur für kleine Öffnungsradien gute Ergebnisse liefert. Diese Abweichungen sind mit der Theorie wohlverträglich, da in der theoretischen Ableitung von Helmholtz der Öffnungsradius als sehr klein gegenüber der linearen Abmessung des Resonators angenommen ist. Für die Helmholtz-Resonatoren ergibt die Wertheim'sche Anpassungsformel allerdings deutlich zu kleine Werte.

Resonator	H	H-R	R	RS	exp
HR B'	444	435	419	494	445
HRut	502	490	472	556	494
HRmi	655	640	617	728	637

**Tabelle 4:** Vergleich unterschiedlicher theoretischer Werte mit den experimentellen Ergebnissen. In Spalte „H“ ist das Originalergebnis von Helmholtz angegeben. „H-R“ ist die Rayleigh'sche Formel mit den Mündungskorrekturen von Helmholtz. In Spalte „R“ sind die Rayleigh'schen Korrekturen für eine geflanschte Röhre aufgeführt. Spalte „RS“ enthält die Korrekturen von Levine und Schwinger für eine ungeflanschte Röhre.

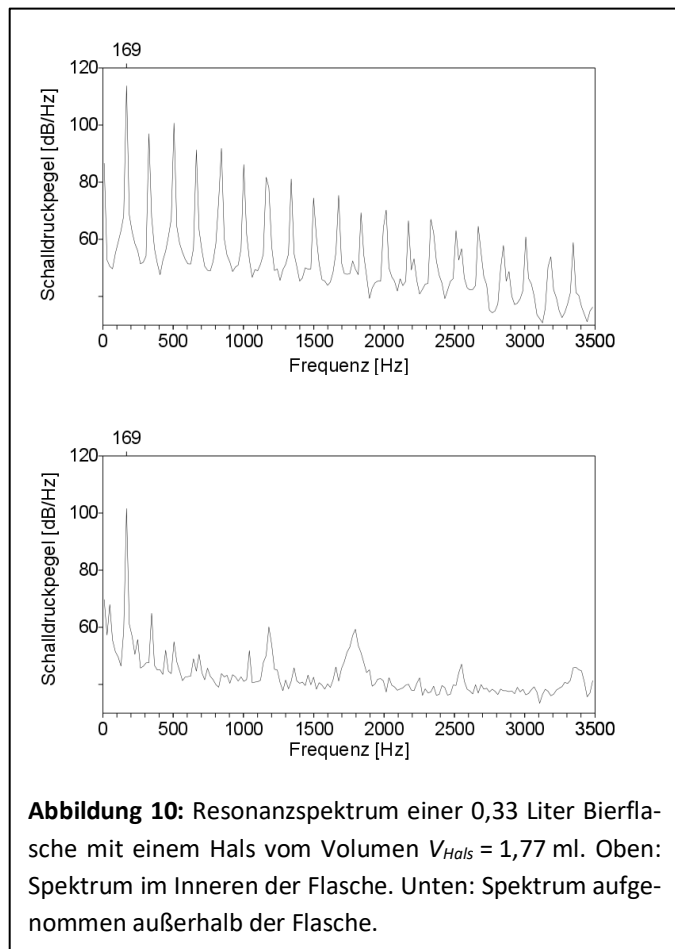
Resonator	Helmholtz	Wertheim	exp
HR B'	444	364	445
HRut	502	410	494
HRmi	655	511	637
<i>W. 3mm</i>	159	163	164
<i>W 5mm</i>	205	194	192
<i>W 7.5mm</i>	251	221	220
<i>W 12mm</i>	317	257	290

**Tabelle 5:** Historische Messungen und Anpassungsformeln, die historischen Werte sind kursiv gedruckt. Die Resonatoren sind die im Artikel untersuchten Helmholtz-Resonatoren HR B', HR ut und HR mi, sowie die von Wertheim 1851 untersuchten Glaskugeln (*W. 3 mm, ..., W 12 mm*) mit einem Volumen  $V = 715 \text{ cm}^3$  und unterschiedlichen Öffnungsradien zwischen 3 und 12 mm. Die Spalte „Helmholtz“ gibt die Resultate der Originalformel von Helmholtz wieder, die Spalte „Wertheim“ die einer Anpassungsformel von Wertheim.

Ein besonders leicht zugänglicher Hohlraumresonator mit Hals ist eine Flasche. Diese kann leicht im Unterricht zur Demonstration herangezogen werden. In Abbildung 10 (oben) ist das Resonanzspektrum im Inneren einer handelsüblichen Bierflasche mit einem Volumen von 0,33 Liter dargestellt. Bei diesem Experiment wurde die Resonanz durch Anblasen erzeugt, was die übliche Anregung bei den historischen Untersuchungen von Wertheim und Sondhauss [8] war. Bei einer gemessenen Halslänge von 8 cm und einem mittleren Halsdurchmesser von 1 cm ergibt sich theoretisch eine Resonanzfrequenz von  $\nu_{theo} = 171$  Hz. Diese stimmt sehr gut mit der experimentell bestimmten Hohlraumresonanz von  $\nu_{exp} = 169$  Hz überein. Allerdings hatte bereits Sondhauss festgestellt, dass hier die Frequenz deutlich hörbar von der Art des Anblasens abhängt.

Es ist zu beachten, dass beim Anblasen sich die Spektren, die im Inneren und außerhalb der Flasche aufgenommen werden, signifikant unterscheiden. Es zeigt sich, dass bei der Messung des Spektrums im Inneren neben der Hohlraumresonanz deren Harmonische prominent auftreten (Abbildung 10, oben). Wird die Resonanzkurve mit einem Mikrophon außerhalb der Flasche aufgenommen (Abbildung 10, unten), so sind diese Obertöne weit weniger stark ausgeprägt.

Die entsprechenden Aufnahmen zu den hier dargestellten Messwerten sind diesem Unterrichtsmaterial beigelegt und stehen im WIS-Portal zum Download bereit. Somit können die besprochenen Spektren auf Grundlage dieser Aufnahmen auch eigenständig erstellt und bearbeitet werden.



**Abbildung 10:** Resonanzspektrum einer 0,33 Liter Bierflasche mit einem Hals vom Volumen  $V_{Hals} = 1,77$  ml. Oben: Spektrum im Inneren der Flasche. Unten: Spektrum aufgenommen außerhalb der Flasche.

## Literatur

- [1] **H.G. Dosch und M. Hauck**, *Helmholtz auf dem Prüfstand*, Physik in unserer Zeit. 2/2018 (49), p. 74-78.
- [2] **Dorn Bader**, *The Theory of Sound*, chapt. XVI (1896), 1896, Dover reprint N.Y 1945.
- [3] **H. Helmholtz**, *Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden*, Journal für reine und angewandte Mathematik, 57 (1859), p. 1-72;  
[www.digizeitschriften.de/dms/img/?PID=GDZPPN002150735&physid=phys12#navi](http://www.digizeitschriften.de/dms/img/?PID=GDZPPN002150735&physid=phys12#navi).
- [4] **J.W. Strutt, Baron Rayleigh**, *The Theory of Sound*, chapt. XVI (1896), 1896, Dover reprint N.Y 1945.
- [5] **N. H. Fletcher und Th. D. Rossing**, *The Physics of Musical Instruments*, Springer New York etc. (1993).
- [6] **H. Levine und J. Schwinger**, *On the Radiation of Sound from an Unflanged Circular Pipe*. Phys. Rev. 73, 383, (1948).
- [7] **M. G. Wertheim**, *Memoire sur les vibrations sonores de l'air*, Annales de Chimie et de Physique, tome 31 (1851), p. 385-432
- [8] **G. Sondhauss**, *Ueber den Brummkreisler und das Schwingungsgesetz der kubischen Pfeifen*, Poggendorfs Annalen Bd. 81 (1850), p. 235- 257; p. 347-373.