Wahlpflichtstation D

Herleitung der Hohmann-Transfer-Gleichungen

Um einen Hohmann-Transfer realisieren zu können, müssen die Formeln für die beiden Geschwindigkeitsänderungen (zu Beginn und am Ende der halben Hohmann-Ellipse) bekannt sein. Sie haben diese ja bereits kennen gelernt:

(1)
$$\Delta v_e = v_e \left(\sqrt{\frac{2r_a}{r_e + r_a}} - 1 \right),$$
$$\Delta v_a = v_a \left(1 - \sqrt{\frac{2r_e}{r_a + r_e}} \right)$$

Wie aber kommen diese Gleichungen zustande? Im Rahmen dieser Wahlpflichtstation sollen Sie diese beiden zentralen Gleichungen herleiten. Das geschieht in drei Schritten (A, B, C).

A:

Die Formel für die Gesamtenergie eines Körpers, der sich auf einer Kreisbahn um einen Zentralkörper bewegt, ist Ihnen bekannt:

(2) $E_{ges} = - \frac{1}{2}\, G\, m\, M / r$ (Kreisbahn)

Diese Energiebeziehung gilt nicht nur für Kreisbahnen, sondern auch für Ellipsenbahnen. Dann muss in der Formel das r durch die große Halbachse a ersetzen werden:

(3) $E_{ges} = - \frac{1}{2}\, G\, m\, M / a$ (Ellipsenbahn)

- Die Herleitung dieser Formel ist nicht ganz leicht, so dass es reicht, wenn Sie diese mit Hilfe des beiliegenden Blattes nachvollziehen. Versuchen Sie dabei wirklich jeden Schritt zu verstehen.

B:

Egal, in welchem Abstand r vom Erdmittelpunkt sich ein Raumfahrzeug nun auf seiner Ellipsenbahn um die Erde befindet, seine Gesamtenergie ist an jeder Stelle gleich groß (jedenfalls solange es seine Triebwerke nicht benutzt). Dabei teilt sich die Gesamtenergie an unterschiedlichen Orten auf der Ellipse allerdings unterschiedlich in einen kinetischen und einen potentiellen Anteil auf.

- An welcher Stelle ist die potentielle bzw. die kinetische Energie am größten bzw. am kleinsten?
- Leiten Sie die folgende Formel (genannt Vis-Viva-Gleichung) her, die für jeden beliebigen Abstand r eines Körpers vom Brennpunkt auf einer Ellipsenbahn mit der großen Halbachse a seine Geschwindigkeit v angibt:

(4)
$$\boxed{v = \sqrt{2GM \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a} \right)}}$$

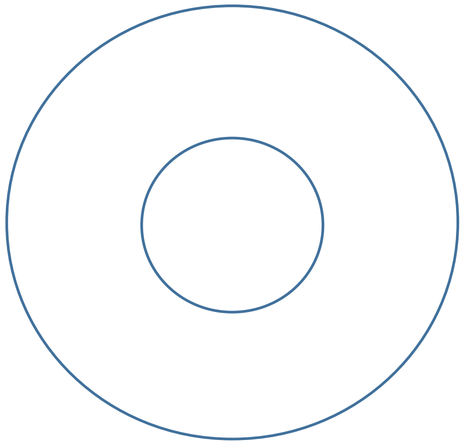
Tipp: Berechnen Sie die Gesamtenergie für einen der beiden ausgezeichneten Bahnpunkte der Ellipse.

- Funktioniert die Gleichung auch für Kreisbahnen und wie lautet sie dann?

C:

Jetzt lassen sich die beiden Geschwindigkeitsänderungen berechnen.

- In dieser Skizze sehen Sie die innere, erdnahe Kreisbahn (r_e) und die äußere, kreisförmige Zielbahn (r_a). Zeichnen Sie die halbe Ellipse des Hohmann-Transfers ein und beschriften Sie Apogäum und Perigäum dieser Bahn.



Kümmern wir uns zunächst um den *Einstieg* in die Hohmann-Ellipse. Gesucht ist der Geschwindigkeitskick zu Beginn des Hohmann-Transfers: Δv_e.
Δv_e ist die Differenz zwischen der größeren Geschwindigkeit direkt nach dem ersten Kick auf der in diesem Moment entstandenen Homann-Ellipse (v_H) und der Geschwindigkeit, die der Raumflugkörper bereits auf der kleinen Kreisbahn hatte (v_e).

(5) $\Delta v_e = v_H - v_e$

- Stellen Sie zunächst eine Formel für jede der beiden Geschwindigkeiten auf. Dabei hilft Ihnen die Vis-Viva-Gleichung.

(6) v_e = ………………………………………………………………….

(7) v_H = ………………………………………………………………….

- Die große Halbachse a_H der Hohmann-Ellipse in Gleichung (6) kann man nun in Abhängigkeit von r_a und r_e ausdrücken. Dabei hilft Ihnen Ihre Skizze: a_H = …………..…

Nun haben wir auch für v_H eine Gleichung, in der nur r_a und r_e vorkommen:

(8) v_H = ……………………………………………………………..……

- Indem Sie die Gleichungen (6) und (8) in Gleichung (5) einsetzen, erhalten Sie die Ihnen bereits bekannte Formel für die Geschwindigkeitsdifferenz beim Einstieg in die Hohmann-Ellipse. Achtung: Hier sind einige Termumformungen nötig. Da Sie das Ergebnis aber kennen, sollten diese gelingen. Fragen Sie im Zweifelsfalle Ihre Lehrkraft.

- Die Formel für den Geschwindigkeitskick beim *Austritt* aus der Hohmann-Ellipse können Sie nun selbstständig (analog) herleiten.

- Falls Sie Hinweise oder Tipps benötigen, schauen Sie sich dieses Video an:
https://youtu.be/qC5oq7nzpuE
Im Video handelt es sich bei μ um den sogenannten Gravitationsparameter, eine Abkürzung für das Produkt aus Gravitationskonstante und Masse des Zentralkörpers: $\mu = G * M$.

Wahlpflichtstation E

Weitere Phasen bei „Orbital Rendezvous"

Die zweite Phase einer R&D-Mission, das Phasing, haben Sie ja bereits kennengelernt. Im Rahmen der vorliegenden Wahl-Pflichtstation haben Sie nun die Gelegenheit, sich auch mit den anderen Phasen auseinanderzusetzen. Dazu dient Ihnen das Kapitel 8.6 (Orbital Rendezvous) des Lehrbuchs „Astronautics", das der deutsche Astronaut Ulrich Walter verfasst hat, der sich 1993 für 10 Tage in der Raumfähre Columbia im Orbit befand. Das Verständnis der Ausführungen wird zum einen dadurch erschwert, dass das Werk auf Englisch und zum anderen nicht für Schüler(innen) sondern für Studierende der Luft- und Raumfahrttechnik verfasst wurde. Verstehen Sie bitte beides als Herausforderung und lassen Sie sich nicht einschüchtern!

Suchen Sie sich nun eine der 6 Phasen aus und studieren Sie das entsprechende Kapitel im beiliegenden Text. Versuchen Sie so viel wie möglich zu verstehen und formulieren Sie das, was Sie nicht verstehen, möglichst exakt in einer Frage. Ihr(e) Lehrer(in) wird Ihnen dann sicherlich weiterhelfen.

Wahlpflichtstation F

Missionen zum Mars per Hohmann-Transfers

Mit Hohmann-Transfers lassen sich energetisch günstige Übergänge zwischen zwei Bahnen um einen dominierenden Himmelskörper realisieren. Für kreisförmige Ausgangs- und Zielbahnen mit einem Radiusverhältnis unter 12 ist er sogar der energetisch günstigste, bei dem man also die geringste Treibstoffmenge mitführen muss. Warum also nicht eine auf einem Hohmann-Transfer basierende Mission zum Mars planen?

- Starten Sie die Simulationssoftware „marsflug.exe", lesen Sie sich unter „Info" den Text „Wie kommt man zum Mars und wieder zurück?" durch und realisieren Sie mit Hilfe der Software unterschiedliche Marsmissionen.
- „Spielen" Sie mit den einzustellenden Parametern und überlegen Sie, wann die Mission gelingt, wann sie scheitert und warum.