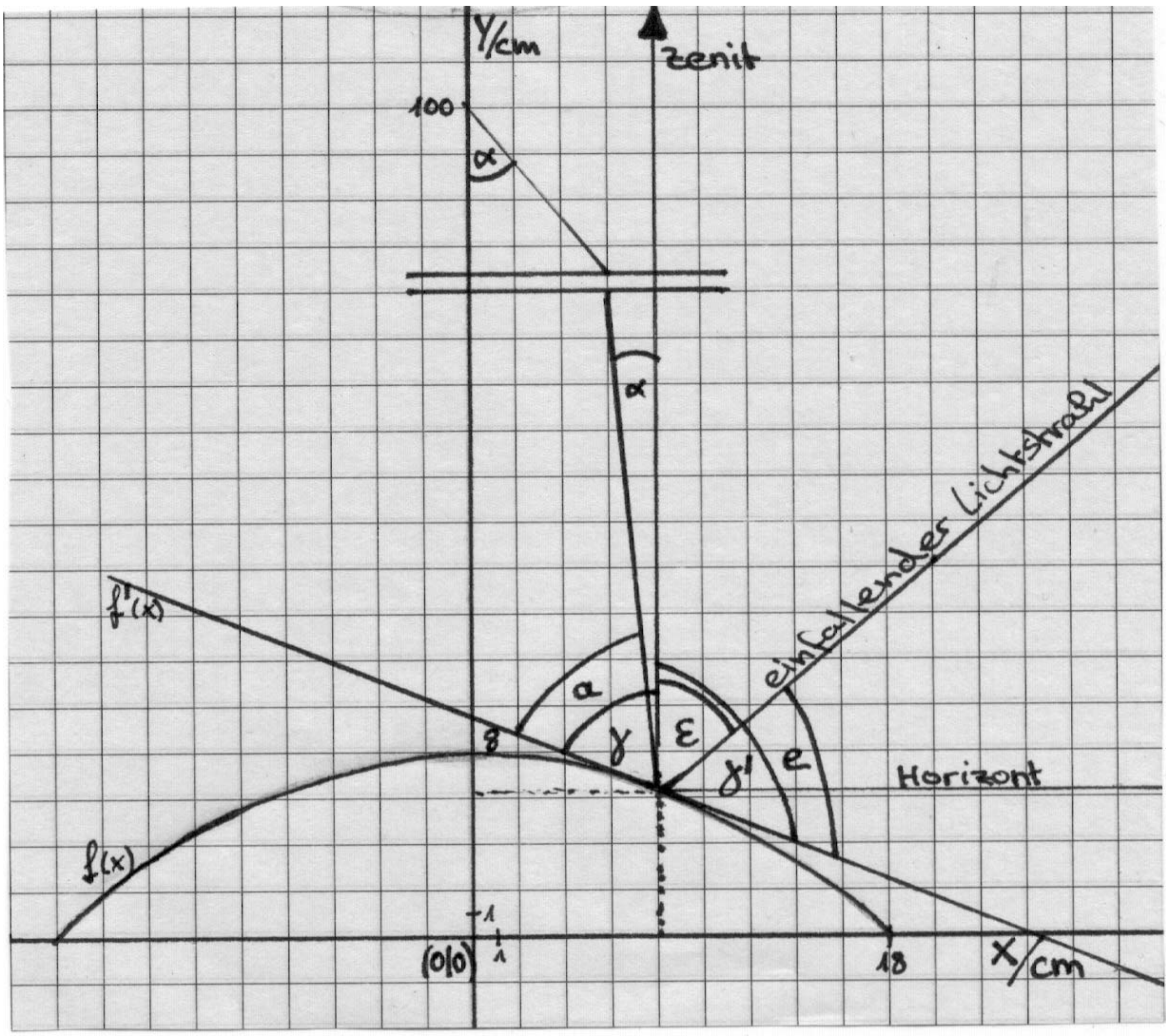
# Lösungen

## Aufgabe 1

a) Da die Kamera einen Parabolspiegel fotografiert, folgt der mittlere Querschnitt des Spiegels einer quadratischen Funktion der Form $f(x) = ax^2 + bx + c$ und, weil man den Scheitelpunkt der Funktion geschickter Weise auf die y-Achse setzen kann: $f(x) = ax^2 + c$.
Es sind die drei Punkte (-18|0) (0|8) und (18|0) bekannt. Daraus folgt die Funktionsgleichung $f(x) = -\frac{2}{81}x^2 + 8$

b) $f'(x) = -\frac{4}{81}x$

c) d)



e) $\tan\alpha = \frac{x}{100 - f(x)}$ oder $\alpha = \arctan\frac{x}{100 - f(x)}$

f) $e = a = \gamma - \alpha$

$e = a = 90° - \arctan f'(x) - \arctan\frac{x}{100 - f(x)}$

g) $\varepsilon = \gamma' - e$

$\varepsilon = 90° + \arctan f'(x) - (90° - \arctan f'(x) - \arctan\frac{x}{100 - f(x)})$

$\varepsilon = 2 \cdot \arctan f'(x) + \arctan\frac{x}{100 - f(x)}$

Weil sich auch für x > 0 positive Winkel ergeben müssen um die Summanden jeweils Betragsstriche:

Zenitdistanz: $$\boxed{\varepsilon = \left|2 \cdot \arctan(-\frac{4}{81} \cdot x)\right| + \left|\arctan\frac{x}{100 + \frac{2}{81} \cdot x^2 - 8}\right|}$$

h) Der Azimut des Anfangspunktes beträgt etwa: $Az_A \approx 360° - 23° = 337°$

Der Azimut des Endpunktes beträgt etwa: $Az_E \approx 360° - 9° = 351°$

$x_A \approx 0{,}69 \cdot 18\text{cm} \approx 12{,}4\text{cm}$

$x_E \approx 0{,}87 \cdot 18\text{cm} \approx 15{,}68\text{cm}$

Aus $x_A$ und $x_E$ lassen sich mit der Formel aus g) die Zenitdistanzen berechnen zu:

$\varepsilon_A \approx 70°$ und

$\varepsilon_E \approx 84{,}7°$.

## Aufgabe 2

a) Aus dem Seiten-Cosinus-Satz der sphärischen Trigonometrie folgt:

$$\cos(90°-\delta)=\cos(90°-\varphi)\cdot\cos\varepsilon+\sin(90°-\varphi)\cdot\sin\varepsilon\cdot\cos(180°-Az)$$

oder: $\sin\delta=\sin\varphi\cdot\cos\varepsilon+\cos\varphi\cdot\sin\varepsilon\cdot\cos(180°-Az)$.

In dem konkreten Beispiel heißt das:

$$\sin\delta_A=\sin 48,75°\cdot\cos 65,84°+\cos 48,75°\cdot\sin 65,84°\cdot\cos(180°-335,34°)=-0,239$$

$$\delta_A=\arcsin(-0,239)=-13,83°$$

$$\sin\delta_E=\sin 48,75°\cdot\cos 84,21°+\cos 48,75°\cdot\sin 84,21°\cdot\cos(180°-350,91°)=-0,57$$

$$\delta_E=\arcsin(-0,57)=-34,89°$$

b) Der Stundenwinkel lässt sich danach berechnen durch:

$$\cos\varepsilon=\cos(90°-\varphi)\cdot\cos(90°-\delta)+\sin(90°-\varphi)\cdot\sin(90°-\delta)\cdot\cos t$$

Oder: $\cos\varepsilon=\sin\varphi\cdot\sin\delta+\cos\varphi\cdot\cos\delta\cdot\cos t$

Daraus folgt: $\cos t=\dfrac{\cos\varepsilon-\sin\varphi\cdot\sin\delta}{\cos\varphi\cdot\cos\delta}$

Das heißt wiederum im konkreten Beispiel für $t_A$ und $t_E$:

$$\cos t_A=\frac{\cos 65,84°-\sin 48,75°\cdot\sin(-13,83)°}{\cos 48,75°\cdot\cos(-13,83)°}=0,92$$

$$t_A=\mathrm{ar}\cos(0,92)=\pm 23,09°$$

$$\cos t_E=\frac{\cos 84,21°-\sin 48,75°\cdot\sin(-34,89)°}{\cos 48,75°\cdot\cos(-34,89)°}=0,982$$

$$t_E=\mathrm{ar}\cos(0,982)=\pm 11,02°$$

c) $\alpha=\Theta-t'$

$$\alpha=\Theta-t\cdot\frac{1}{15}=10,0367h-t\cdot\frac{1h}{15°}$$

Für $\alpha_A$ und $\alpha_B$ heißt das:

$$\alpha_A=10,0367h-(-23,09°)\cdot\frac{1h}{15°}=11,576h=11h34m34s=173,6°$$

$$\alpha_E=10,0367h-(-11,02°)\cdot\frac{1h}{15°}=10,7714h=10h46m17s=161,6°$$

**Aufgabe 3**

a) $r_{\text{Tuifstädt}} \approx 6366{,}1\text{km}$

b) $$\vec{p} = \begin{pmatrix} (r_p + h_p) \cdot \cos\varphi'_p \cdot \cos\zeta_p \\ (r_p + h_p) \cdot \cos\varphi'_p \cdot \sin\zeta_p \\ (r_p + h_p) \cdot \sin\varphi'_p \end{pmatrix}$$

Das P steht für einen beliebigen Punkt auf der Erdoberfläche.

c) $$\vec{\mathrm{p}} = \begin{pmatrix} (6366{,}1 + 0{,}510) \cdot \cos 48{,}75 \cdot \cos 150{,}55 \\ (6366{,}1 + 0{,}510) \cdot \cos 48{,}75 \cdot \sin 150{,}55 \\ (6366{,}1 + 0{,}510) \cdot \sin 48{,}75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3655{,}38 \\ 2063{,}91 \\ 4786{,}67 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 4**

a) $$E_K: \vec{x} = \begin{pmatrix} (r_K + h_K)\cdot\cos\varphi'_K\cdot\cos\varsigma_K \\ (r_K + h_K)\cdot\cos\varphi'_K\cdot\sin\varsigma_K \\ (r_K + h_K)\cdot\sin\varphi'_K \end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix} \cos\alpha_A\cdot\cos\delta_A \\ \sin\alpha_A\cdot\cos\delta_A \\ \sin\delta_A \end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix} \cos\alpha_E\cdot\cos\delta_E \\ \sin\alpha_E\cdot\cos\delta_E \\ \sin\delta_E \end{pmatrix}$$

Dabei steht K für „Kamera“, A für „Anfang der Spur“ und E für „Ende der Spur“

b) $$E_K: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3655,38 \\ 2063,91 \\ 4786,67 \end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix} \cos 173,6°\cdot\cos(-13,83°) \\ \sin 173,6°\cdot\cos(-13,83°) \\ \sin(-13,83°) \end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix} \cos 161,6°\cdot\cos(-34,89°) \\ \sin 161,6°\cdot\cos(-34,89°) \\ \sin(-34,89°) \end{pmatrix}$$

$$E_K: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3655,38 \\ 2063,91 \\ 4786,67 \end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix} -0,965 \\ 0,1082 \\ -0,239 \end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix} -0,7783 \\ 0,2589 \\ -0,572 \end{pmatrix}$$

c) $$\begin{pmatrix} -0,965 \\ 0,1082 \\ -0,239 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -0,7783 \\ 0,2589 \\ -0,572 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,33\cdot 10^{-5} \\ -0,366 \\ -0,1656 \end{pmatrix}$$

$$-1,33\cdot 10^{-5}x - 0,366y - 0,1656z = -1548,015$$

d) Die Koordinatenformen der beiden Ebenen aus den Werten der Kamerastationen Streiheim und Tuifstädt bilden ein Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und drei Unbekannten:

$$\left| \begin{array}{l} -0,0104x - 0,4364y - 0,2258z = -1940,03 \\ -1,33\cdot 10^{-5}x - 0,366y - 0,1656z = -1548,015 \end{array} \right|$$

$$x = 9076,796 - 2,73\sigma$$
$$y = 4229,219 - 0,452\sigma$$
$$z = \sigma$$

Daraus folgt die Schnittgerade:

$$\vec{g} = \begin{pmatrix} 9076,796 \\ 4229,219 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma\begin{pmatrix} -2,73 \\ -0,452 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e) $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ mit $r = r_{Erde} + 15\text{km}$

Durch Einsetzen folgt:

$$(6366\text{km} + 15\text{km})^2 = (9076,796 - 2,73\sigma)^2 + (4229,219 - 0,452\sigma)^2 + \sigma^2$$
$$0 = 8,657\sigma^2 - 53382,52\sigma + 59557357,98$$

$$\sigma_1 = 4703,67$$
$$\sigma_2 = 1462,584$$

Durch Einsetzen von $\sigma$ in $\vec{g}$ erhalten wir die beiden Schnittpunkte der Geraden mit der Kugel:

$$Q_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 9076,796 \\ 4229,219 \\ 0 \end{pmatrix} + 4703,67 \begin{pmatrix} -2,73 \\ -0,452 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3764,22 \\ 2103,16 \\ 4703,67 \end{pmatrix}$$

Oder:

$$Q_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 9076,796 \\ 4229,219 \\ 0 \end{pmatrix} + 1462,584 \begin{pmatrix} -2,73 \\ -0,452 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5083,94 \\ 3568,13 \\ 1462,584 \end{pmatrix}$$

$Q_1$ ist der gesuchte Punkt, weil dessen Koordinaten denen der Kamerastationen ähnlich sind und damit auf der richtigen Seite der Erdkugel liegen.

f) $$\overrightarrow{MQ} = \rho \begin{pmatrix} -3764,22 \\ 2103,16 \\ 4703,67 \end{pmatrix}$$

Durch Einsetzten von $\overrightarrow{MQ}$ in $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ mit $r = r_{Erde}$ erhalten wir den Submeteorpunkt auf dem Erdboden:

$$6366^2 = (-3764,22\rho)^2 + (2103,16\rho)^2 + (4703,67\rho)^2$$

$$\rho_1 = -0,9976$$
$$\rho_2 = 0,9976$$

Man kann sofort sehen, dass $\rho_2$ der gesuchte Wert ist, weil dieser $\overrightarrow{MQ}$ nur leicht verändert, während $\rho_1$ alle Vorzeichen vertauschen würde. So er gibt sich S:

$$S : \vec{x} = 0,9976 \begin{pmatrix} -3764,22 \\ 2103,16 \\ 4703,67 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3755,19 \\ 2098,11 \\ 4692,38 \end{pmatrix}$$

g) S hat wie jeder Punkt P auf der Erde die Koordinaten $\vec{p} = \begin{pmatrix} (r_p + h_p) \cdot \cos\varphi'_p \cdot \cos\zeta_p \\ (r_p + h_p) \cdot \cos\varphi'_p \cdot \sin\zeta_p \\ (r_p + h_p) \cdot \sin\varphi'_p \end{pmatrix}$.

$(r_p + h_p)$ ist hier der in f) vorausgesetzte Erdradius (6366km).

$$\begin{pmatrix} -3755{,}19 \\ 2098{,}11 \\ 4692{,}38 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (6366) \cdot \cos\varphi' \cdot \cos\zeta \\ (6366) \cdot \cos\varphi' \cdot \sin\zeta \\ (6366) \cdot \sin\varphi' \end{pmatrix}$$

Daraus folgt für die geographische Breite:

$$\varphi' = \arcsin\frac{4692{,}38}{6366} = 47{,}485°$$

Und für lokale Sternzeit:

$$\zeta = \arccos(\frac{-3755{,}19}{6366 \cdot \cos 47{,}485}) = 150{,}796° = 10{,}05306\text{h} = 10\text{h}03\text{m}11\text{s}$$

Die geographische Länge L lässt sich dann berechnen als

$$L = (\zeta - \text{GMST}) \cdot \frac{360°}{23{,}93447\text{h}}$$ mit GMST=Greenwich Mean Star Time

$$L = (10{,}05306 - 9{,}33451) \cdot \frac{360°}{23{,}93447\text{h}} = 10{,}80777°$$

Der Punkt bei 47,485° nördlicher Breite und 10,80777° östlicher Länge liegt am Plansee in Nordtirol und nur etwa 10km entfernt vom Schloss Neuschwanstein, nach dem der Meteorit benannt wurde.