wissenschaft in die schulen!

Elementare mathematische Grundlagen für die Behandlung der Gravitationsumlenkung als kombiniertes Zweikörperproblem

Zusatzinfo zum SuW-Beitrag über Swing-by Manöver von Donald Wiss

Der **Energiesatz** (1. Keplersches Gesetz) sagt aus, dass die Summe aus kinetischer und potenzieller Energie einer Raumsonde konstant bleibt, wenn diese sich auf einer Umlaufbahn um einen Zentralkörper bewegt. Pro Masseneinheit gilt dann:

$$\frac{\upsilon^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a} = E \quad \text{oder mit} \quad u^2 = \frac{\mu}{r} : \; 2E = \upsilon^2 - 2u^2 = -u^2\left(\frac{r}{a}\right) \quad \text{bzw.} \quad \left(\frac{\upsilon}{u}\right)^2 = 2 - \frac{r}{a}$$

Dabei bedeutet $\mu = G\,M$ das Produkt aus Gravitationskonstante und Masse des Zentralkörpers, υ die Geschwindigkeit und r der Abstand vom Zentralkörper. u stellt die Kreisbahngeschwindigkeit beim Radius r dar. E ist das Energieniveau der Umlaufbahn. Es ist nur abhängig von der großen Halbachse a der Bahn, nicht aber von deren Exzentrizität. E ist negativ und a positiv für alle Ellipsenbahnen. Bei den Hyperbelbahnen ist E positiv und a negativ. Für die Parabelbahnen gilt $E = 0$ und $a = \infty$.

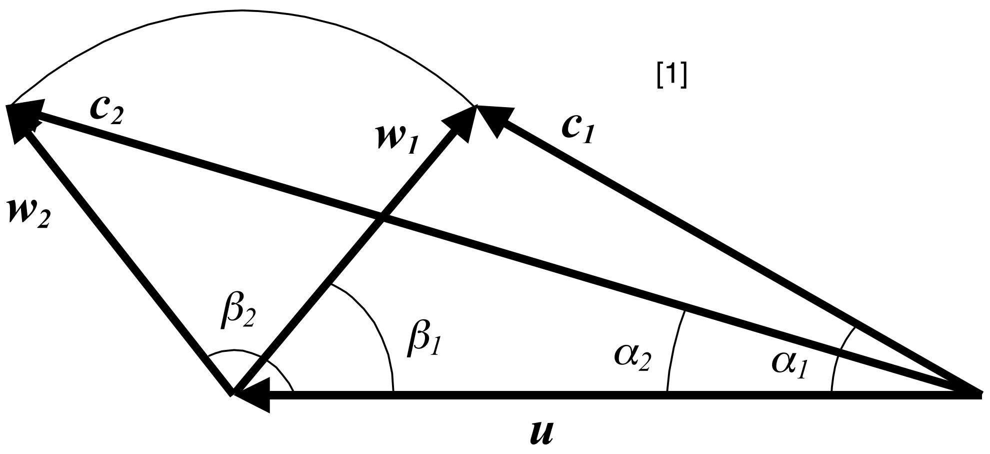
Die **Erhaltung des Drehimpulses** (2. Keplersches Gesetz, auch Flächensatz genannt) bewirkt, dass das Produkt aus Abstand r und Zirkularkomponente υ_z der Geschwindigkeit konstant bleibt.

$$\frac{1}{2} r \upsilon_z = \frac{F}{T} = \frac{\pi\, a\, b}{2\pi\sqrt{a^3/\mu}} = \frac{b}{2}\sqrt{\frac{\mu}{a}} \qquad \text{Daraus folgt:} \quad \frac{\upsilon_z}{u} = \frac{b}{a}\sqrt{\frac{a}{r}}$$

F ist der Flächeninhalt der Bahnellipse und b ihre kleine Halbachse.

Der Ausdruck für die Umlaufzeit $T \propto a^{\frac{3}{2}}$ ergibt sich aus dem 3. Keplerschen Gesetz. Die Geschwindigkeit υ wird im Folgenden entweder mit c oder w bezeichnet, je nachdem ob der Zentralkörper die Sonne oder ein Planet ist.

Die wichtigsten Geschwindigkeitsvektoren stellen ein Dreiecksystem dar, in welchem die folgenden **geometrischen Zusammenhänge** gültig sind:



u ist die Geschwindigkeit des Planeten auf seiner kreisförmig angenommenen Umlaufbahn. Die mit ***c*** bezeichneten Geschwindigkeiten werden von der Sonne aus betrachtet, die mit ***w*** bezeichneten vom bewegten Planeten aus. α ist der Winkel zwischen den Geschwindigkeiten ***u*** und ***c***, β derjenige zwischen ***u*** und ***w***.
Die beiden Geschwindigkeitsdreiecke ($u\ c_1\ w_1$) und ($u\ c_2\ w_2$) haben zwar die gemeinsame Basis u, liegen aber nur in der selben Ebene, wenn dies auch für die Bahnen von Planet und Raumsonde zutrifft.

Die Komponente von c in Richtung der Planetenbewegung u beträgt in jedem Falle:

$$c_u = c\cos\alpha$$

Der Cosinussatz liefert die folgenden Beziehungen:

$$w^2 = u^2 + c^2 - 2\,u\,c\cos\alpha \quad \text{oder} \quad \left(\frac{w}{u}\right)^2 = 1 + \left(\frac{c}{u}\right)^2 - 2\frac{c_u}{u}$$

$$c^2 = u^2 + w^2 - 2\,u\,w\cos\beta \quad \text{oder} \quad \left(\frac{c}{u}\right)^2 = 1 + \left(\frac{w}{u}\right)^2 - 2\left(\frac{w}{u}\right)\cos\beta$$

Die Indices *1* und *2* beziehen sich auf die Bewegung der Raumsonde vor bzw. nach dem Flyby. Wegen der Bahnsymmetrie und auf Grund der Energieerhaltung gegenüber dem Planeten gilt $w_1 = w_2$, d.h. die Relativgeschwindigkeiten weit weg vom Planeten sind vor und nach dem Vorbeiflug gleich.

Die **Energiedifferenz** zwischen der 1. und 2. elliptischen Sonnenumlaufbahn ergibt sich aus dem Energiesatz:

$$E_1 = \frac{c_1^2}{2} - u^2 = -\frac{u^2}{2}\left(\frac{r}{a_1}\right) \qquad E_2 = \frac{c_2^2}{2} - u^2 = -\frac{u^2}{2}\left(\frac{r}{a_2}\right)$$

$$\Delta E = E_2 - E_1 = \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} = \frac{u^2}{2}\left(\frac{r}{a_1} - \frac{r}{a_2}\right)$$

Andererseits gilt ja $\displaystyle \frac{w_1^2}{2} = \frac{w_2^2}{2} = \frac{u^2}{2} + \frac{c_1^2}{2} - u\,c_{u1} = \frac{u^2}{2} + \frac{c_2^2}{2} - u\,c_{u2}$

woraus sich ergibt: $\displaystyle \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} = u(c_{u2} - c_{u1}) = u\,\Delta c_u = \Delta E$

Die Energiedifferenz ΔE der Sonnenumlaufbahnen vor und nach der Gravitationsumlenkung ist also gleich der Planetenumlaufgeschwindigkeit u mal der Differenz Δc_u der Projektionen der Sondengeschwindigkeiten c_1 und c_2 auf u.

Durch Gleichsetzen der Ausdrücke für ΔE folgt der Zusammenhang:

$$\frac{\Delta c_u}{u} = \frac{1}{2}\left(\frac{r}{a_1} - \frac{r}{a_2}\right)$$

Falls die Ebene einer Sondenbahn gegenüber derjenigen des Planeten **um den Winkel *i* geneigt** ist, zieht man mit Vorteil den Winkel ρ zwischen dem Radiusvektor ***r*** und der Sondengeschwindigkeit ***c*** bei. Der Vektor ***r*** bildet ja die Schnittgerade zwischen den beiden Bahnebenen und die in der Sondenbahnebene liegende Zirkularkomponente beträgt: $c_z = c \sin\rho$

Zwischen dieser und der Projektion c_u auf die Planetengeschwindigkeit u besteht folgende einfache Beziehung:

$$\frac{c_u}{c_z} = \cos i = \frac{\cos\alpha}{\sin\rho}$$

Damit kann der Vektor $\boldsymbol{c}$ in drei orthogonale Komponenten zerlegt werden, nämlich radial, u-Richtung und senkrecht zur Planetenebene:

$$\vec{c} = (c_r, c_u, c_n) = (c\cos\rho, c\sin\rho\cos i, c\sin\rho\sin i)$$

Wegen $\vec{w} = \vec{c} - \vec{u}$ gilt: $\vec{w} = (c_r, c_u - u, c_n)$

Der von der Sonne aus gesehene **Umlenkwinkel γ** ist der Schnittwinkel zwischen den beiden Sonnenumlaufbahnen der Raumsonde vor und nach dem Flyby, d.h. der Winkel zwischen den Geschwindigkeitsvektoren $\boldsymbol{c_1}$ und $\boldsymbol{c_2}$. Er berechnet sich aus dem Skalarprodukt $(\vec{c}_1 \quad \vec{c}_2)$ dieser beiden Vektoren:

$$\cos\gamma = \frac{\vec{c}_1 \quad \vec{c}_2}{|c_1\, c_2|} = \cos\rho_1 \cos\rho_2 + \sin\rho_1 \sin\rho_2 \cos(i_2 - i_1)$$

Vom Planeten aus betrachtet ist der **Umlenkwinkel δ** zwischen den Vektoren $\boldsymbol{w_1}$ und $\boldsymbol{w_2}$ gleich dem entsprechenden Winkel zwischen den Asymptoten der Hyperbelbahn um den Planeten. Aus dem Cosinussatz folgt:

$$|\vec{c}_2 - \vec{c}_1|^2 = c_1^2 + c_2^2 - 2 c_1 c_2 \cos\gamma = |\vec{w}_2 - \vec{w}_1|^2 = 2 w_1^2 (1 - \cos\delta)$$

$$\cos\delta = 1 - \frac{|\vec{c}_2 - \vec{c}_1|^2}{2 w_1^2}$$

Am häufigsten tritt wohl der Fall auf, wo die Bahnen von Sonde und Planet und damit **beide Geschwindigkeitsdreiecke praktisch in einer Ebene** liegen (~Ekliptik). Dadurch vereinfachen sich verschiedene Formeln wesentlich:

$$\cos i \cong 1\,,\ c_z \cong c_u\,,\ c_n \cong 0\,,\ \alpha \cong 90^o - \rho\,,\ \gamma \cong |\rho_2 - \rho_1| \cong |\alpha_2 - \alpha_1|\,,\ \delta \cong |\beta_2 - \beta_1|$$

Im speziellen Grenzfall, wo eine **Sondenbahn praktisch senkrecht auf der Planetenebene** steht, d.h. $i \cong 90^o$, gilt andererseits:

$$\cos i \cong 0\,,\ c_u \cong 0\,,\ c_z \cong c_n \cong c\sin\rho\,,\ \alpha \cong 90^o\,,\ w^2 \cong c^2 + u^2$$

Bei bekanntem w sind hier weder c noch a frei wählbar, sondern es ergeben sich:

$$\frac{c}{u} = \sqrt{\left(\frac{w}{u}\right)^2 - 1} \qquad \text{und} \qquad \frac{r}{a} = 2 - \left(\frac{c}{u}\right)^2 = 3 - \left(\frac{w}{u}\right)^2$$

Ist der **Planet der Zentralkörper**, so stellt der Wert $w_1 = w_2$ den relativen Geschwindigkeitsbetrag der Raumsonde in großer Entfernung vom Planeten dar, also etwa am Rande seiner Einflusssphäre (Abstand $r_p \to \infty$).

Hier lautet der Energiesatz:

$$\frac{w_1^2}{2} - \frac{\mu_p}{r_p} = -\frac{\mu_p}{2a_h} \approx \frac{w_1^2}{2} - 0 = E_h \qquad \text{also:} \quad |a_h| = \frac{\mu_p}{w_1^2} = \frac{\mu_p/u^2}{(w_1/u)^2} = \frac{(m_p/m_s)r}{(w_1/u)^2}$$

μ_p = Gravitationskonstante × Planetenmasse

= $6.672 \cdot 10^{-20} \frac{km^3}{kg \cdot s^2}$ × Planetenmasse

a_h = „große" Halbachse der Hyperbel (negativer Abstand vom Perizentrum zum Asymptotenschnittpunkt)

m_p/m_s = Verhältnis von Planeten- und Sonnenmasse

r_p = Abstand der Raumsonde vom Planetenmittelpunkt

r = (mittlerer) Radius der Planetenbahn um die Sonne

Mit den Bahneigenschaften der Ellipse 1 sind w_1 und damit zwingend auch das Energieniveau E_h relativ zum Planeten sowie die Halbachse a_h der Hyperbelbahn festgelegt. Ihre Exzentrizität e (>1) hängt ab vom Umlenkwinkel δ zwischen den Geschwindigkeitsvektoren $\boldsymbol{w_1}$ und $\boldsymbol{w_2}$, d.h. vom entsprechenden Winkel zwischen den Asymptoten. Das Verhältnis der Höchstgeschwindigkeit w_{max} im Perizentrum zur Geschwindigkeit w_1 im Unendlichen sowie das Verhältnis des Minimalabstandes r_{p_min} (Planetenmittelpunkt - Perizentrum) zu $|a_h|$ sind einfache Funktionen von e.

$$e = \frac{1}{\sin(\delta/2)} \qquad \frac{w_{\max}}{w_1} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \qquad \frac{r_{p\_\min}}{|a_h|} = e - 1$$

Die direkte Beziehung zwischen Umlenkung δ und Minimalabstand r_{p_min} lautet also:

$$\frac{1}{\sin(\delta/2)} = 1 + \frac{r_{p\_\min}}{|a_h|}$$

Berechnungsablauf für eine Gravitationsumlenkung

1. Der umlenkende Planet

Zunächst kennt man vom Planeten, an dem der Swing-by stattfinden soll, den Bahnradius r um die Sonne und die Umlaufgeschwindigkeit u, welche im Folgenden als Bezugsgrößen dienen.

$$u = \sqrt{\frac{\mu_s}{r}} \;, \qquad \mu_s = \text{Gravitationskonstante} \times \text{Sonnenmasse} = 1.327 \cdot 10^{11} \frac{km^3}{s^2}$$

Ausserdem ist die Masse des Planeten bekannt.

2. Elliptische Sonnenumlaufbahn vor dem Flyby

Es wird davon ausgegangen, dass die sonnenbezogenen Bahndaten der Raumsonde mit dem Index *1* bekannt sind. Neben dem Bahnneigungswinkel i_1 gegenüber der Planetenebene sind noch mindestens zwei Angaben nötig, z.B. a_1 und b_1 (bzw. e_1) oder c_1 und ρ_1 beim Radius r.

Sind a_1 **und entweder** b_1 **oder** e_1 **bekannt**, also die beiden Halbachsen der Ellipse 1 oder aber ihre große Halbachse und die Exzentrizität, so werden berechnet:

$$\frac{c_1}{u} = \sqrt{2 - \frac{r}{a_1}}$$ aus dem Energiesatz,

$$\frac{c_{z1}}{u} = \frac{b_1/a_1}{\sqrt{r/a_1}} = \sqrt{\frac{1-e_1^2}{r/a_1}}$$ aus dem Flächensatz,

$$\rho_1 = \arcsin\left(\frac{c_{z1}/u}{c_1/u}\right)$$ gemäß Geometrie.

Falls c_1 **und** ρ_1 **beim Radius** r **bekannt** sind, d.h. Geschwindigkeit und Winkel ρ am Schnittpunkt mit der Planetenbahn, so rechnet man wie folgt:

$$\frac{r}{a_1} = 2 - \left(\frac{c_1}{u}\right)^2$$ aus dem Energiesatz,

$$\frac{c_{z1}}{u} = \frac{c_1}{u}\sin\rho_1$$ gemäß Geometrie,

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{c_{z1}}{u}\sqrt{\frac{r}{a_1}}$$ aus dem Flächensatz.

In beiden Fällen liefert die Geometrie schließlich noch:

$$\frac{c_{u1}}{u} = \frac{c_{z1}}{u}\cos i_1$$ und $$\alpha_1 = \arccos\left(\frac{c_{u1}/u}{c_1/u}\right)$$

$$\frac{w_1}{u} = \sqrt{1 + \left(\frac{c_1}{u}\right)^2 - 2\frac{c_{u1}}{u}}$$ und $$\beta_1 = \arccos\left(\frac{1-(c_{u1}/u)}{w_1/u}\right)$$

3. Elliptische Sonnenumlaufbahn nach dem Flyby

Das weitere Vorgehen hängt nun von den Bedingungen ab, die für die neue Flugbahn der Raumsonde einzuhalten sind.
Soll ein weiterer Planet angesteuert werden oder ist ein anderer Bahnneigungswinkel $i_2 \neq 90^o$ anzustreben, um z.B. einen Kometen zu erreichen, so ist neben i_2 am ehesten noch die große Halbachse a_2 der neuen Bahn vorgegeben.
An Stelle von a_2 **und** i_2 könnten aber auch neue Werte für Geschwindigkeit und Bahnwinkel, also c_2 **und** ρ_2 vorgeschrieben werden.
In beiden Fällen interessiert man sich für die Umlenkwinkel γ und δ, welche einzuhalten sind.

Zunächst gilt grundsätzlich: $$\frac{w_2}{u} = \frac{w_1}{u}$$

Ist also $i_2 \neq 90^o$ so folgt aus dem Energiesatz je nach Vorgabe sofort:

$$\frac{c_2}{u} = \sqrt{2 - \frac{r}{a_2}}$$ oder $$\frac{r}{a_2} = 2 - \left(\frac{c_2}{u}\right)^2$$

Falls aber die Bahnneigung i_2 gegenüber der Planetenebene gerade 90 Grad betragen soll, muss an Stelle von a_2 ohnehin der Winkel ρ_2 vorgegeben werden. Denn, wie oben erwähnt, sind dann c_2 und a_2 mit bekanntem w_2 automatisch festgelegt:

$$\frac{c_2}{u} = \sqrt{\left(\frac{w_2}{u}\right)^2 - 1} \qquad \text{und} \qquad \frac{r}{a_2} = 3 - \left(\frac{w_2}{u}\right)^2 = \frac{r}{a_1} + 2\frac{c_{u1}}{u} \qquad \text{für } i_2 = 90^o$$

Der Cosinussatz ergibt weiter:

$$\cos\alpha_2 = \frac{1 + (c_2/u)^2 - (w_2/u)^2}{2(c_2/u)} \qquad \text{und} \qquad \cos\beta_2 = \frac{1 + (w_2/u)^2 - (c_2/u)^2}{2(w_2/u)}$$

Dann folgt je nach Vorgabe:

$$\rho_2 = \arcsin\left(\frac{\cos\alpha_2}{\cos i_2}\right) \qquad \text{oder} \qquad i_2 = \arccos\left(\frac{\cos\alpha_2}{\sin\rho_2}\right)$$

Für jeden beliebigen Neigungswinkel i_2 lassen sich dann weiter berechnen:

$$\frac{c_{z2}}{u} = \frac{c_2}{u}\sin\rho_2 \qquad \frac{b_2}{a_2} = \frac{c_{z2}}{u}\sqrt{\frac{r}{a_2}} \qquad e_2 = \sqrt{1 - \left(\frac{b_2}{a_2}\right)^2}$$

$$\frac{c_{u2}}{u} = \frac{c_{z2}}{u}\cos(i_2) \qquad \alpha_2 = \arccos\left(\frac{c_{u2}/u}{c_2/u}\right) \qquad \beta_2 = \arccos\left(\frac{1 - (c_{u2}/u)}{w_2/u}\right)$$

Die Umlenkwinkel betragen schließlich

bezüglich der Sonne: $\gamma = \arccos\left[\cos\rho_1 \cos\rho_2 + \sin\rho_1 \sin\rho_2 \cos(i_2 - i_1)\right]$

bezüglich des Planeten: $\delta = \arccos\left(1 - \frac{c_1^2 + c_2^2 - 2c_1c_2\cos\gamma}{2w_1^2}\right)$

4. Planetenbezogene Hyperbelbahn der Raumsonde

Mit der bekannten Planetenmasse und der Anfluggeschwindigkeit w_1 lässt sich sofort der Wert $|a_h|$ ermitteln.

Damit die Umlenkung δ tatsächlich erreicht wird, muss die Sonde genau im dimensionslosen Minimalabstand

$$\frac{r_{\min}}{|a_h|} = \frac{r_{p\_\min}}{|a_h|} = \frac{1}{\sin(\delta/2)} - 1$$

am Planeten vorbeifliegen.

Von ihm aus gesehen muss die Anflugrichtung aus dem Unendlichen deshalb im effektiven Abstand

$$b_h = |a_h|\sqrt{e^2 - 1} = \frac{\mu_p / w_1^2}{\tan(\delta/2)}$$

parallel zur Kollisionsachse verlaufen. Dies ist nämlich die Entfernung der Hyperbelasymptoten vom Planetenmittelpunkt.

Von der Sonne aus betrachtet muss der theoretische Schnittpunkt der Sondenbahn (Ellipse 1) mit der Planetenbahn gerade um die Distanz

$$\Delta l = \frac{b_h}{\sin \beta_1}$$

vom Planetenzentrum entfernt sein, wenn die Sonde bei ihm eintrifft.

5. Tabellenkalkulation

In der Beilage befindet sich ein mit Microsoft Works programmiertes Anwendungsbeispiel.
Die in der Tabelle mit „INPUT" bezeichneten Werte sind Zahleneingaben aus Internetveröffentlichungen. Man beachte, dass die meisten Voyager-Trajektorien sogar relativ zur Sonne Hyperbelbahnen darstellen (negative Halbachsen a). Ferner ist festzustellen, dass die „effektiven Hyperbelbahnen um die Planeten" ziemlich gut mit den sonnenbezogenen „Sondenbahnen 2 (Wegflug)" korrespondieren. Man vergleiche dazu das berechnete e2 in Zeile 52 mit dem Eingabewert e1 in Zeile 12 des jeweils nachfolgenden Planeten der selben Mission. Hingegen weichen die aus der „Sondenbahn 1 (Anflug)" berechneten „theoretischen Hyperbelbahnen um die Planeten" doch beträchtlich von den effektiven ab. Dies deutet klar auf die Kurskorrekturen hin, die jeweils kurz vor den Planetenflybys vorgenommen wurden und Veränderungen der Relativgeschwindigkeit w_1 um einige Prozente zur Folge hatten (vgl. Zeile 29).

Wissenschaft in die Schulen - Bildquellen

[1]: Quelle unbekannt; Vektoraddition