

Lösung der Aufgabe

Man berechne die Entweichgeschwindigkeit sowie die mittlere kinetische Geschwindigkeit der Atmosphärenmoleküle für den Saturnmond Titan sowie für die Moleküle einer hypothetischen Atmosphäre des Erdmondes. Titan hat einen Durchmesser von 5150 km und eine mittlere Dichte von 1,94 t/m³. Für die hypothetische Mondatmosphäre wird eine Temperatur von ca. 20°C angenommen. Am Ort von Titan kann mit einer Temperatur von etwa -180°C gerechnet werden (abschätzbar aus der Verdünnung des Strahlungsflusses der Sonne). Es wird angenommen, dass für beide Atmosphären die Masse des Stickstoffmoleküls als repräsentativ gelten kann. Die Ergebnisse sind abschließend zu vergleichen und zu diskutieren.

Geg.: Gravitationskonstante	$\gamma = 6,6726 \cdot 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$
Boltzmannkonstante	$k = 1,3807 \cdot 10^{-23} \text{ Nm/K}$
mittlere Dichte Titan	$\rho_T = 1940 \text{ kg/m}^3$
Durchmesser Titan	$D_T = 5150 \cdot 10^3 \text{ m}$
Durchmesser Mond	$D_M = 3476 \cdot 10^3 \text{ m}$
Masse Mond	$M_M = 7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}$
Temperatur bei Titan	$t_T = -180^\circ\text{C}$
Temperatur beim Mond	$t_M = 20^\circ\text{C}$
relative Atommasse von Stickstoff	$M_{r,N} = 14,007$
atomare Masseneinheit	$m_u = 1,6605 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

Ges.: $v_T, \bar{v}_T, v_M, \bar{v}_M$

Lös.:

Die absoluten Temperaturen, die Titanmasse und die Molekülmasse von Stickstoff werden vorab berechnet.

$$T_T = 273,2 \text{ K} + t_T \cdot \frac{\text{K}}{^\circ\text{C}} \approx 273,2 \text{ K} - 180^\circ\text{C} \cdot \frac{\text{K}}{^\circ\text{C}} \approx 93 \text{ K},$$

$$T_M = 273,2 \text{ K} + t_M \cdot \frac{\text{K}}{^\circ\text{C}} \approx 273,2 \text{ K} + 20^\circ\text{C} \cdot \frac{\text{K}}{^\circ\text{C}} \approx 293 \text{ K},$$

$$M_T = \frac{4}{3} \pi \cdot R_T^3 \cdot \rho_T = \frac{4}{3} \pi \cdot (2575 \cdot 10^3 \text{ m})^3 \cdot 1940 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \approx 1,4 \cdot 10^{23} \text{ kg},$$

$$\mu_{N_2} = 2 \cdot M_{r,N} \cdot m_u = 2 \cdot 14,007 \cdot 1,6605 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \approx 4,65 \cdot 10^{-26} \text{ kg}.$$

Nun werden die Entweichgeschwindigkeit und mittlere kinetische Geschwindigkeit für den Titan und den Mond berechnet.

$$v_T = \sqrt{\frac{2 \cdot \gamma \cdot M_T}{R_T}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,6726 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot 1,4 \cdot 10^{23} \text{ kg}}{2575 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^2}} \approx 2694 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$\bar{v}_T = \sqrt{\frac{3 \cdot k \cdot T_T}{\mu_{N_2}}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 1,3807 \cdot 10^{-23} \text{ Nm} \cdot 93 \text{ K}}{4,65 \cdot 10^{-26} \text{ kg} \cdot \text{K}}} \approx 288 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_M = \sqrt{\frac{2 \cdot \gamma \cdot M_M}{R_M}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,6726 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot 7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}}{1738 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^2}} \approx 2376 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$\bar{v}_M = \sqrt{\frac{3 \cdot k \cdot T_M}{\mu}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 1,3807 \cdot 10^{-23} \text{ Nm} \cdot 293 \text{ K}}{4,65 \cdot 10^{-26} \text{ kg K}}} \approx 511 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Der Unterschied zwischen Entweichgeschwindigkeit und mittlerer kinetischer Geschwindigkeit ist für den Mond deutlich kleiner als für Titan. Auf dem Mond hätten etliche Gasteilchen eine höhere Geschwindigkeit als die mittlere kinetische Geschwindigkeit und würden so den Mond in kosmisch kurzer Zeit verlassen. Für Titan ist der Unterschied zwischen Entweichgeschwindigkeit und mittlerer kinetischer Geschwindigkeit deutlich größer. Er reicht aber allein nicht aus, um die Existenz der mächtigen Titanatmosphäre zu begründen. Die Aufgabe kann so nur als erste Abschätzung gelten. Andere Einflussfaktoren (z. B. Sonnenwind, Oberflächenaufheizung, Atmosphärendicke, Molekülnachlieferung,) sind zu bedenken.