Planeten- und Kometenbewegung im Modell vom Potentialtrichter

Die gegenständliche Darstellung des Gravitationspotentials (das Modell vom Potentialtrichter) erlaubt die dreidimensionale Betrachtung wie auch die Arbeit mit dem Modellexperiment. Wichtig ist die Übertragung des Modells auf die Natur, was im Folgenden für das Sonnensystem geschehen soll. Das Potentialtrichtermodell wird genutzt, indem man Kugeln, die Planeten oder Kometenkerne repräsentieren sollen, in einem frei wählbaren Abstand zum Zentrum, in dem man sich die Sonne vorstellen muss, mit frei wählbarer Geschwindigkeit losrollen lässt. Im Gegensatz zum Kosmos spielt die Reibung im Modell leider eine Rolle, was bei der Interpretation der Beobachtungen zu berücksichtigen ist. Zudem ist es wichtig, die mit zunehmender Bindung zunehmende Bahntiefe im Modell nicht mit der Realität zu identifizieren (Planetenumlauf etwa in einer Ebene).

Im Folgenden wird beschrieben, wie man mit Hilfe des Potentialtrichtermodells für das Beispiel der Himmelskörperbewegung im Gravitationsfeld der Sonne qualitativ einige Zusammenhänge der Thematik „Mechanische Energie der Himmelskörper" aufzeigen kann. Die Modellarbeit sollte damit beginnen, herauszuarbeiten, warum die den Potentialtrichter formende -1/*r*-Funktion (radialer Schnitt durch Fläche) die Wirkung des Gravitationsfeldes simuliert. Hierzu könnte das angebotene Arbeitsblatt (arbeitsblatt.pdf) bearbeitet werden (Ergebnisse unter erwartung.pdf).

Mechanische Energie und Bahnformen im Gravitationsfeld - 1. Keplersches Gesetz

Die Potentielle und die kinetische Energie eines Himmelskörpers im Gravitationsfeld der Sonne bekommen im Modell eine anschauliche Bedeutung. Insbesondere lässt sich der Zusammenhang zwischen den möglichen Werten der Summe beider Energien und den sich entsprechend ergebenden Bahnformen herstellen. Ausgangspunkt ist der Energieerhaltungssatz.

$$E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \frac{m}{2} \cdot v^2 - \gamma \cdot M \cdot m \cdot \left(\frac{1}{r}\right) = E = \text{konstant}$$

Es werden drei Fälle untersucht (siehe auch folgende Tabelle).

Beginnen sollte man damit, die Kugel von einem Startort im mittleren Bereich so schnell anzurollen, dass sie gerade auf der (vielleicht vorhandenen) waagerechten Umrandung des Potentialtrichters zu stehen kommt (was in Realität sicher nur andeutungsweise, mit Hilfe der Vorstellungskraft aber sehr gut gelingen wird). Es sei dazu erwähnt, dass sich die Oberfläche des Potentialtrichters theoretisch erst im Unendlichen an eine Ebene anschmiegt. Die auf dem (gedanklich unendlich weit entfernten) Rand ruhende Kugel hat ihre kinetische Energie völlig aufgebraucht um die Bindungsenergie (die negative potentielle Energie) zu kompensieren, d. h. die Bindung gerade aufzugeben. Formal ausgedrückt bedeutet dieser Fall

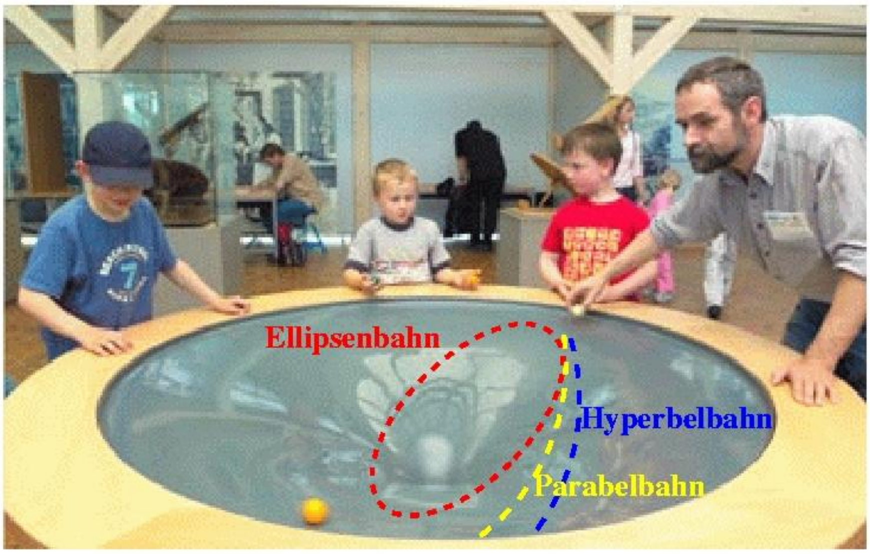
$$E_{\text{kin}} = -E_{\text{pot}} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{m}{2} \cdot v^2 = \gamma \cdot M \cdot m \cdot \left(\frac{1}{r}\right),$$

$$E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = E = 0.$$

Die Kugel läuft auf einer Parabel ins Unendliche.

Ausgehend von diesem Grenzfall können nun die beiden angrenzenden Fälle $E_{\text{kin}}>-E_{\text{pot}}$ und $E_{\text{kin}}<-E_{\text{pot}}$ betrachtet werden. Rollt man die Kugel vom anfangs gewählten Startort schneller ab ($E_{\text{kin}}>-E_{\text{pot}}$), so wird sie auf dem waagerechten Rand diesmal nicht zu stehen kommen (wieder eher gedanklich als praktisch). Es gilt $E>0$ und die Bahn der Kugel beschreibt eine ins Unendliche führende Hyperbel. Rollt man die Kugel langsamer ab ($E_{\text{kin}}<-E_{\text{pot}}$), bleibt sie an den Potentialtrichter gebunden, weil die kinetische Energie nicht ausreicht, die Bindungsenergie (die negative potentielle Energie) zu kompensieren. Diesmal gilt $E<0$ und die Kugel läuft auf einer Ellipse. Für den zuletzt genannten Fall gibt es eine untere Grenze. Für die Bahnellipse, für die der ständige Austausch zwischen kinetischer und potentieller Energie gerade zu Null wird, d. h. für den Grenzfall der Kreisbahn erhält man (siehe dazu auch virialsatz.pdf)

$$E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = E = -E_{\text{kin}}.$$

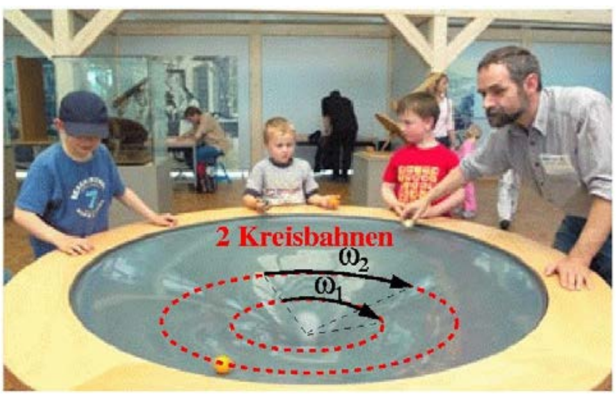
Energie	Bahnform	Modell
$E<0$, $E=-E_{kin}$ $E_{kin}=-0{,}5\cdot E_{pot}$ $E<0$ $E_{kin}<-E_{pot}$ $E=0$ $E_{kin}=-E_{pot}$ $E>0$ $E_{kin}>-E_{pot}$	Kreis Ellipse Parabel Hyperbel	 Mögliche Demonstration der Bahnformen im Gravitationsfeld am Potentialtrichtermodell im Technoseum in Mannheim. Hintergrundbild: ©: Hallo-Onlinejournal

2.+3. Keplersches Gesetz

Schon die nur angedeutete Bahnellipse der Kugel (die sich ja wegen der Reibung nicht schließt) zeigt das ständige auf und ab der Bahngeschwindigkeit. Die im zweiten Keplerschen Gesetz festgestellte Erhaltung der vom Leitstrahl Sonne-Planet (Trichterzentrum-Kugel) pro Zeiteinheit überstrichenen Fläche deutet sich aber an.

Zur Feststellung der im dritten Keplerschen Gesetz verarbeiteten Geschwindigkeitsabhängigkeit (Kreisbahngeschwindigkeit $v\sim 1/\sqrt{r}$) könnte man versuchen, zwei Kugeln bei zwei verschiedenen Radien gleichzeitig zu starten. Die Aufmerksamkeit der Beobachter muss beim Vergleich beider Kugeln weg von der Bahngeschwindigkeit und hin auf die Winkelgeschwindigkeit gelenkt werden. Würden die Kugeln wie festgemacht an einem Rad (starr) rotieren, so wäre ihre Winkelgeschwindigkeit gleich und für die Bahngeschwindigkeit würde gelten $v\sim r$. Für die weiter innen umlaufende Kugel kann aber eine größere Winkelgeschwindigkeit beobachtet werden. Die genaue Abhängigkeit der Kreisbahngeschwindigkeit vom Bahnradius ergibt sich aus der Gleichheit von Gravitationskraft und Zentripetalkraft

$$\frac{m\cdot v^2}{r}=\gamma\cdot\frac{M\cdot m}{r^2} \qquad \Rightarrow \qquad v\sim\frac{1}{\sqrt{r}}.$$



Mögliche Demonstrationen am Potentialtrichtermodell im Technoseum in Mannheim (links zum 2. Keplerschen Gesetz, rechts zum 3. Keplerschen Gesetz). Hintergrundbild: ©: Hallo-Onlinejournal.