Experiment des Monats

Tiefsinniges zu Dominosteinen,
die reihenweise umkippend sogar eine Treppe hinauffallen und gestapelt der Schwerkraft trotzen.

Von Jearl Walker

Mit Dominosteinen läßt sich nicht nur Domino legen. Auf rechte Weise in langer Reihe aufgestellt, illustrieren sie den schon sprichwörtlichen mitreißenden Fall: Ein Schnips gegen den ersten Stein, und die Kippwelle pflanzt sich bis zum letzten Stein fort.

Eine bemerkenswerte Variante des Dominokippspiels stammt von Lorne A. Whitehead aus Vancouver in Kanada. Statt gleichgroßer Dominosteine nimmt er solche, bei denen die Steine mit dem Faktor $\sqrt{2}$ wachsen, jeder also rund 1,414mal größer ist als der vorhergehende. Ein Schnick gegen den ersten, winzigen in einer Reihe aus 13 solcher Dominos bringt wenig später auch den letzten, 64mal größeren Stein zu Fall (Bild 2). Wäre Whitehead in der Lage gewesen, den Vergrößerungsfaktor bis zum 32. Stein durchzuhalten, so hätte dieser ungefähr so hoch sein müssen wie einer der beiden Türme des World Trade Center in New York.

Wie kippt man eine Domino-Reihe eigentlich um? Ich begann mit 50 hintereinander aufgestellten Standard-Spielsteinen. Bei einem Abstand von einer Dominobreite dauerte die Kettenreaktion zwei Sekunden; bei halbem Abstand dauerte sie auch nur halb so lange. Den unterschiedlichen Zeitverlauf konnte ich hören: am Klacken der aufeinanderfallenden Steine. Das Klackmuster änderte sich auch merklich, nachdem die Kettenreaktion die ersten fünf oder sechs Steine erfaßt hatte. Vermutlich lag das einfach daran, daß sich zu Beginn nur ein paar Dominos bewegen, während später in jedem beliebigen Moment eine Gruppe von mehreren Steinen am Fallen ist.

Den Mechanismus der Kettenreaktion konnte ich sichtbar machen, indem ich die Bewegung photographisch einfror, durch rasche Momentaufnahmen oder durch stroboskopische Aufnahmen. Wenn der führende Domino in der kippenden Gruppe gerade auf seinen noch stehenden Vordermann zufällt, hat er seinen Hintermann im Rücken lehnen (Bild 1 rechts). Andere Steine der Gruppe sind ebenfalls so angelehnt am Fallen (Bild 3). In einer theoretischen Analyse stellte D. E. Shaw von der Villanova-Universität in Villanova (Pennsylvania) fest, daß zu jedem Zeitpunkt der Kettenreaktion etwa fünf Dominosteine in Bewegung sind.

Als nächstes versuchte ich herauszufinden, wie die Kippwelle eine glatte Rampe hinauf- und hinunterläuft. Das Gefälle darf natürlich nur gering sein, weil sich sonst die Dominos nicht hochkant aufstellen lassen. Sollte die Kettenreaktion eine solche Rampe hinauflaufen, so mußten die Steine weiter auseinander aufgestellt werden als auf ebener Strecke. Beim Hinunterlaufen pflanzte sich die Kettenreaktion wesentlich schneller fort, und sie gelang mir bei jedem Abstand, solange er nur kleiner war als ein Stein hoch. Die Kippwelle ließ sich auch dazu bringen, eine kleine Treppe mit flachen Stufen zu erklimmen, doch schaffte sie das nur recht langsam (Bild 9).

Man kann die Dominokette auch in zwei Ketten fortsetzen. An der Gabelung fällt dann der letzte Stein der Ausgangsreihe gegen die ersten Dominos der beiden neuen Reihen. Ebenso sind Kurven möglich. Es ist also nicht notwendig, daß ein Stein den nächsten voll mit der Breitseite trifft.

Einen kippen

Um die Physik des Dominokippens zu ergründen, nahm ich einen gewöhnlichen Stein mit der Höhe h, Breite b und Dicke d (Bild 4). Welche Faktoren bestimmen seine Stabilität, wenn er hochkant steht? Wie stark muß ich gegen seine Breitseite tippen, um ihn um seine Unterkante zu drehen und umzukippen? Warum sind dickere Dominos schwerer umzustürzen? Und warum läßt sich eine Reihe aus Würfeln, aus Bauklötzchen etwa, nicht in einer solchen Kettenreaktion umkippen?

Betrachten wir einen aufrecht stehenden Domino. Die Schwerkraft zieht je-

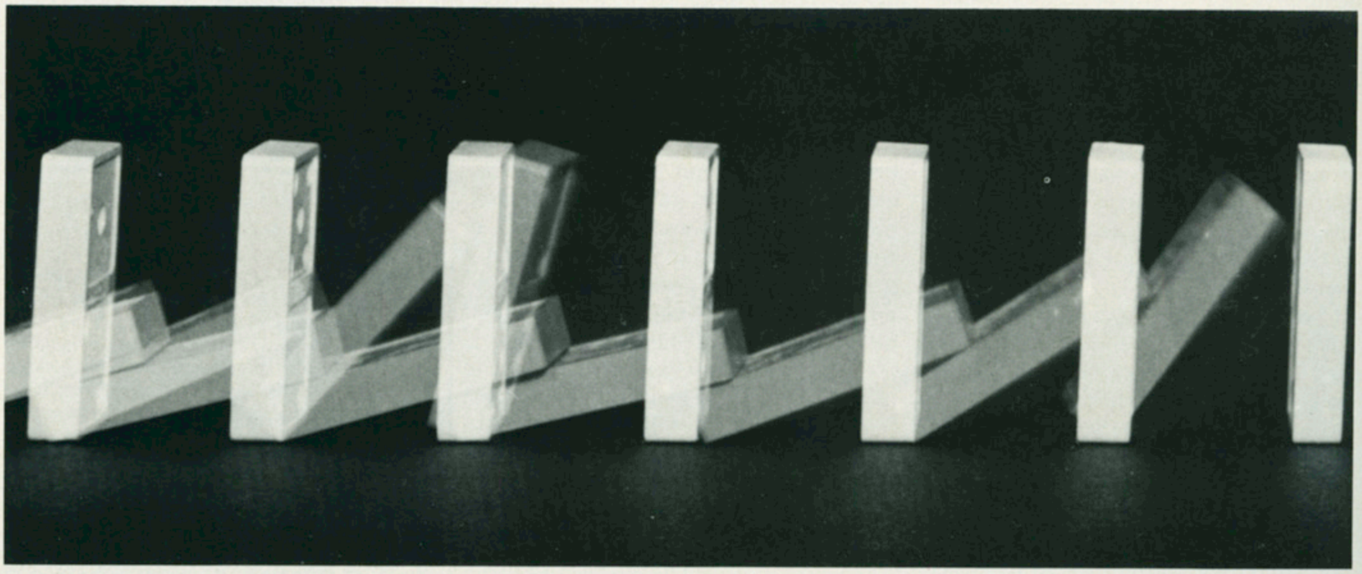

Bild 1: Kettenreaktion in einer Dominoreihe.

des seiner kleinen Volumenelemente nach unten. Einfacher ist es, mit dem Schwerpunkt zu arbeiten, der sich in der geometrischen Mitte des Steins befindet. Die gesamte Schwerkraft (sie bedingt das Gewicht des Dominos) soll an diesem Punkt angreifen. Der hochkant stehende Stein ist im stabilen Gleichgewicht, weil sein Gewichtsvektor zur Standfläche weist.

Im Prinzip läßt sich der Domino in eine andere Gleichgewichtslage bringen, indem man ihn um eine seiner Grundkanten kippt, bis sein Schwerpunkt genau über dieser Kante liegt. Obwohl der Gewichtsvektor dann wieder in Richtung der Stand-„Fläche" zeigt, ist das Gleichgewicht instabil: Weil die Fläche dann nur mehr eine Linie ist, lassen selbst kleine Störkräfte den Stein umfallen.

Damit ein Domino vornüberkippt, stoße ich ihn so fest an, daß er sich über die instabile Gleichgewichtslage hinausneigt. (Ich gehe davon aus, daß die Haftreibung vom Tisch stark genug ist, ein Rutschen des Dominos zu verhindern. Könnte die Kettenreaktion eigentlich auch auf einem reibungsfreien Tisch ablaufen?)

Während der Kippbewegung spielen zwei Energieformen eine Rolle. Die kinetische Energie des Steins hängt von der Geschwindigkeit seiner Bewegung ab, die potentielle Energie von der Höhe seines Schwerpunktes über dem Tisch. Durch das Anstoßen verleihe ich dem Stein kinetische Energie, die sich in dem Maße in potentielle Energie umwandelt, wie sich der Schwerpunkt zunächst nach oben verlagert.

Wieviel Energie muß ich nun dem Domino mindestens mitgeben, damit er gerade eben die instabile Gleichgewichtslage passieren kann? Die Anfangshöhe des Schwerpunktes über dem Tisch beträgt $h/2$ (Bild 5 links). Am höchsten Punkt während der Drehbewegung ist sie gleich r, also gleich dem Abstand des Schwerpunktes von der Kante, um die sich der Stein dreht (Bild 5 rechts).

Das Gewicht eines Dominos der Masse m beträgt mg (g bezeichnet die Erdbeschleunigung). Seine potentielle Energie ist in jedem Moment gleich dem Produkt aus seinem Gewicht und der Höhe des Schwerpunktes über der Tischplatte. Um also den Schwerpunkt von einer Höhe $h/2$ auf die Höhe r zu heben, muß ich dem Domino die Energie $mg(r - h/2)$ verleihen. Überträgt mein Stoß weniger Energie, so kann der Stein die instabile Gleichgewichtslage nicht durchlaufen und fällt in die Ausgangsposition zurück. Er kippt erst vornüber, wenn ich mehr Energie aufwende.

Was einen hochkant stehenden Domino so instabil macht, ist seine geringe Dicke. Nehmen wir beispielsweise einen Stein fester Höhe und Breite. Ist er dünn, so ist auch r klein (das heißt, nur wenig verschieden von $h/2$) und sein Gewicht gering. Man braucht nur wenig Energie, um den Schwerpunkt über die instabile Gleichgewichtslage hinauszubefördern; ein leichtes Antippen mit dem Finger genügt. Mit der Dicke wachsen auch alle anderen Faktoren: r, das Gewicht und die zum Anheben des Schwerpunktes nötige Energie. Ein sachtes Antippen wirft einen dicken Domino noch nicht um.

Die Drehung des Steins um die Unterkante rührt von einem Drehmoment her, das das Produkt aus Kraft und Hebelarm ist. Das Anstoßen erzeugt ein solches Drehmoment. Bild 6 verdeutlicht, wie der zugehörige Hebelarm zu bestimmen ist. Man verlängere den Kraftvektor und zeichne eine Linie rechtwinklig zu dieser Verlängerung bis zur Drehachse (der „Kippkante"). Diese Strecke ist der Hebel, an dem die Kraft wirkt, der Kraftarm. Um ein großes Drehmoment zu erzeugen, das den Domino eine schnelle Kippbewegung machen läßt, sollte man möglichst weit oben anstoßen, wo der Kraftarm lang und die aufgewendete Kraft daher geringer ist.

Sobald der Stein zu kippen beginnt, ruft sein Gewichtsvektor ein zweites Drehmoment hervor, das ihn wieder in seine Ausgangslage zurückzudrehen sucht. Um den zugehörigen Hebelarm zu finden, verlängere man den Gewichtsvektor und zeichne rechtwinklig dazu eine Linie zur Drehachse. Die Strecke zwischen Vektorverlängerung und Drehachse ist der Kraftarm, an dem das Gewicht angreift. Mit der Drehung der Standfläche nach oben verkürzt sich der Kraftarm, so daß sich das Drehmoment des Gewichts verringert.

In Bild 6 wirkt das Drehmoment des Kraftstoßes im Uhrzeigersinn, das gewichtsbedingte Drehmoment entgegengesetzt dazu. Da der Kraftstoß kurz ist, ist es auch das mit ihm verbundene Drehmoment. Während der weiteren Drehung wirkt dann nur noch das Drehmoment des Gewichtes. Wollen Sie den

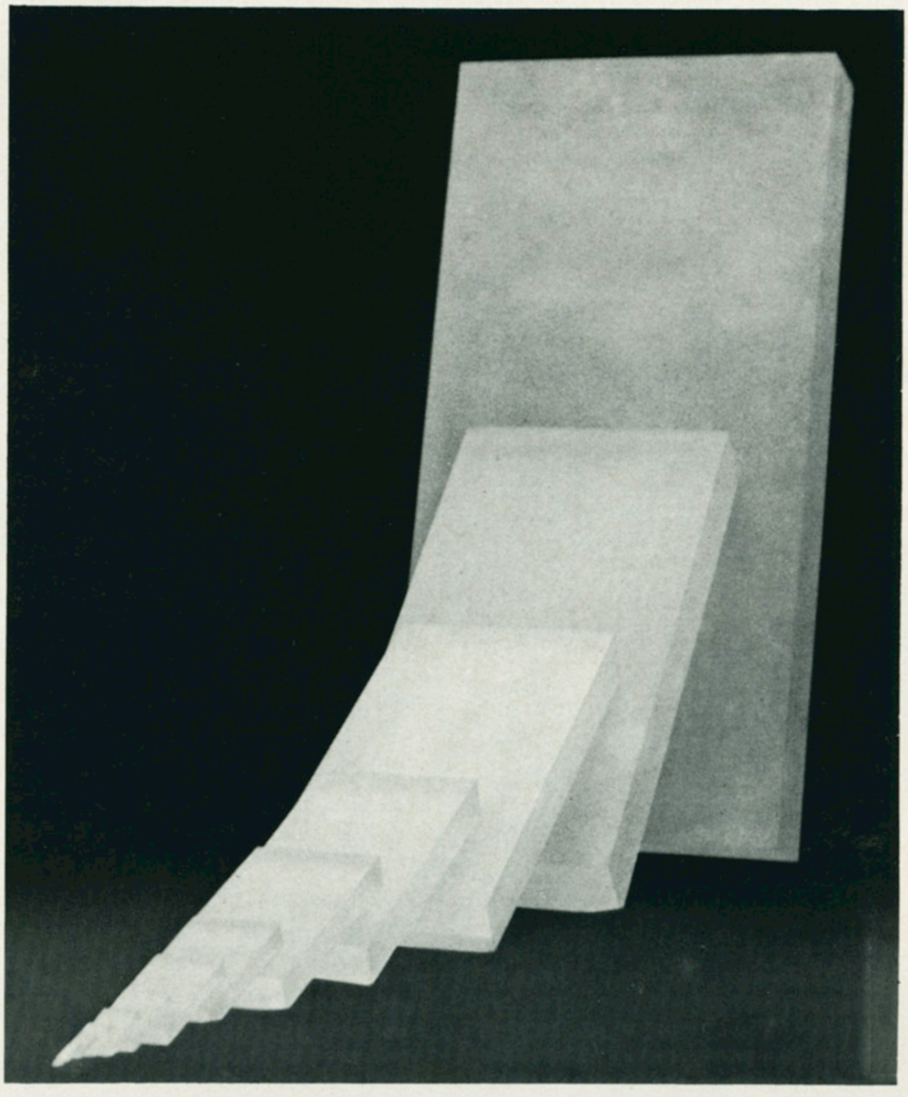

Bild 2: Die wachsenden Steine von Lorne A. Whitehead.

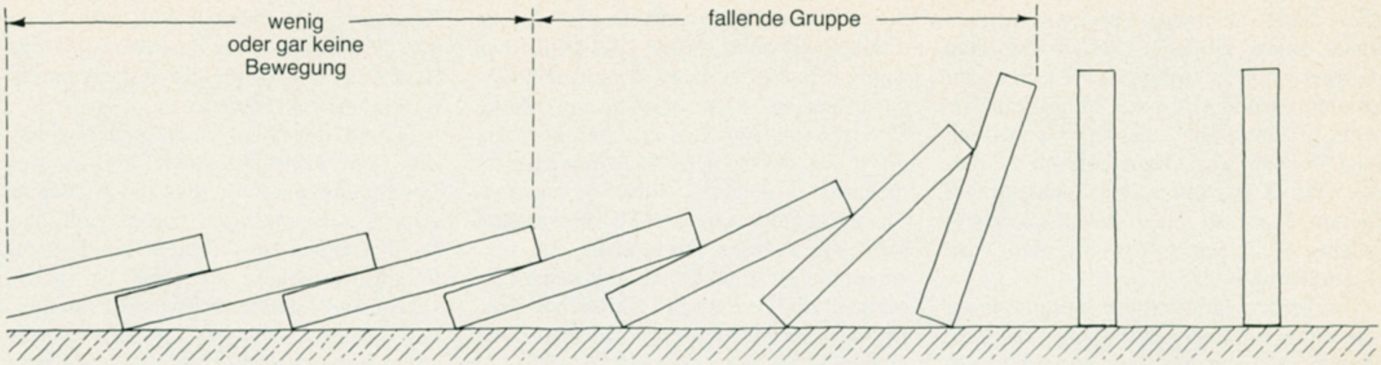

Bild 3: Die fallende Gruppe bei der Kettenreaktion.

Stein also umkippen, so muß das von Ihnen erzeugte Drehmoment genug Rotationsenergie liefern, damit das Gewichtsdrehmoment den Stein nicht abbremst, ehe sein Schwerpunkt die instabile Gleichgewichtslage überschritten hat.

Ein Bauklötzchen wird ein leichter Schnick mit dem Finger kaum umwerfen, denn es ist dick und der Kraftarm für das vom Gewicht herrührende Drehmoment in Ruhelage lang. Zudem wiegt so ein Klotz beträchtlich mehr als ein Domino gleicher Höhe und Breite. Aus diesen Gründen kann das Drehmoment des Gewichts leicht mit dem des Kraftstoßes fertigwerden.

Zweie kippen

Als nächstes untersuchte ich, was zu beachten ist, damit ein umgestoßener Stein einen zweiten anstößt. Klar ist, daß sein Abstand kleiner als seine Höhe sein muß, sonst würde er den Vordermann gar nicht treffen. Gibt es einen Mindestabstand? Solange Sie den ersten Stein nur heftig genug anstoßen, wird auch der nächste umfallen, wenn der Abstand geringer als die Höhe ist. Aber angenommen, Ihr Stoß befördert den Domino gerade eben über seine instabile Gleichgewichtslage hinaus. Dann kippt der Vordermann nur um, wenn er einen bestimmten Mindestabstand hat.

Ich habe dazu mit zwei unterschiedlich großen Spielsteinen experimentiert, und zwar mit normalen Kunststoff-Dominos – 4,4 Zentimeter hoch, 2,2 Zentimeter breit und 0,7 Zentimeter dick – sowie mit großen Holz-Dominos, die 13,9 Zentimeter hoch, 7 Zentimeter breit und 1,9 Zentimeter dick sind. Die Breite spielt keine Rolle, außer daß sie zum Gewicht beiträgt. Ausschlaggebend ist das Verhältnis zwischen Höhe und Dicke, und das war für beide Sorten ungefähr gleich.

Auf meiner Tischplatte habe ich erst einmal feines Schmirgelpapier mit Klebeband befestigt und seitlich anschließend ein Lineal. Das Sandpapier sorgte für genügend Reibung, so daß die Steine nicht wegrutschen konnten. Am Lineal stellte ich dann zwei der kleinen, 0,7 Zentimeter dicken Dominos hochkant auf. Die Position des zweiten Steins blieb unverändert; den Abstand zwischen beiden variierte ich durch Verschieben des ersten Steins. Diesen kippte ich jedesmal in die instabile Gleichgewichtslage und ließ ihn dann, praktisch ohne kinetische Energie aufzuwenden, vornüber fallen. Damit ich den Stein überhaupt in diese Lage bringen konnte, mußte der Abstand wenigstens der Dicke von 0,7 Zentimeter entsprechen (Bild 7). Sollte der Vordermann nicht nur wackeln, sondern auch umkippen, war ein Abstand von mindestens 1,2 Zentimeter erforderlich.

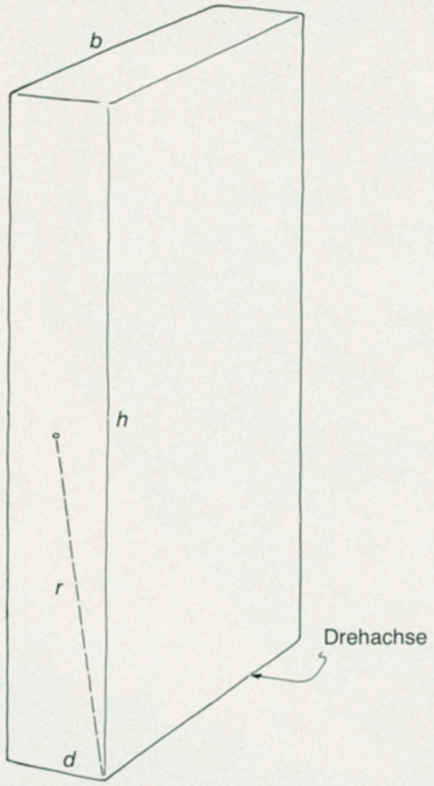

Bild 4: Zur Berechnung verwendete Größen.

Sonst blieb der erste Stein einfach angelehnt am weiterhin aufrechten Vordermann stehen.

Für die großen, 1,9 Zentimeter dicken Dominos erhielt ich ähnliche Ergebnisse. Damit ich den ersten Stein aus der instabilen Gleichgewichtslage heraus freigeben konnte, waren als Minimalabstand 1,9 Zentimeter einzuhalten, und erst ab 2,3 Zentimeter ließ sich auch der zweite Stein zu Fall bringen.

Dieser Mindestabstand ist durch die Energie festgelegt, die im Stoß übertragen werden muß, damit der zweite Stein gerade umkippt. Dazu muß dessen Schwerpunkt angehoben und gerade über die instabile Gleichgewichtslage hinaus gedreht werden, was eben, wie zuvor, den Energiebetrag von $mg(r - h/2)$ erfordert.

Nehmen wir einmal den Idealfall des elastischen Stoßes, bei dem die gesamte kinetische Energie des ersten Steins auf den zweiten übertragen wird. Wie weit müßte dann der erste vom höchsten Punkt seiner Drehbewegung herunterfallen, um den zweiten umzustoßen? Er hat natürlich – da beide Steine gleich sind – gerade so weit nach unten zu fallen, wie der Schwerpunkt des nächsten angehoben werden muß, also um $r - h/2$.

Bei einem elastischen Stoß wird damit der Mindestabstand zwischen den beiden Dominos festgelegt. Stehen sie zu dicht, so erhält der erste Stein – da sein Fall zu kurz – nicht die notwendige kinetische Energie. Der zweite Stein kippt dann nur leicht und schaukelt schließlich in seine Ausgangslage zurück.

Wie bestimmt nun der Minimalabstand, ob eine Kettenreaktion gelingt oder nicht? Angenommen, die Steine stehen so dicht, daß sich der erste nicht einmal in seine instabile Gleichgewichtslage drehen kann, ohne gegen den nächsten zu stoßen. Dann muß der Startstoß ganz schön kräftig sein, weil er praktisch die Reihe als Ganzes weit genug zu neigen hat.

Stehen die Steine etwas weiter auseinander, aber enger, als es der Mindestabstand erfordert, so muß man dem ersten Domino immer noch einen ordentlichen Stoß versetzen. Nur so bringt er es auf die nötige kinetische Energie, die er mit seinem beschränkten Fallweg allein nicht erreichen könnte. Nicht die „Fallenergie" des ersten Steins bringt den Vordermann zum Kippen, sondern die zusätzliche, in den Anstoß gesteckte Energie.

Der Mindestabstand ist bedeutsam, wenn der erste Domino gerade genug Energie hat, um über die instabile Gleichgewichtslage hinaus zu kippen. Dann muß der zweite mehr als den Mindestabstand haben, damit der erste weit genug fallen kann. Nur mit einem solchen Sturz läßt sich soviel Energie auf den Vordermann übertragen, daß der wirklich umkippt. Ein leichtes Anstoßen des ersten Steins kann also eine Kettenreaktion auslösen, sofern die Dominos in der Reihe den Mindestabstand überschreiten, aber eben nicht weiter, als es ihrer Höhe entspricht. Stehen sie dichter, so muß der Startstoß wesentlich mehr Energie auf den ersten Stein übertragen, damit eine Kettenreaktion abläuft.

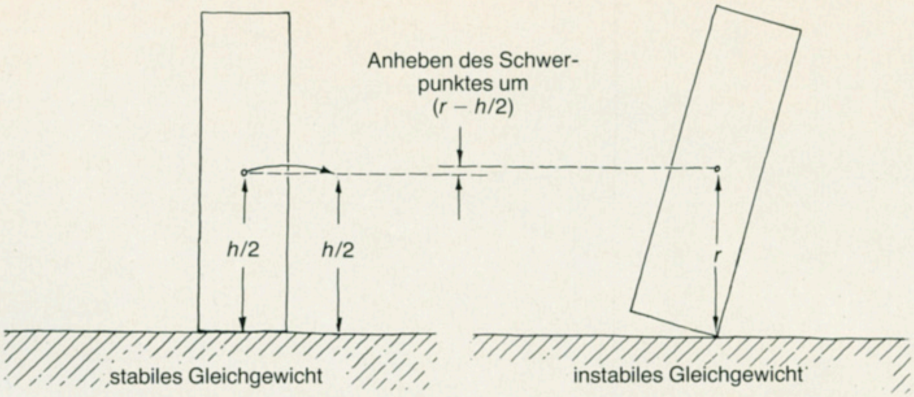

Bild 5: Wie der Schwerpunkt beim Kippen angehoben wird.

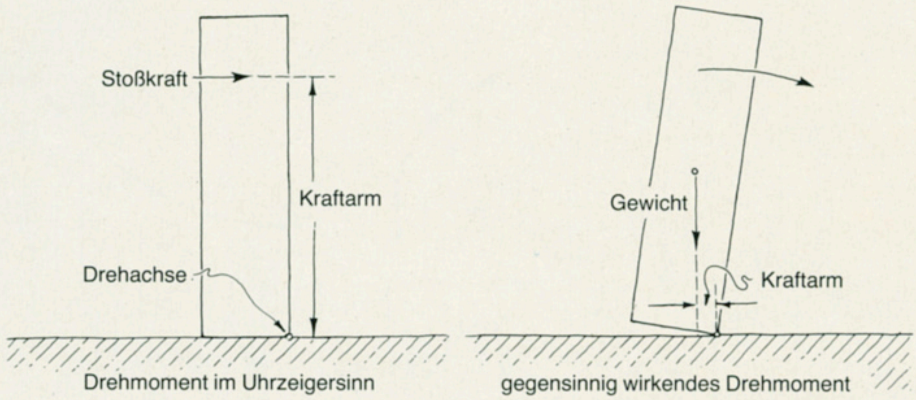

Bild 6: Die Drehmomente am Domino

Theorie und Praxis

Ich habe nun wieder einmal meinen Heimcomputer eingesetzt, um den Mindestabstand für unterschiedliche Dominos zu ermitteln. Dabei nahm ich an, daß die kinetische Energie beim Stoß vollständig übertragen wird und daß das Gewicht des am Vordermann lehnenden Steins mithilft, diesen über seine instabile Gleichgewichtslage hinauszudrücken. Zur Berechnung des Mindestabstandes ließ ich dann die kinetische Energie im instabilen Gleichgewichtszustand Null werden, so daß der erste Stein von der Höhe r auf $h/2$ zu fallen hatte, um dem nächsten genug Energie zu übertragen.

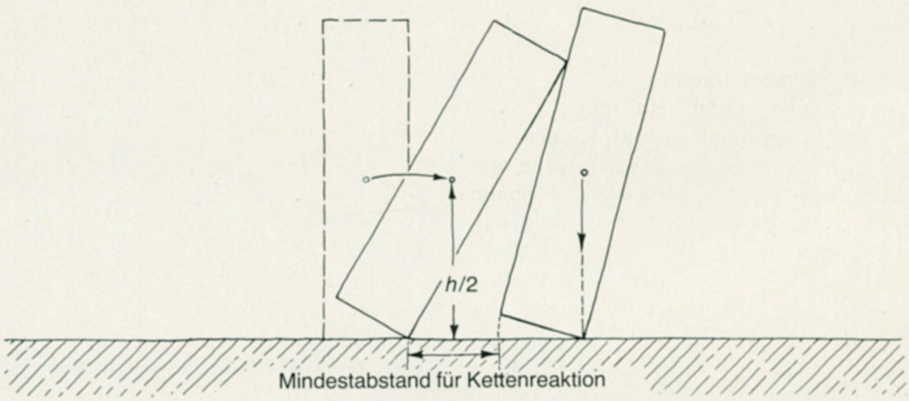

Bild 7: Der Mindestabstand von Dominos.

Damit kam ich bei meinen kleinen Dominosteinen auf einen Mindestabstand von 0,7 Zentimeter, bei meinen größeren auf 1,9 Zentimeter. Das war weniger als der experimentell ermittelte Abstand von 1,2 beziehungsweise 2,3 Zentimeter, was hauptsächlich daran lag, daß ich von elastischen Stößen ausgegangen war. Tatsächlich geht aber einige Energie verloren, weil die Dominos erstens in Schwingung geraten und zweitens an der Berührfläche Reibung haben. Wenn ich die Dominosteine mit einem Gleitmittel einschmierte, verringerten sich die gemessenen Mindestabstände nur geringfügig. Daraus konnte ich schließen, daß die Schwingungen mehr zum Energieverlust beitragen als die Reibung.

Einige der kleinen Steine klebte ich zusammen, um zwei- oder dreimal so dicke Dominos zu erhalten. Ich wieder-

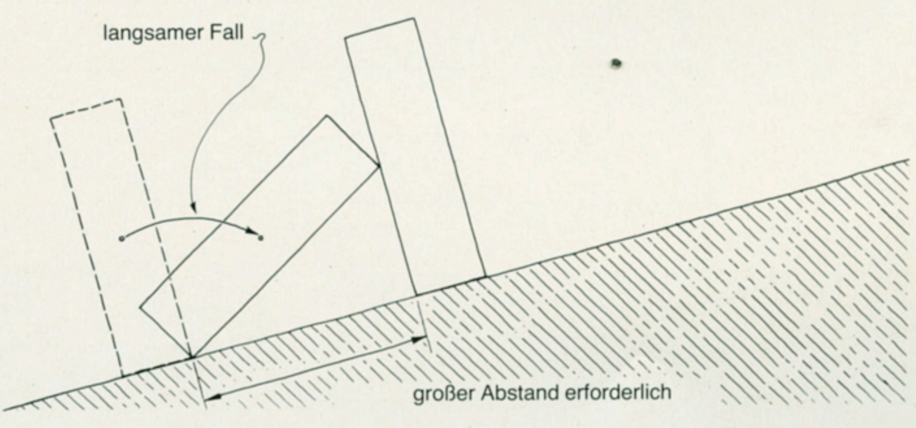

Bild 8: Dominos fallen eine Rampe hinauf.

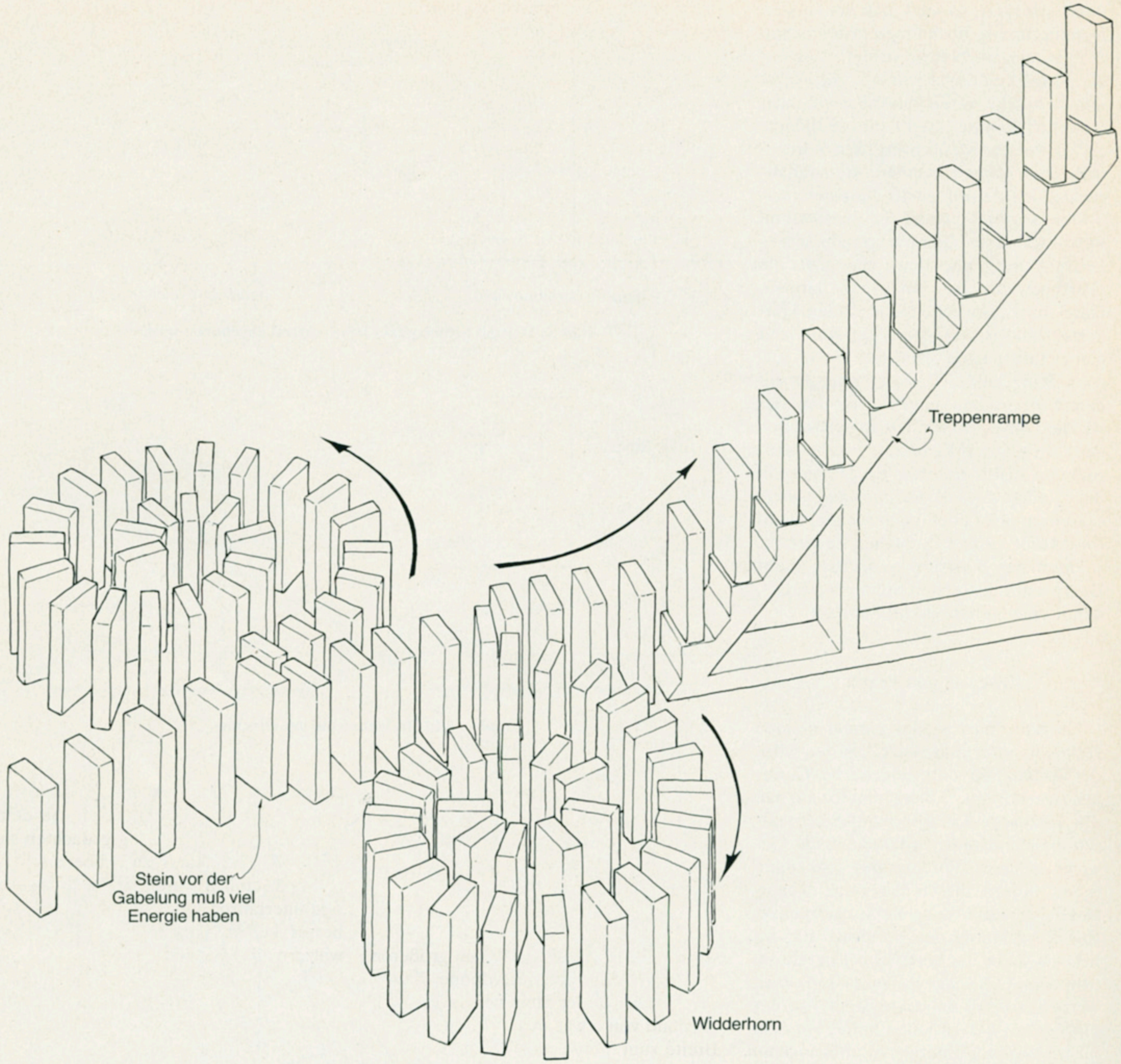

Bild 9: Das Widderhorn und die Dominotreppe.

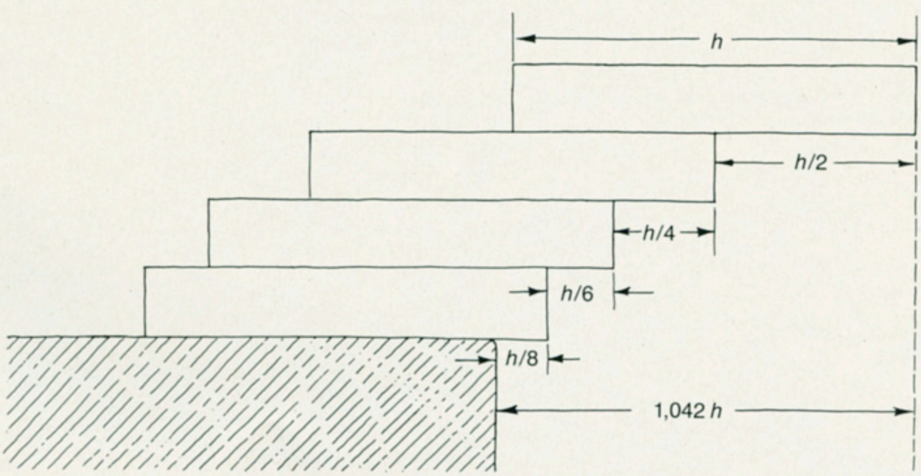

Bild 10: Ein Dominostapel mit dem obersten Stein jenseits der Tischkante.

Überhang in Domino-längen	Anzahl benötigter Steine
0,5	1
1	4
2	31
3	227
4	1674
5	$1{,}2 \times 10^4$
10	$2{,}7 \times 10^8$

Bild 11: Zahlenwerte beim Dominostapeln.

holte damit meine Versuche und kam für die doppelt so dicken Steine auf einen Mindestabstand von 2,2 Zentimeter. (Mit dem Rechner ermittelte ich nur 1,5 Zentimeter, was wieder an den nichtberücksichtigten Energieverlusten der reellen Stöße lag.) Die dreimal so dicken Steine kippten einander beinahe um, aber die Reibung verhinderte das im letzten Augenblick, so daß sie schief aneinander lehnen blieben.

Meine Kalkulationen ergaben, daß der erforderliche Mindestabstand mit der Dicke des Dominosteins steigt. Das liegt daran, daß jeder dickere Stein weiter herabfallen muß, um die nötige kinetische Energie zum Umkippen des Vordermanns zu gewinnen. Wenn der Mindestabstand schließlich fast der Höhe der Steine entspricht, ist die Energieübertragung so ineffizient, daß die Kettenreaktion abbricht. Eine Reihe aus Würfeln kann niemals in einer Kettenreaktion umkippen, weil der Mindestabstand die Höhe der Klötze übersteigt.

Eine Reihe kippen

Als nächstes wandte ich mich wieder einigen meiner anfänglichen Versuche zu. Normalerweise wird die Kettenreaktion mit einem ordentlichen Schnipser gegen den ersten Stein in Gang gesetzt. Jeder Domino bewegt sich dann mit mehr als ausreichender Energie über seine instabile Gleichgewichtslage hinweg: Auch bei geringem Abstand und wenig Platz zum Fallen wird jeder vom Aufprall des Hintermanns sicher über seinen instabilen Punkt hinaus befördert. Die kinetische Energie der Kippwelle ist dann auch groß genug, daß die Kettenreaktion an einer Gabelung auf zwei Dominoreihen übergreifen kann.

Eine Kettenreaktion läßt sich auch auf einer Rampe auslösen, vorausgesetzt, sie ist nicht zu steil. Denn der Gewichtsvektor muß noch zur Standfläche des Dominos zeigen. Auch werden Sie beim Experimentieren merken, daß die Steine in größerem Abstand als auf einer waagerechten Unterlage aufzustellen sind.

Betrachten wir den zweiten Stein einer solchen Reihe. Da die Unterlage ansteigt, muß sein Schwerpunkt ziemlich weit angehoben werden, ehe er die instabile Gleichgewichtslage passiert (Bild 8). Das dauert länger als auf ebener Strecke und verlangt mehr Energie. So muß der Hintermann auch eine größere Strecke fallen, soll er beim Aufprall genügend Energie an den Vordermann abgeben. Der Mindestabstand wird daher groß, und die Kippwelle pflanzt sich merklich langsamer fort.

Bergab läuft die Welle schneller. Jeder Domino braucht nur wenig Energie, um die instabile Gleichgewichtslage zu überschreiten. Der Mindestabstand ist praktisch Null. Überdies brauchen die Steine auch nicht weit zu fallen, um den nächsten umzustoßen, so daß die Kollisionen – wie am Klacken zu hören – ziemlich rasch aufeinanderfolgen.

Dominos auf einer Treppe kippen nur langsam bergauf. Da jeder Stein den nächsten weit unten statt oben trifft, ist der Hebelarm und damit auch das Drehmoment klein. Die Energieübertragung wird ineffektiv, und der getroffene Stein bewegt sich nur langsam durch seine instabile Gleichgewichtslage, so daß die Geschwindigkeit der Kettenreaktion gering bleibt.

Whiteheads Versuch mit der eingangs erwähnten Reihe „wachsender" Dominos wirkt verblüffend. Der erste Stein ist so klein, daß ich ihn kaum aufrecht hinstellen kann, der letzte (also dreizehnte in der Reihe) hingegen so schwer, daß ich ihn nur mit Mühe an seinen Platz heben kann. Und trotzdem stürzt der winzige Stein schließlich mit Leichtigkeit den schweren.

Da sich jeder Stein in Höhe, Breite und Dicke mit dem Faktor 1,414 vergrößert, ist der letzte der Reihe nicht nur 64mal höher als der erste, sondern auch 262 144mal schwerer. Damit wird seine potentielle Energie fast 17 Millionen Mal größer. Ein leichtes Antippen des ersten Steins verleiht diesem eine kinetische Energie von rund 0,024 Mikrojoule; die des letzten Steins beim Aufprall am Boden beträgt dagegen rund 51 Joule, also das Zweimilliardenfache.

Whitehead stellte seine Steine aus Acrylplatten her, die er mit einem Sandstrahlgebläse glättete. Für die größeren Steine klebte er mehrere dünne Platten aufeinander. Jeder Stein wurde in einem Abstand von etwas mehr als der eigenen Breite zum Vordermann aufgestellt.

Könnte man auch eine Reihe mit einem Vergrößerungsfaktor von mehr als 1,414 herstellen? Elastische Stöße vorausgesetzt, dürfte meiner Meinung nach die Obergrenze bei etwa 2,5 für Dominos liegen, wie Whitehead sie benutzt. Größere Faktoren sind möglich, wenn man das Verhältnis von Höhe zu Dicke vergrößert. Vielleicht haben Sie Lust, an diesem Problem einmal herumzubasteln.

Über dem Abgrund

Hier ist noch etwas anderes zum Knobeln. Die Aufgabe lautet, Dominos in Form einer Treppe so weit wie möglich über eine Tischkante hinaus zu stapeln, ohne daß sie herunterfallen (Bild 10). Jeder Stein wird mit der Breitseite nach unten und der Längsseite rechtwinklig zur Tischkante hingelegt. Wie sollte man stapeln, damit der oberste Stein maximalen Überhang bekommt? Wieviel Dominos sind mindestens übereinanderzulegen, damit der letzte gerade vollständig über dem „Abgrund" schwebt? Gibt es einen Grenzwert dafür, wie weit der Stapel über die Tischkante hinausragen kann?

Diese Art Fragestellung wurde 1955 von Paul B. Johnson behandelt, dessen Lösung später von Leonard Eisner vereinfacht und als Studentenulk auch ausprobiert wurde. Eines Nachts schichteten Eisner und ein anderer Student in der Bibliothek Bände von *The Physical Review* zu einem schiefen Stapel. Mit dem beängstigenden Überhang gedachten sie den Bibliothekar zu überraschen. (Wahrscheinlich waren sie noch zu jung und unerfahren, um zu wissen, daß man besser keinen Unsinn mit Bibliothekswälzern anstellt, wenn man die Hilfe von Bibliothekaren noch braucht oder nicht gar von der Universität fliegen möchte.)

Betrachten wir nun den ersten Domino. Er liegt so lange sicher, wie sein Schwerpunkt über der Tischoberfläche liegt, sein Gewichtsvektor also kein

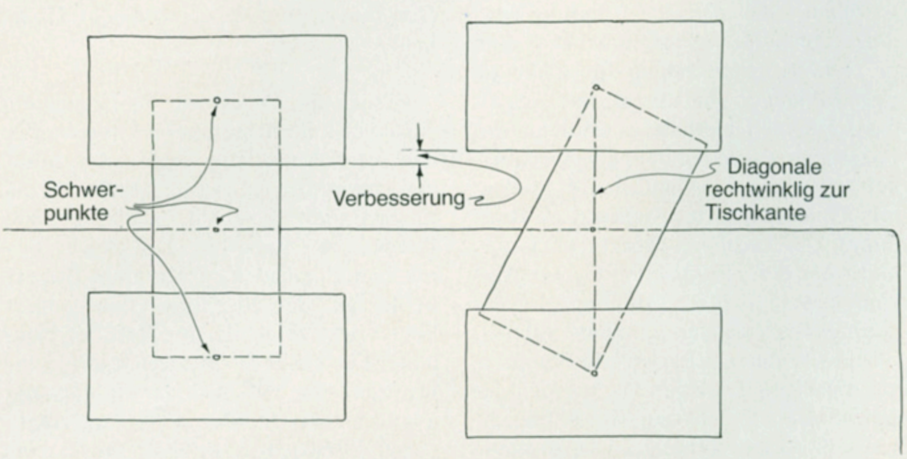

Bild 12: Wie man einen von drei Dominos jenseits der Tischkante auflegt.

Drehmoment erzeugen kann. Den größtmöglichen stabilen Überhang erzielt man also, wenn der Schwerpunkt haarscharf vor der Tischkante liegt.

Jetzt schieben wir einen zweiten Domino unter den ersten. Die Vorderkante des unteren Steins übernimmt dann die Rolle der Tischkante und hindert den oberen Stein daran, vornüber zu kippen. Wie sollte man die beiden auf den Tisch legen, um den maximalen stabilen Überhang zu erzielen? Ihr gemeinsamer Schwerpunkt, der in der Mitte zwischen den Schwerpunkten der beiden Steine liegt, muß einfach wieder in Höhe der Tischkante plaziert werden. Dazu braucht man nichts zu rechnen; die richtige Balance läßt sich mit ein wenig Probieren finden.

Kommt ein dritter Stein unter die beiden, so muß wieder der gemeinsame Schwerpunkt über der Tischkante liegen. Dieses Verfahren läßt sich beliebig oft wiederholen. Bei einem Stapel aus n Dominos errechnet sich der Abstand zwischen der Tischkante und der Vorderkante des obersten Steins aus dem Produkt $(h/2)(1+1/2+1/3+1/4+..1/n)$, wobei h wie bisher die Höhe, das heißt die Längsachse, bezeichnet und der Ausdruck in der zweiten Klammer die harmonische Reihe ist.

Ich habe dann meinen Computer entsprechend programmiert, die harmonische Reihe für jede beliebige Zahl von Dominos zu berechnen. So braucht man mindestens vier Steine, wenn der Überhang größer als h werden, also der oberste Stein vollständig jenseits der Tischkante liegen soll. Für zwei Dominolängen Überhang muß man schon 31 Steine stapeln. Danach steigt die Zahl der Steine rasch ins Astronomische: Für 5 Längen Überhang sind es 12 367 Dominos, und für 50 Längen dann $1{,}5 \times 10^{44}$.

Die harmonische Reihe aufzusummieren ist für den Computer bis zu einer Million Steine recht einfach. Gewöhnlich beschränkt sich die Rechengenauigkeit (die einfache Genauigkeit) auf sieben signifikante Stellen: Nach Rundung werden sechs Stellen ausgedruckt. Will man die Überhangberechnung für mehr als eine Million Steine durchführen, so ist das Ergebnis fehlerhaft, es sei denn, das Programm wurde auf doppelte Genauigkeit ausgelegt (gewöhnlich 14 Stellen, mit 13 ausgedruckten Stellen nach Rundung). Die Rechnerei dauert dann lange, und trotz der verdoppelten Genauigkeit kann es sein, daß der Computer nur näherungsweise richtige Resultate liefert.

Steve Wallin aus Laramie in Wyoming hat mir einen Trick gezeigt, wie sich das Ganze schnell näherungsweise berechnen läßt. Dabei werden die 1674 Steine als Maßstab verwendet, die für einen Überhang von vier Dominolängen nötig sind (Bild 11). Die Anzahl der Steine für einen bestimmten Überhang (in Dominolängen ausgedrückt) ist gleich 1674 multipliziert mit e^x, wobei der Exponent x gleich der doppelten Differenz zwischen gewünschtem Überhang und 4 ist. Für einen Überhang von zehn Dominolängen ziehe man also 4 von 10 ab, nehme mit 2 mal, setze den Wert als Exponent von e (= 2,718) und multipliziere das Ergebnis mit 1674. Das liefert dann gerundet die notwendige Anzahl von Steinen.

Zum Schluß noch etwas anderes zum Tüfteln. Wie groß ist der maximal erreichbare Überhang bei drei Dominos, wenn sie nicht als Treppe gestapelt werden? Zwei Lösungen sind in Bild 12 dargestellt. Im ersten Fall wird der Schwerpunkt des ersten, unteren Steins genau über der Tischkante plaziert. Der zweite Stein kommt mit seinem Schwerpunkt auf die Hinterkante des unteren, und der dritte Stein mit seinem Schwerpunkt auf die Vorderkante. So liegt der gemeinsame Schwerpunkt gerade über der Tischkante, und das Gewicht übt kein Drehmoment auf den Stapel aus. Die Steine halten sich die Waage.

Die zweite Lösung ist die bessere: Dabei muß man den ersten Stein nach dem Auflegen so drehen, daß seine Diagonale rechtwinklig die Tischkante schneidet. Der zweite Domino wird dann mit seinem Schwerpunkt auf die am weitesten zurückliegende Ecke gesetzt und der dritte mit seinem Schwerpunkt auf die entgegengesetzte Ecke. Wieder liegt der gemeinsame Schwerpunkt über der Tischkante, und das Ganze ist stabil. Bei dieser Anordnung „schwebt" der dritte Domino weiter als zuvor von der Tischkante entfernt, weil die Diagonale des Tragsteins ein bißchen länger ist als seine Längsachse (Bild 12 rechts).

Sie können nun versuchen, den dritten Stein auf seine Schmalseite zu stellen – mit dem Schwerpunkt genau über die bewußte Ecke. Mit viel Geduld und Spucke ist dann die tischnahe Seitenfläche des Dominos noch weiter jenseits der Tischkante.

Zusatz der Redaktion: In Ergänzung zur Rubrik im September sei angemerkt, daß nach Mitteilung zahlreicher Leser ein Dampftopf „Chi-go" bei der Firma P. Schrader, Postfach 107829, 2800 Bremen zu erhalten ist. Die gleiche Firma bietet auch einen Keramik-Butterkühler an, der allerdings etwas anders konstruiert ist als der im Heft beschriebene. Für Leser in Österreich dürfte interessant sein, daß auch der Hafner- und Töpfermeister Stoißer in der Steiermark (Oberauersbach 2, A-8342 Gnas) eine Variante des Terrakotta-Butterkühlers im Angebot hat.

SPEKTRUM DER WISSENSCHAFT

Verlag:
Spektrum der Wissenschaft Verlagsgesellschaft mbH & Co, Mönchhofstr. 15, D-6900 Heidelberg, Telefon (06221) 49086, Telex 0461842 sdwhd d. Geschäftsführer: Claus-G. Firchow

Chefredaktion:
Albrecht Kunkel (verantwortlich für den Inhalt)

Redaktion:
Dr. Astrid Forberger, Dr. Inge Hoefer, Katharina Neuser-von Oettingen, Dr. Gerhard Trageser, Dr. Georg Wolschin

Produktion:
Klaus Mohr

Vertrieb und Werbung:
Volker Bottke und Jutta Rubin, Ass. Telefon (06221) 46037

Layout:
Henri Wirthner

Verlagsleitung:
Claus-G. Firchow

Vertrieb und Abonnentenverwaltung:
Spektrum der Wissenschaft, Boschstraße 12, D-6940 Weinheim, Telefon (06201) 606150, Telex 0465516 vchwh d

Bezugspreise:
Einzelheft DM 9,00; im Abonnement DM 89,40 für 12 Hefte zuzüglich Versandkosten DM 3,60; im Ausland zuzügl. DM 13,20 Versandkostenanteil. Zahlung sofort nach Rechnungserhalt. Konten: PSchA Karlsruhe 133472-759 (BLZ 66010075); Bezirkssparkasse Weinheim 15385 (BLZ 67052385)

Anzeigen:
Gesellschaft für Wirtschaftspublizistik, Bereichsleitung Anzeigen (verantwortlich): Harald Müsse, Kasernenstraße 67, Postfach 3734, 4000 Düsseldorf 1, Tel. (0211) 8388-0, Telex 8582917

Anzeigenvertretungen:
Berlin: Rainer W. Stengel, Bischofsgrünerweg 91, 1000 Berlin, Tel. (030) 7744516
Hamburg: H. Günter Klempau, Burchardstraße 17, 2000 Hamburg 1, Tel. (040) 326496-7
Osnabrück: Egon F. Naber, Wesereschstraße 21, 4500 Osnabrück, Tel. (0541) 72059
Düsseldorf: Herbert Piehl, Stefan Margies, Hohe Straße 16, 4000 Düsseldorf, Tel. (0211) 8388-462/63
Frankfurt: Friedrich Rode, Gerd Kunath, Joachim Schlemme, Feldbergstraße 12, 6000 Frankfurt am Main, Tel. (069) 720986
Stuttgart: Erwin H. Schäfer, Königstraße 22, 7000 Stuttgart 1, Tel. (0711) 292574
München: Manfred Schiefer, Marlis Lüling-Morio, Elisenstraße 3, 8000 München 2, Tel. (089) 557357

Druckunterlagen an:
Spektrum der Wissenschaft, Mönchhofstraße 15, D-6900 Heidelberg, Telefon (06221) 49088, Telex 0461842 sdwhd d

Anzeigenpreise:
Zur Zeit gilt die Anzeigenpreisliste Nr. 5 vom 1. Januar 1984. Konto: Bezirkssparkasse Weinheim 27499 (BLZ 67052385)

Gesamtherstellung:
Klambt-Druck, Speyer

ISSN 0170-2971