Was sagen Sie zu meiner neuen Mengentheorie, Herr Professor?
Aber Herr Kandidat, die gilt ja bloß für die leere Menge!
Das ändert an der logischen Schönheit meiner Theorie nichts.

so geschehen an einem Universitätsinstitut

2
Der Mathematiker als Homo ludens

Was treibt den Mathematiker? Ist Mathematik Spiel oder Ernst? Zahlen – sind das Zeichen, Symbole für Reales (gar – als Struktur – die einzig erkennbare Realität selber?) – oder sind sie etwas bloß Gedachtes? Ist Mathematik lediglich die Grundlage jeglicher Messtechnik oder auch ästhetisches Vergnügen? Sicher gibt es neben der sinnlichen Schönheit auch eine logische; inwieweit ist sie hier präsent? Zahlen, Zeichen, Rechnerei – sind das bloß alltägliche Trivialitäten oder hat das alles auch mit Philosophie zu tun?

Kein Zweifel: Mathematik hat auch mit Philosophie zu tun. Das wusste die Philosophie seit ihren Anfängen. Die Mathematik ist eben alles zugleich: Sie ist Alltagskram, Rechnerei, Basis der empirischen Wissenschaft; eine sehr praktische, lebensnotwendige, durchaus ernste Angelegenheit. Sie ist darüber hinaus Spiel des sich selbst genügenden Geistes, im wahren Wortsinne Selbstzweck, Produkt reinen Erkenntnistriebes. Ihre Theoreme und Beweise können wahre Kunstwerke sein, bewundernswert nicht allein wegen der hier investierten Erfindungs- und Kombinationsgabe; sie sind einfach „schön“. Was hier erfunden und gefunden wurde, ist teils von höchst praktischer Bedeutung, teils ohne einen erkennbaren praktischen Nutzen (Letzteres zuzugeben scheuen sich viele Mathematiker). Mathematik ist, um die englischen Ausdrücke zu gebrauchen, *art* und *science* zugleich.

Indem wir unseren Blick wieder auf Zahlen und Zahlensysteme verengen: Was kann schon an Zahlen interessant sein?

Zunächst ist es reizvoll, der Frage nach der Ur-Funktion der Zahl nachzugehen. Zahlen bilden die Struktur der Vielheit ab; es gibt die Zahl als Maßzahl, Messzahl, als benannte Zahl: 3,07 cm, 5,1 kg, 16,5 sec; diese ist kontinuierlich veränderlich. Ferner gibt es die Zahl als Anzahl; dann ist sie diskontinuierlich veränderlich: 8 Bäume, 5 Schafe, 12 Häuser. Mit den letzteren muss alles angefangen haben. Am Anfang war die natürliche Zahl: $1, 2, 3, 4, \ldots$ Am Anfang war das Zählen: $a_n = a_{n-1} + 1$. Alle Rechenarten bis hin zum Logarithmieren und Wurzelziehen (man könnte noch weitere, „höhere“ Rechenarten konstruieren) gehen letztlich auf dieses simple Weiterzählen zurück: $1 = 1$; $2 = 1 + 1$; $3 = 2 + 1$ und so weiter.

Doch was „ist“ eine Zahl wie eins, zwei, drei ...? Zahlen bilden eine Struktur, sagten wir; jedenfalls ist das eine Struktur, die mit der uns umgebenden Realität zu tun hat, sie in noch zu bestimmender Weise symbolisiert oder abbildet. Wie „entstehen“ Zahlen? Kein Stein gleicht dem anderen, kein Blatt gleicht dem anderen. Wenn wir sagen: Dort auf der Höhe stehen 8 Bäume, so hat bereits ein Abstraktionsprozess stattgefunden: Die Gegenstände dort haben bestimmte Eigenschaften, die es uns gestatten, sie unter dem Namen/Begriff

Baum zusammenzusehen. Jetzt erst werden sie zählbar: $1, 2, 3, \ldots, 8$. Indem wir von ihren gleichwohl vorhandenen Verschiedenheiten absehen, werden sie zählbar. Mit der Angabe „8 Bäume“ wird ein Stück Wirklichkeit erfasst; Realität bildet sich ab – doch gleichzeitig und vollkommen in eins damit bildet sich eine von uns gemachte Konstruktion ab: Wir haben ja, bevor wir zählen konnten, eine Zusammenfassung vorgenommen. Wir sind es, die begrifflich zusammenfassen. War der achte, kleinere Baum noch ein Baum zu nennen, oder war es vielmehr ein Strauch? Sollten wir deshalb sagen: 7 Bäume?

Zahlen symbolisieren „harte“ Realität und etwas Gedachtes zugleich. Wir werfen ein Netz aus lauter logischen Konstruktionen (Zahlen eingeschlossen) über unsere Umwelt und charakterisieren diese am Netz, durch das Netz, an Hand des Netzes. Das Netz machen zwar wir, aber die Relation zwischen dem Netz und dem darunter (Zugrunde-)Liegenden ist nicht beliebig. Von Paris nach Moskau ist es in harter Realität „weiter“ als von Paris nach London, einerlei, welche Theorie vom Raum wir zugrunde legen, einerlei, welche Längeneinheit wir für die Maschen des Netzes verwenden, was jedes Mal völlig verschiedene Zahlen ergibt. Primäre Welt-Orientierung und -Bewältigung, Welt-Erkenntnis und damit schließlich auch (Natur-)Wissenschaft hat mit der Relation von Vielheiten zueinander zu tun. „Relation zwischen …“ ist erkennbar. Das Einzelne ist unerkennbar. Diesen Satz findet man schon bei Aristoteles. Vielheit wiederum ist charakterisiert durch Individuation, hierarchisch-begriffliche Ordnung, kausale oder andere Verknüpfung, Anordnung in Raum und Zeit und so fort. Das Einzelne können wir höchstens als *dieses* Einzelne *benennen*, aber nicht ohne Vergleich, Zuordnung zu anderem *erfassen*.

Es heißt – und oft mit bedauerndem Unterton –, die empirische Wissenschaft sei wesentlich (bloß) mathematisch verfasst. Das ist ungenau ausgedrückt. Empirische Wissenschaft ist primär reduktionistisch. Das genannte gezielte und systematische Absehen von … ist das erste. So werden, in einem zweiten Schritt, Strukturen erkannt, die dann durch Symbole, darunter Zahlen, beschrieben werden.

Die benannte Zahl symbolisiert also Realität, besser gesagt, eine reale Struktur, einerlei, ob wir es mit Anzahlen (= natürlichen Zahlen) oder mit Maßzahlen (= natürlichen Zahlen, Brüchen) zu tun haben. Mathematik entsteht, indem man die Benennungen wegnimmt und zusieht, was sich über die Zahlen als solche sagen lässt. Die dabei gefundenen Gesetzmäßigkeiten kann man dann gegebenenfalls auf die benannten Zahlen und damit auf die Welt-Beschreibung zurückbeziehen.

Der Mathematiker als Homo ludens – wo fängt das Spiel an, wo hört es auf? Es verhalten sich die Teilgebiete (bzw. Anwendungen) der Mathematik durchaus unterschiedlich. Statistik ist ein der Praxis recht deutlich zugewandtes Fach; bei der Geometrie und der Arithmetik ist das weitgehend der Fall. Die Zahlentheorie hat dagegen wenig signifikanten unmittelbar praktischen Nutzen.

Nichtsdestoweniger wird sie mit Leidenschaft betrieben. Leidenschaft ist hier durchaus wörtlich zu nehmen. Bei der Beschäftigung mit bestimmten logisch strukturierten Themen, in der Mathematik insbesondere, treten Sucht-Effekte auf; man hat das auch „Mausefallen-Effekt“ genannt. Erfolgreiche Problembewältigung löst hier spezielle Lustgefühle aus, die sich derart steigern können, dass der Betroffene glaubt, ihrer nicht mehr entraten zu können. Ob man das nun nur Gewohnheit nennt oder bereits Sucht, ob man solche Abhängigkeit bereits mit einer Drogenabhängigkeit vergleicht, ist hier nicht zu entscheiden und gegebenenfalls Geschmackssache.

Besagtes Hochgefühl kann jedenfalls sehr stark werden; Mathematik kann in diesem Sinne regelrecht *beglücken*. Aber es gibt eben auch die Kehrseite; das Hochgefühl hat seinen Preis. Wenn sich der ersehnte Erfolg nicht einstellen will, gelingt es dem Bedauernswerten oft nicht mehr, sich vom Problem zu lösen. Das ist der Mausefallen-Effekt: Die Tür klappt hinter Dir zu und Du kommst nicht mehr heraus. Das Denken rotiert – gewollt und ungewollt zugleich – weiter um die Aufgabe. Wie dem Teufelskreis entrinnen? Mitunter hilft die ablenkend wirkende Zwischenschaltung eines einfacheren Problems. Oder der Alltag ist es, der mit seinen harten Realitäten für die notwendige Ablenkung sorgt.

Der Mathematiker als Homo ludens. Wir werden dieser besonderen Spezies Wissenschaftler überall in dieser Darstellung begegnen. Wie sehen nun seine Spiele aus? Gehen wir also hinein in dieses Metier. Es fängt ganz harmlos an.

Palindrome sind Worte oder Sätze, die vorwärts und rückwärts gelesen gleich lauten. Das bekannteste Beispiel ist das von Schopenhauer: *Ein Neger mit Gazelle zagt im Regen nie.* Ein anderes, sehr schönes Palindrom von erstaunlicher Länge, in englischer Sprache, lautet: *Doc, note, I dissent. A fast never prevents a fatness. I diet on cod.* (Doktor, hören Sie, ich kann Ihnen nicht zustimmen; Fasten verhindert nicht das Dickwerden; ich mache eine Diät mit Kabeljau). Wer mag das erfunden haben, und wie lange hat er dazu gebraucht?

Die Beschränkung „vorwärts und rückwärts gleich“ erweist sich als rigoros. Es gibt nur wenige leidlich sinnvolle Palindrom-Sätze. Das Kabeljau-Palindrom ist überdies auch noch aktuell.

Nun geht es hier nicht um Wort-Palindrome; wir fragen, wie es mit Zahlen-Palindromen bestellt ist. 12 521 und 262 und 24 355 342 sind offensichtlich solche. Sie sind leicht zu erzeugen und man kann sie beliebig lang machen. Was lässt sich über sie sagen?

Man macht dabei zunächst eine merkwürdige Beobachtung. Die meisten (alle?) natürlichen Zahlen lassen sich zu Palindromen umformen, wenn man die vorwärts gelesene zur rückwärts gelesenen addiert und das gegebenenfalls einige Male wiederholt.

Das zeigen die folgenden Beispiele, bei denen nach 2, 3, 1, 2 Additionen das Palindrom auftaucht. Spiegelzahlen wie 123 und 321 erzeugen natürlich das gleiche Palindrom. Je nach Startzahl kann das Verfahren allerdings mühsam werden.

Palindrom-Beispiele

28	59	112	3 049
82	95	211	9 403
110	154	323	12 452
011	451		25 421
121	605		37 873
	506		
	1 111		

Nun braucht man beim Zahlenpaar 97/79 immerhin 6 Schritte, bis man zum Palindrom gelangt; es heißt 44 044. Beim Paar 98/89 sind es sogar 24 Schritte, und man endet bei 8 813 200 023 188. Alle übrigen Zahlen unter 100 benötigen maximal 4 Schritte. Die kleinste Zahl mit Schrittgröße 3 ist übrigens 59, die kleinste mit Schrittgröße 4 ist 69. Schrittanzahl 5 kommt nicht vor.

Jetzt liegt natürlich die Frage nahe: Endet man immer auf diese Weise bei einem Palindrom? Das wird vermutet, aber noch niemand konnte es beweisen. Es gibt Problemzahlen, die entweder nach sehr vielen Schritten oder auch überhaupt nicht das erwartete Symmetriebild zeitigen. Man weiß es nicht; es ist hier zu bedenken, dass die Stellenzahl wegen der fortgesetzten Addition kontinuierlich zunimmt. Die kleinste dieser Problemzahlen ist 196. Sie wurde von P. R. MOLS aus Riga untersucht. Er gab auf nach 75 Schritten: Kein Palindrom hatte sich gezeigt. [1)] Diese Teufelszahl wurde 1975 einem Computertest unterworfen; nach 237 310 Additions-Schritten gab auch der Computer auf. Mittlerweile (Stand 2005) wurde die Suche bis zu einer Zahl mit 263 Millionen Stellen fortgesetzt, ohne zu einem Palindrom zu führen. [2)]

Man fand immerhin 249 Zahlen unter 10 000, die jeweils nach 100 Additions-Schritten noch kein Palindrom gaben (für die jeweilige Spiegelzahl gilt natürlich dasselbe). Merkwürdigerweise gaben die übrigen Zahlen unter 10 000, das sind etwa 95 %, stets ein Palindrom nach weniger als 24 Schritten, mit der genannten Ausnahme 98/89, die genau 24 Schritte benötigt.

Das größte derzeit bekannte Palindrom erzeugt die Zahl 170 500 000 303 619 996, die nach 228 Additionen einen 112-stelligen Wert liefert; [3)] das 89er Palindrom hatte nur 13 Stellen. [4)] Der aktuelle Stand der Suche nach Palindromzahlen kann der in Fußnote 3) genannten Quelle entnommen werden.

Natürlich ist das Palindrom-Problem direkt mit dem gewählten Stellenwertsystem (hier: Dezimalsystem) verknüpft. Es ist nun für andere Stellenwertsysteme die gleiche Vermutung aufgestellt worden, nach der stets nach x Additionen ein Palindrom erscheinen muss. Es zeigte sich: Für das Dualsystem zumindest (Basis 2) ist die Vermutung falsch. Hier fand man Zahlen, die niemals ein Palindrom liefern können wie $(10110)_2 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$. Im Zehnersystem heißt diese Zahl schlicht 22. Unterwirft man die Dualform dem genannten Additionsverfahren, so zeigen sich immer längere, nach einem bestimmten Gesetz gebildete Ziffernschlangen; letztere können, eben wegen dieser Regel, niemals ein Palindrom konstituieren.

Verblüffend; aber wie kommt man auf so etwas? Unter den ersten 100 Zahlen war uns soeben die Zahl 89 aufgefallen, die als einzige erst nach 24 Additionen ein Palindrom erzeugt. Dazu gibt es eine merkwürdige Parallele.

Wählen wir eine natürliche Zahl Z beliebiger Größe und bilden ihre Quersumme zweiter Ordnung (Was ist das? Als Beispiel diene die Zahl 139; ihre Quersumme zweiter Ordnung

---

1) KORDEMSKI, S. 197
2) Aktuelle Informationen zum Stand des 196-Problems gibt es unter `http://home.cfl.rr.com/p196/`.
3) `http://www.jasondoucette.com/worldrecords.html`
4) GARDNER I, S. 260–261

ist $1^2 + 3^2 + 9^2 = 91$). Gegebenenfalls ist diese Operation mehrfach zu wiederholen. Welche Ausgangszahl Z man nun auch wählt, es kommt dabei immer entweder 1 oder 89 heraus. Andere Zahlen treten nicht auf, gleich, wie groß Z ist. Hier ist sie also wieder, die mysteriöse 89.

Es lässt sich das noch quantifizieren: 17 Zahlen unter 100 enden, so behandelt, bei 1, die übrigen landen alle bei 89 (wenn man die Operation auf 89 selbst anwendet, erhält man in zyklischer Folge nach 8 Schritten wieder 89).

Wir beweisen diese Gesetzmäßigkeit halbempirisch. Zunächst sind alle Quersummen zweiter Ordnung von 4-, 5-, 6-, ..., 12-stelligen Zahlen maximal dreistellig; erst eine 13-stellige Zahl kann (maximal) eine 4-stellige Zahl als Quersumme zweiter Ordnung geben, denn 13 mal 9^2 ist 1 053. Aber dann kommt man im nächsten Schritt ebenfalls zu einer dreistelligen Zahl. Und so fort. Ferner sind, wie leicht ersichtlich, alle Quersummen zweiter Ordnung von dreistelligen Zahlen kleiner als diese Zahlen selbst. Das heißt: Wie groß man auch immer die Zahl Z wählt, man gerät schließlich in den Bereich der zweistelligen Zahlen, jedenfalls nach hinreichend vielen Operationen der genannten Art. Nun probieren wir alle zweistelligen Zahlen durch, was nicht viel Mühe macht; denn es ist beispielsweise die Rechnung für 79 dieselbe wie für 97; ferner treten häufig die gleichen Zwischensummen auf, in welchem Falle man nicht weiterzurechnen braucht. Mit 20 als Ausgangszahl findet man beispielsweise 4, 16, 37, 58, 89 Ende; bei 45 findet man 41, 17, 50, 25, 29, 85, 89 Ende; bei 44 jedoch 32, 13, 10, 1 Ende. So geht es fort bis $Z = 100$. Damit haben wir zwar den Beweis erbracht; doch wie ist man auf diese Kuriosität gekommen?

Zu den erstaunlichen Leistungen der Zahlentüftler gehören auch die folgenden Sequenzen: Die Zahlen 2, 3, 7 sowie 1, 5, 6 zeigen die Beziehung

$$\begin{aligned} 2 + 3 + 7 &= 1 + 5 + 6 \\ 2^2 + 3^2 + 7^2 &= 1^2 + 5^2 + 6^2 \qquad (r = 2) \end{aligned} \tag{2.1}$$

Das ist noch nicht sehr aufregend. Wir gehen also einen Schritt weiter und wählen in der ersten Gruppe 0, 5, 5, 10 und in der zweiten 1, 2, 8, 9. Jetzt gilt

$$\begin{aligned} 0 + 5 + 5 + 10 &= 1 + 2 + 8 + 9 \\ 0^2 + 5^2 + 5^2 + 10^2 &= 1^2 + 2^2 + 8^2 + 9^2 \\ 0^3 + 5^3 + 5^3 + 10^3 &= 1^3 + 2^3 + 8^3 + 9^3 \qquad (r = 3) \end{aligned}$$

Schon besser. Wir bringen jetzt ein Beispiel mit fünf Summanden auf jeder Seite: 1, 4, 12, 13, 20 und 2, 3, 10, 16, 19. Wiederum gilt:

$$\begin{aligned} 1 + 4 + 12 + 13 + 20 &= 2 + 3 + 10 + 16 + 19 \\ 1^2 + 4^2 + 12^2 + 13^2 + 20^2 &= 2^2 + 3^2 + 10^2 + 16^2 + 19^2 \\ 1^3 + 4^3 + 12^3 + 13^3 + 20^3 &= 2^3 + 3^3 + 10^3 + 16^3 + 19^3 \qquad (r = 3) \end{aligned}$$

Man hat sogar Lösungen gefunden für Systeme, die sechs Summanden auf jeder Seite der Gleichung enthalten und bis zur fünften Potenz ($r = 5$) gültig sind:

$$\begin{aligned} &1^r + 6^r + 7^r + 17^r + 18^r + 23^r = 2^r + 3^r + 11^r + 13^r + 21^r + 22^r \\ &\text{mit } r = 1, 2, 3, 4, 5 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Natürlich erfüllen auch alle diese Gleichungen den Trivialfall $r = 0$.

Nun wollen wir weiterhin wissen, ob die aufgeführten Zahlengruppen die einzigen sind, die diesen Potenzbeziehungen genügen. Das ist nicht der Fall. Es gibt sogar jeweils unendlich viele solche Zahlensätze. Zwei allgemeine Formeln dafür seien hier genannt:

Für Gleichung (2.1) mit $r = 1$ oder 2 gilt

$$(a+c)^r + (b+c)^r + (2a+2b+c)^r = c^r + (2a+b+c)^r + (a+2b+c)^r \tag{2.3}$$

Für $a = 1$, $b = 2$ und $c = 1$ ergibt sich das spezielle System (2.1); für $a = 3$, $b = 1$ und $c = 2$ findet man

$$5^r + 3^r + 10^r = 2^r + 9^r + 7^r \qquad (r = 1 \text{ oder } 2)$$

Im Falle (2.2) gibt es die folgende generelle Lösung:

$$\begin{aligned}&a^r + (a+4b+c)^r + (a+b+2c)^r + (a+9b+4c)^r + (a+6b+5c)^r\\&\quad + (a+10b+6c)\\&= (a+b)^r + (a+c)^r + (a+6b+2c)^r + (a+4b+4c)^r + (a+10b+5c)^r\\&\quad + (a+9b+6c)^r\\&\text{mit } r = 1, 2, 3, 4 \text{ oder } 5\end{aligned}$$

Den Werten $a = 1$, $b = 1$ und $c = 2$ entspricht die spezielle Lösung (2.2); für $a = 2$, $b = 2$ und $c = 3$ erhalten wir beispielsweise

$$2^r + 10^r + 13^r + 29^r + 32^r + 40^r = 4^r + 5^r + 20^r + 22^r + 37^r + 38^r \tag{2.4}$$

Den Beweis für diese Generalformeln liefert das recht mühsame Ausrechnen aller Potenzausdrücke nach dem binomischen Lehrsatz und nachfolgende Addition. Es ergibt sich jeweils Identität beider Seiten.

Mit solchen Problemen haben sich die Mathematiker CHRISTIAN GOLDBACH (1690–1764) und LEONHARD EULER (1707–1783) beschäftigt. Besonders bewundernswert ist die Aufstellung der Gleichung (2.2) und ihrer allgemeinen Version (2.4).

Homo ludens: Was fängt man an mit Relationen wie (2.4)? Diese Frage haben sich offenbar die Mathematiker nicht gestellt.