# 1 Grundlagen der Maßtheorie

In diesem Kapitel führen wir die Mengensysteme ein, die eine systematische Betrachtung von Ereignissen und zufälligen Beobachtungen in der Wahrscheinlichkeitstheorie erlauben. Ferner sollen Maße, insbesondere Wahrscheinlichkeitsmaße, auf solchen Mengensystemen konstruiert werden. Schließlich werden wir Zufallsvariablen als messbare Abbildungen definieren.

## 1.1 Mengensysteme

Im Folgenden ist stets $\Omega \neq \emptyset$ eine Menge und $\mathcal{A} \subset 2^{\Omega}$ (Potenzmenge von $\Omega$) eine Familie von Teilmengen. Später wird die Menge $\Omega$ als Raum von Elementarereignissen interpretiert werden und $\mathcal{A}$ als ein System von beobachtbaren Ereignissen. Wir wollen in diesem Abschnitt Mengensysteme, die abgeschlossen sind unter einfachen mengentheoretischen Verknüpfungen, mit Namen versehen und einfache Beziehungen zwischen solchen Systemen herstellen.

**Definition 1.1.** *Das Mengensystem $\mathcal{A}$ heißt*

- $\cap$*-stabil (sprich: schnittstabil) oder ein* $\pi$***-System**, falls für je zwei Mengen* $A, B \in \mathcal{A}$ *gilt, dass auch* $A \cap B \in \mathcal{A}$*,*
- $\sigma$-$\cap$*-stabil (sigma-schnittstabil), falls für je abzählbar unendlich viele Mengen* $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ *gilt, dass auch* $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$*,*
- $\cup$*-stabil (vereinigungsstabil), falls für je zwei Mengen* $A, B \in \mathcal{A}$ *gilt, dass auch* $A \cup B \in \mathcal{A}$*,*
- $\sigma$-$\cup$*-stabil (sigma-vereinigungsstabil), falls für je abzählbar unendlich viele Mengen* $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ *gilt, dass auch* $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$*,*
- $\setminus$*-stabil (differenzmengenstabil), falls für je zwei Mengen* $A, B \in \mathcal{A}$ *gilt, dass auch* $A \setminus B \in \mathcal{A}$*,*
- *komplementstabil, falls mit jeder Menge* $A \in \mathcal{A}$ *auch* $A^c := \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$ *gilt.*

**Definition 1.2** **($\sigma$-Algebra).** *Ein Mengensystem $\mathcal{A} \subset 2^{\Omega}$ heißt **$\sigma$-Algebra**, falls die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind.*

*(i)* $\Omega \in \mathcal{A}$,

*(ii)* *$\mathcal{A}$ ist komplementstabil,*

*(iii)* *$\mathcal{A}$ ist $\sigma$-$\cup$-stabil.*

$\sigma$-Algebren sind die natürlichen Mengensysteme für zufällige Ereignisse, denn wie wir sehen werden, können wir diesen Ereignissen in konsistenter Weise Wahrscheinlichkeiten zuordnen.

**Satz 1.3.** *Ist $\mathcal{A}$ komplementstabil, so gelten die beiden folgenden Äquivalenzen.*

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \text{ ist } \cap\text{-stabil} \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathcal{A} \text{ ist } \cup\text{-stabil}, \\ \mathcal{A} \text{ ist } \sigma\text{-}\cap\text{-stabil} \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathcal{A} \text{ ist } \sigma\text{-}\cup\text{-stabil}. \end{aligned}$$

**Beweis.** Dies folgt direkt aus den de Morgan'schen Regeln (Erinnerung: $(\bigcup A_i)^c = \bigcap A_i^c$). Ist beispielsweise $\mathcal{A}$ $\sigma$-$\cap$-stabil und sind $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$, so ist auch

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \left( \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c \right)^c \in \mathcal{A}.$$

Also ist $\mathcal{A}$ auch $\sigma$-$\cup$-stabil. Die anderen Fälle folgen analog. □

**Satz 1.4.** *Ist $\mathcal{A}$ $\setminus$-stabil, so gelten die folgenden Aussagen.*

*(i)* *$\mathcal{A}$ ist $\cap$-stabil.*

*(ii)* *Falls $\mathcal{A}$ $\sigma$-$\cup$-stabil ist, dann ist $\mathcal{A}$ auch $\sigma$-$\cap$-stabil.*

*(iii)* *Jede abzählbare (beziehungsweise endliche) Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{A}$ lässt sich als abzählbare (beziehungsweise endliche), disjunkte Vereinigung von Mengen in $\mathcal{A}$ schreiben.*

**Beweis.** **(i)** Seien $A, B \in \mathcal{A}$. Dann ist auch $A \cap B = A \setminus (A \setminus B) \in \mathcal{A}$.

**(ii)** Seien $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$. Dann ist

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=2}^{\infty} (A_1 \cap A_n) = \bigcap_{n=2}^{\infty} A_1 \setminus (A_1 \setminus A_n) = A_1 \setminus \bigcup_{n=2}^{\infty} (A_1 \setminus A_n) \in \mathcal{A}.$$

**(iii)** Seien $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$. Dann ist $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ als abzählbare, disjunkte Vereinigung in $\mathcal{A}$ darstellbar durch

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \uplus (A_2 \setminus A_1) \uplus ((A_3 \setminus A_1) \setminus A_2) \uplus (((A_4 \setminus A_1) \setminus A_2) \setminus A_3) \uplus \dots \quad \square$$

**Bemerkung 1.5.** Manchmal bezeichnen wir, wie im obigen Beweis, die Vereinigung paarweise disjunkter Mengen mit dem Symbol $\biguplus$. Dies soll lediglich der optischen Verdeutlichung dienen und ist keine neue Verknüpfung. $\diamond$

**Definition 1.6.** *Ein Mengensystem $\mathcal{A} \subset 2^{\Omega}$ heißt **Algebra**, falls gilt:*

*(i) $\Omega \in \mathcal{A}$,*

*(ii) $\mathcal{A}$ ist $\setminus$-stabil,*

*(iii) $\mathcal{A}$ ist $\cup$-stabil.*

Offenbar ist in einer Algebra stets $\emptyset = \Omega \setminus \Omega$ enthalten. Diese Eigenschaft ist im Allgemeinen jedoch schwächer als (i) in Definition 1.6.

**Satz 1.7.** *Ein Mengensystem $\mathcal{A} \subset 2^{\Omega}$ ist genau dann eine Algebra, wenn es folgende drei Eigenschaften hat:*

*(i) $\Omega \in \mathcal{A}$,*

*(ii) $\mathcal{A}$ ist komplementstabil,*

*(iii) $\mathcal{A}$ ist $\cap$-stabil.*

**Beweis.** Übung! $\square$

**Definition 1.8.** *Ein Mengensystem $\mathcal{A} \subset 2^{\Omega}$ heißt **Ring**, falls gilt:*

*(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$,*

*(ii) $\mathcal{A}$ ist $\setminus$-stabil,*

*(iii) $\mathcal{A}$ ist $\cup$-stabil.*

*Ein Ring heißt **$\sigma$-Ring**, falls er $\sigma$-$\cup$-stabil ist.*

**Definition 1.9.** *Ein Mengensystem $\mathcal{A} \subset 2^{\Omega}$ heißt **Semiring** (oder **Halbring**), falls gilt:*

*(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$,*

*(ii) für je zwei Mengen $A, B \in \mathcal{A}$ ist $B \setminus A$ endliche Vereinigung von paarweise disjunkten Mengen aus $\mathcal{A}$,*

*(iii) $\mathcal{A}$ ist $\cap$-stabil.*

**Definition 1.10.** *Ein Mengensystem $\mathcal{A} \subset 2^{\Omega}$ heißt* **Dynkin-System** *(oder* **$\lambda$-System***), falls gilt:*

*(i) $\Omega \in \mathcal{A}$,*

*(ii) für je zwei Mengen $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \subset B$ ist $B \setminus A \in \mathcal{A}$,*

*(iii) für je abzählbar viele, paarweise disjunkte Mengen $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ gilt $\biguplus_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.*

**Beispiele 1.11.** (i) Ist $\Omega$ eine beliebige nichtleere Menge, so sind $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$ und $\mathcal{A} = 2^{\Omega}$ die trivialen Beispiele für Algebren, $\sigma$-Algebren und Dynkin-Systeme. Hingegen sind $\mathcal{A} = \{\emptyset\}$ und $\mathcal{A} = 2^{\Omega}$ die trivialen Beispiele für Semiringe, Ringe und $\sigma$-Ringe.

(ii) Sei $\Omega = \mathbb{R}$. Dann ist $\mathcal{A} = \{A \subset \mathbb{R} : A \text{ ist abzählbar}\}$ ein $\sigma$-Ring.

(iii) $\mathcal{A} = \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R},\, a \leq b\}$ ist ein Semiring über $\Omega = \mathbb{R}$ (aber kein Ring).

(iv) Die Menge endlicher Vereinigungen von beschränkten Intervallen ist ein Ring über $\Omega = \mathbb{R}$ (aber keine Algebra).

(v) Die Menge endlicher Vereinigungen beliebiger (auch unbeschränkter) Intervalle ist eine Algebra über $\Omega = \mathbb{R}$ (aber keine $\sigma$-Algebra).

(vi) Sei $E$ eine endliche, nichtleere Menge und $\Omega := E^{\mathbb{N}}$ die Menge aller Folgen $\omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit Werten in $E$. Für $\omega_1, \ldots, \omega_n \in E$ sei

$$[\omega_1, \ldots, \omega_n] := \{\omega' \in \Omega : \omega'_i = \omega_i \text{ für jedes } i = 1, \ldots, n\}$$

die Menge aller Folgen, die mit den Werten $\omega_1, \ldots, \omega_n$ beginnen. Sei $\mathcal{A}_0 = \{\emptyset\}$. Für $n \in \mathbb{N}$ setze

$$\mathcal{A}_n := \{[\omega_1, \ldots, \omega_n] : \omega_1, \ldots, \omega_n \in E\}. \tag{1.1}$$

Dann ist $\mathcal{A} := \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_n$ ein Semiring, aber kein Ring (falls $\#E > 1$).

(vii) Sei $\Omega$ eine beliebige nichtleere Menge. Dann ist

$$\mathcal{A} := \{A \subset \Omega : A \text{ oder } A^c \text{ ist endlich}\}$$

eine Algebra. Ist $\#\Omega = \infty$, so ist $\mathcal{A}$ jedoch keine $\sigma$-Algebra.

(viii) Sei $\Omega$ eine beliebige nichtleere Menge. Dann ist

$$\mathcal{A} := \{A \subset \Omega : A \text{ oder } A^c \text{ ist abzählbar}\}$$

eine $\sigma$-Algebra.

(ix) Jede $\sigma$-Algebra ist auch ein Dynkin-System.

(x) Sei $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ und $\mathcal{A} = \big\{\emptyset, \{1,2\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{3,4\}, \{1,2,3,4\}\big\}$. Dann ist $\mathcal{A}$ ein Dynkin-System, aber keine Algebra. ◇

**Satz 1.12 (Inklusionen zwischen Mengensystemen).**

*(i) Jede $\sigma$-Algebra ist ein Dynkin-System, eine Algebra und ein $\sigma$-Ring.*

*(ii) Jeder $\sigma$-Ring ist ein Ring, jeder Ring ein Semiring.*

*(iii) Jede Algebra ist auch ein Ring. Eine Algebra auf einer endlichen Menge $\Omega$ ist auch eine $\sigma$-Algebra.*

**Beweis. (i)** Das ist klar.

**(ii)** Sei $\mathcal{A}$ ein Ring. Nach Satz 1.4 ist $\mathcal{A}$ schnittstabil und damit ein Semiring.

**(iii)** Sei $\mathcal{A}$ eine Algebra, und seien $A, B \in \mathcal{A}$. Dann ist $A \setminus B = (A^c \cup B)^c \in \mathcal{A}$, also ist $\mathcal{A}$ ein Ring. Ist zudem $\Omega$ endlich, so ist $\mathcal{A}$ endlich und damit jede abzählbare Vereinigung in $\mathcal{A}$ schon eine endliche Vereinigung. □

**Definition 1.13 (liminf und limsup).** *Es seien $A_1, A_2, \ldots$ Teilmengen von $\Omega$. Dann heißen*

$$\liminf_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m \quad \textit{und} \quad \limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$$

***Limes inferior*** *beziehungsweise* ***Limes superior*** *der Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

**Bemerkung 1.14.** (i) Es gilt

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \big\{\omega \in \Omega : \#\{n \in \mathbb{N} : \omega \notin A_n\} < \infty\big\},$$
$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \big\{\omega \in \Omega : \#\{n \in \mathbb{N} : \omega \in A_n\} = \infty\big\}.$$

Der Limes inferior ist also das Ereignis, dass *schließlich alle* der $A_n$ eintreten, der Limes superior hingegen das Ereignis, dass unendlich viele der $A_n$ eintreten. Insbesondere ist $A_* := \liminf_{n\to\infty} A_n \subset A^* := \limsup_{n\to\infty} A_n$.

(ii) Bezeichnen wir mit

$$\mathbb{1}_A(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in A, \\ 0, & \text{falls } x \notin A, \end{cases} \tag{1.2}$$

die **Indikatorfunktion** auf der Menge $A$, so gilt

$$\mathbb{1}_{A_*} = \liminf_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n}, \qquad \mathbb{1}_{A^*} = \limsup_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n}.$$

(iii) Ist $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$ eine $\sigma$-Algebra und $A_n \in \mathcal{A}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, so ist $A_* \in \mathcal{A}$ und $A^* \in \mathcal{A}$. ◇

**Beweis.** Übung! □

**Satz 1.15 (Schnitt von Mengensystemen).** *Ist $I$ eine beliebige Indexmenge und $\mathcal{A}_i$ eine $\sigma$-Algebra für jedes $i \in I$, so ist*

$$\mathcal{A}_I := \big\{A \subset \Omega : \ A \in \mathcal{A}_i \quad \textit{für jedes} \ \ i \in I\big\} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$$

*eine $\sigma$-Algebra. Dies gilt analog für: Ringe, $\sigma$-Ringe, Algebren und Dynkin-Systeme; nicht aber für Semiringe.*

**Beweis.** Wir führen den Beweis hier nur für $\sigma$-Algebren durch. Wir prüfen für $\mathcal{A}$ die Punkte (i)-(iii) aus Definition 1.2.

(i) Für jedes $i \in I$ ist $\Omega \in \mathcal{A}_i$. Also ist $\Omega \in \mathcal{A}$.

(ii) Sei $A \in \mathcal{A}$. Dann ist $A \in \mathcal{A}_i$ für jedes $i \in I$. Also ist auch $A^c \in \mathcal{A}_i$ für jedes $i \in I$. Mithin ist $A^c \in \mathcal{A}$.

(iii) Seien $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$. Dann ist $A_n \in \mathcal{A}_i$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $i \in I$. Also ist auch $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}_i$ für jedes $i \in I$ und damit $A \in \mathcal{A}$.

Gegenbeispiel für Semiringe: Seien $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{2, 3\}, \{4\}\}$ und $\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{2\}, \{3, 4\}\}$. Dann sind $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ Semiringe, aber $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 = \{\emptyset, \Omega, \{1\}\}$ ist keiner. □

**Satz 1.16 (Erzeugte $\sigma$-Algebra).** *Sei $\mathcal{E} \subset 2^\Omega$. Dann existiert eine kleinste $\sigma$-Algebra $\sigma(\mathcal{E})$ mit $\mathcal{E} \subset \sigma(\mathcal{E})$:*

$$\sigma(\mathcal{E}) := \bigcap_{\substack{\mathcal{A} \subset 2^\Omega \ \textit{ist } \sigma\textit{-Algebra} \\ \mathcal{A} \supset \mathcal{E}}} \mathcal{A}.$$

*$\sigma(\mathcal{E})$ heißt die von $\mathcal{E}$ **erzeugte $\sigma$-Algebra**. $\mathcal{E}$ heißt **Erzeuger** von $\sigma(\mathcal{E})$. Analog wird das von $\mathcal{E}$ erzeugte Dynkin-System $\delta(\mathcal{E})$ definiert.*

**Beweis.** $\mathcal{A} = 2^\Omega$ ist eine $\sigma$-Algebra mit $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$. Also ist der Schnitt nicht leer. Nach Satz 1.15 ist $\sigma(\mathcal{E})$ eine $\sigma$-Algebra, und dies ist offenbar die kleinste $\sigma$-Algebra, die $\mathcal{E}$ enthält. Für Dynkin-Systeme geht der Beweis genauso. □

**Bemerkung 1.17.** Es gelten die folgenden einfachen Aussagen.

(i) $\mathcal{E} \subset \sigma(\mathcal{E})$.

(ii) Gilt $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}_2$, so ist $\sigma(\mathcal{E}_1) \subset \sigma(\mathcal{E}_2)$.

(iii) $\mathcal{A}$ ist genau dann $\sigma$-Algebra, wenn $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$.

Die analogen Aussagen gelten für Dynkin-Systeme. Ferner ist stets $\delta(\mathcal{E}) \subset \sigma(\mathcal{E})$. ◇

**Satz 1.18 (Schnittstabiles Dynkin-System).** *Ist $\mathcal{D} \subset 2^\Omega$ ein Dynkin-System, so gilt*

$$\mathcal{D} \text{ ist } \cap\text{-stabil} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{D} \text{ ist eine } \sigma\text{-Algebra.}$$

**Beweis. „$\Longleftarrow$"** Dies ist klar.

**„$\Longrightarrow$"** Wir prüfen die Eigenschaften (i)-(iii) aus Definition 1.2.

(i) Offensichtlich ist $\Omega \in \mathcal{D}$.

(ii) (Komplementstabilität) Sei $A \in \mathcal{D}$. Da $\Omega \in \mathcal{D}$ gilt, und nach Eigenschaft (ii) des Dynkin-Systems, ist $A^c = \Omega \setminus A \in \mathcal{D}$.

(iii) ($\sigma$-$\cup$-Stabilität) Seien $A, B \in \mathcal{D}$. Nach Voraussetzung ist $A \cap B \in \mathcal{D}$, und es gilt trivialerweise $A \cap B \subset A$. Also ist $A \setminus B = A \setminus (A \cap B) \in \mathcal{D}$. Mithin ist $\mathcal{D}$ $\setminus$-stabil. Seien nun $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{D}$. Nach Satz 1.4(iii) existieren paarweise disjunkte Mengen $B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{D}$ mit $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \biguplus_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{D}$. □

**Satz 1.19 (Dynkin'scher $\pi$–$\lambda$–Satz).** *Sei $\mathcal{E} \subset 2^\Omega$ ein $\cap$-stabiles Mengensystem. Dann gilt*

$$\sigma(\mathcal{E}) = \delta(\mathcal{E}).$$

**Beweis. „$\supset$"** Dies ist klar nach Bemerkung 1.17.

**„$\subset$"** Zu zeigen ist: $\delta(\mathcal{E})$ ist eine $\sigma$-Algebra. Nach Satz 1.18 reicht es zu zeigen, dass $\delta(\mathcal{E})$ $\cap$-stabil ist. Für $B \in \delta(\mathcal{E})$ sei

$$\mathcal{D}_B := \{A \in \delta(\mathcal{E}) : A \cap B \in \delta(\mathcal{E})\}.$$

Für die Schnittstabilität von $\delta(\mathcal{E})$ reicht es zu zeigen, dass

$$\delta(\mathcal{E}) \subset \mathcal{D}_B \quad \text{für jedes } B \in \delta(\mathcal{E}). \tag{1.3}$$

Wir zeigen, dass $\mathcal{D}_E$ für jedes $E \in \delta(\mathcal{E})$ ein Dynkin-System ist, indem wir (i)-(iii) aus Definition 1.10) prüfen:

(i) Offenbar ist $\Omega \cap E = E \in \delta(\mathcal{E})$, also ist $\Omega \in \mathcal{D}_E$.

(ii) Für $A, B \in \mathcal{D}_E$ mit $A \subset B$ ist $(B \setminus A) \cap E = (B \cap E) \setminus (A \cap E) \in \delta(\mathcal{E})$.

(iii) Seien $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{D}_E$ paarweise disjunkt. Dann ist

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cap E = \biguplus_{n=1}^{\infty} (A_n \cap E) \in \delta(\mathcal{E}).$$

Nach Voraussetzung ist für $A \in \mathcal{E}$ auch $A \cap E \in \mathcal{E}$, also ist $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}_E$, falls $E \in \mathcal{E}$ gilt. Nach Bemerkung 1.17(ii) ist daher auch $\delta(\mathcal{E}) \subset \mathcal{D}_E$ für $E \in \mathcal{E}$. Für $B \in \delta(\mathcal{E})$ und $E \in \mathcal{E}$ ist also $B \cap E \in \delta(\mathcal{E})$. Mithin gilt $E \in \mathcal{D}_B$ für jedes $B \in \delta(\mathcal{E})$, also $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}_B$ für jedes $B \in \delta(\mathcal{E})$, und damit gilt (1.3). □

Von besonderer Bedeutung sind $\sigma$-Algebren, die von Topologien erzeugt werden. Hier wiederum spielt natürlich der euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ die prominenteste Rolle, aber wir wollen auch den (unendlichdimensionalen) Raum $C([0,1])$ der stetigen Funktionen $[0,1] \to \mathbb{R}$ im Blick haben. Auf diesem Raum wird durch die Norm $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$ eine Topologie erzeugt. Zur Erinnerung bringen wir hier das Axiomensystem der Topologie.

**Definition 1.20 (Topologie).** *Sei $\Omega \neq \emptyset$ eine beliebige Menge. Ein Mengensystem $\tau \subset \Omega$ heißt **Topologie** auf $\Omega$, falls folgende drei Eigenschaften gelten.*

*(i) $\emptyset, \Omega \in \tau$.*

*(ii) Sind $A, B \in \tau$, so ist auch $A \cap B \in \tau$.*

*(iii) Ist $\mathcal{F} \subset \tau$ eine beliebige Familie, so ist auch $\left(\bigcup_{A\in\mathcal{F}} A\right) \in \tau$.*

*Das Paar $(\Omega, \tau)$ heißt dann **topologischer Raum**. Die Mengen $A \in \tau$ heißen **offen**, die Mengen $A \subset \Omega$ mit $A^c \in \tau$ heißen **abgeschlossen**.*

Anders als bei $\sigma$-Algebren sind bei Topologien nur endliche Schnitte, jedoch auch überabzählbare Vereinigungen erlaubt. Ist $d$ eine Metrik auf $\Omega$, und bezeichnet

$$B_r(x) = \{y \in \Omega : \ d(x,y) < r\}$$

die offene Kugel um $x \in \Omega$ mit Radius $r > 0$, so wird eine Topologie erzeugt durch

$$\tau = \left\{ \bigcup_{(x,r)\in F} B_r(x) : \ F \subset \Omega \times (0,\infty) \right\}.$$

Dies ist das gewöhnliche System offener Mengen, das man in den meisten Analysisbüchern findet.

**Definition 1.21 (Borel'sche $\sigma$-Algebra).** *Sei $(\Omega, \tau)$ ein topologischer Raum. Die von den offenen Mengen erzeugte $\sigma$-Algebra*

$$\mathcal{B}(\Omega) := \mathcal{B}(\Omega, \tau) := \sigma(\tau)$$

*heißt **Borel'sche $\sigma$-Algebra** auf $\Omega$. Die Elemente $A \in \mathcal{B}(\Omega, \tau)$ heißen **Borel'sche Mengen** oder **Borel-messbare Mengen**.*

**Bemerkung 1.22.** Wir sind meistens an $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ interessiert, wobei wir auf $\mathbb{R}^n$ den euklidischen Abstand annehmen:

$$d(x,y) = \|x-y\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}\,.$$

(i) Es gibt Teilmengen von $\mathbb{R}^n$, die keine Borel'schen Mengen sind. Diese sind kompliziert herzustellen, wie beispielsweise die **Vitali-Mengen**, die man in Analysisbüchern findet (siehe etwa [7]). Wir wollen hier auf diesen Aspekt nicht näher eingehen, sondern lediglich die - mathematisch unpräzise - Feststellung treffen, dass jede Menge, die man sich konstruktiv herstellen kann, auch Borel'sch ist.

(ii) Jede abgeschlossene Menge $C \subset \mathbb{R}^n$ ist in $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, denn es ist $C^c \in \tau$, also ist $C = (C^c)^c \in \sigma(\tau)$. Speziell ist $\{x\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ für jedes $x \in \mathbb{R}^n$.

(iii) $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ist keine Topologie. Sei nämlich $V \subset \mathbb{R}^n$, $V \notin \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Wäre $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ eine Topologie, so wären beliebige Vereinigungen Borel'scher Mengen wieder Borel'sch, also auch $V = \bigcup_{x\in V}\{x\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. ◇

Das Mengensystem der offenen Mengen, das die Borel'sche $\sigma$-Algebra erzeugt, ist in vielen Fällen unhandlich groß. Wir wollen daher andere Mengensysteme als Erzeuger von $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ identifizieren, mit denen wir in der Praxis besser arbeiten können. Hierzu wollen wir einerseits Mengen von einfacher Struktur, Quader etwa, betrachten, andererseits aber auch die Größe des Systems einschränken, indem wir abzählbare Mengensysteme betrachten. Wir führen folgende Notationen ein. Mit $\mathbb{Q}$ bezeichnen wir die Menge der rationalen Zahlen, mit $\mathbb{Q}^+$ die Menge der strikt positiven rationalen Zahlen. Für $a, b \in \mathbb{R}^n$ schreiben wir

$$a < b, \quad \text{falls } a_i < b_i \quad \text{für jedes } i = 1, \dots, n. \tag{1.4}$$

Wir definieren für $a < b$ den offenen **Quader** als das kartesische Produkt

$$(a,b) := \mathop{\times}_{i=1}^{n} (a_i, b_i) := (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_n, b_n) \tag{1.5}$$

und analog $[a,b]$, $(a,b]$ und $[a,b)$. Ferner schreiben wir $(-\infty, b) := \times_{i=1}^{n}(-\infty, b_i)$ und definieren analog $(-\infty, b]$ und so fort. Wir führen die folgenden Mengensysteme ein:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_1 &:= \{A \subset \mathbb{R}^n :\ A \text{ ist offen}\}, & \mathcal{E}_2 &:= \{A \subset \mathbb{R}^n :\ A \text{ ist abgeschlossen}\},\\
\mathcal{E}_3 &:= \{A \subset \mathbb{R}^n :\ A \text{ ist kompakt}\}, & \mathcal{E}_4 &:= \{B_r(x) :\ x \in \mathbb{Q}^n,\ r \in \mathbb{Q}^+\},\\
\mathcal{E}_5 &:= \{(a,b) :\ a,b \in \mathbb{Q}^n,\ a < b\}, & \mathcal{E}_6 &:= \{[a,b) :\ a,b \in \mathbb{Q}^n,\ a < b\},\\
\mathcal{E}_7 &:= \{(a,b] :\ a,b \in \mathbb{Q}^n,\ a < b\}, & \mathcal{E}_8 &:= \{[a,b] :\ a,b \in \mathbb{Q}^n,\ a < b\},\\
\mathcal{E}_9 &:= \{(-\infty,b) :\ b \in \mathbb{Q}^n\}, & \mathcal{E}_{10} &:= \{(-\infty,b] :\ b \in \mathbb{Q}^n\},\\
\mathcal{E}_{11} &:= \{(a,\infty) :\ a \in \mathbb{Q}^n\}, & \mathcal{E}_{12} &:= \{[a,\infty) :\ a \in \mathbb{Q}^n\}.
\end{aligned}$$

**Satz 1.23.** *Die Borel'sche $\sigma$-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ wird von jedem der Mengensysteme $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_{12}$ erzeugt: $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\mathcal{E}_i)$ für jedes $i = 1, \dots, 12$.*

**Beweis.** Wir zeigen nur exemplarisch ein paar der Identitäten.

**(1)** $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\mathcal{E}_1)$ gilt per Definition.

**(2)** Sei $A \in \mathcal{E}_1$. Dann ist $A^c \in \mathcal{E}_2$, also $A = (A^c)^c \in \sigma(\mathcal{E}_2)$. Daher gilt $\mathcal{E}_1 \subset \sigma(\mathcal{E}_2)$ und dann (wegen Bemerkung 1.17) auch $\sigma(\mathcal{E}_1) \subset \sigma(\mathcal{E}_2)$. Analog folgt aber $\sigma(\mathcal{E}_2) \subset \sigma(\mathcal{E}_1)$ und damit die Gleichheit.

**(3)** Jede kompakte Menge ist abgeschlossen. Also gilt $\sigma(\mathcal{E}_3) \subset \sigma(\mathcal{E}_2)$. Sei nun $A \in \mathcal{E}_2$. Dann sind die Mengen $A_K := A \cap [-K, K]^n$, $K \in \mathbb{N}$, kompakt, also ist die abzählbare Vereinigung $A = \bigcup_{K=1}^{\infty} A_K$ in $\sigma(\mathcal{E}_3)$. Es gilt also $\mathcal{E}_2 \subset \sigma(\mathcal{E}_3)$ und damit $\sigma(\mathcal{E}_2) = \sigma(\mathcal{E}_3)$.

**(4)** Offenbar ist $\mathcal{E}_4 \subset \mathcal{E}_1$, also $\sigma(\mathcal{E}_4) \subset \sigma(\mathcal{E}_1)$. Sei nun $A \subset \mathbb{R}^n$ offen. Für $x \in A$ sei $R(x) = \min(1, \sup\{r > 0 : B_r(x) \subset A\})$. Da $A$ offen ist, folgt $R(x) > 0$. Sei $r(x) \in (R(x)/2, R(x)) \cap \mathbb{Q}$. Für jedes $y \in A$ und $x \in B_{R(y)/3} \cap \mathbb{Q}^n$ ist nun $R(x) \geq R(y) - \|x - y\|_2 > \frac{2}{3}R(y)$, also $r(x) > \frac{1}{3}R(y)$, also $y \in B_{r(x)}(x)$. Also ist $A = \bigcup_{x \in A \cap \mathbb{Q}^n} B_{r(x)}(x)$ eine abzählbare Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{E}_4$ und damit in $\sigma(\mathcal{E}_3)$. Es gilt also auch $\sigma(\mathcal{E}_1) \subset \sigma(\mathcal{E}_4)$.

**(5-12)** Ähnliche Ausschöpfungsargumente wie in (4) funktionieren auch für die Quader. In (4) können statt der offenen Kugeln $B_r(x)$ offene Quader genommen werden. So folgt die Gleichheit mit $\sigma(\mathcal{E}_5)$. Man bemerke beispielsweise, dass

$$\bigtimes_{i=1}^{n} [a_i, b_i) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigtimes_{i=1}^{n} \left(a_i - \frac{1}{k}, b_i\right) \in \sigma(\mathcal{E}_5).$$

Die anderen Inklusionen $\mathcal{E}_i \subset \sigma(\mathcal{E}_j)$ zeigt man analog. □

**Bemerkung 1.24.** Jedes der Mengensystem $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3, \mathcal{E}_5, \ldots, \mathcal{E}_{12}$ (nicht aber $\mathcal{E}_4$) ist schnittstabil, mithin ist die Borel'sche $\sigma$-Algebra jeweils gleich dem erzeugten Dynkin-System: $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \delta(\mathcal{E}_i)$ für $i = 1, \ldots, 12$. Die Mengensysteme $\mathcal{E}_4, \ldots, \mathcal{E}_{12}$ sind zudem abzählbar. Dies ist eine Eigenschaft, die wir an späterer Stelle wieder benötigen werden. ◇

**Definition 1.25 (Spur eines Mengensystems).** *Es sei $\mathcal{A} \subset 2^{\Omega}$ ein beliebiges System von Teilmengen von $\Omega$ und $A \in 2^{\Omega} \setminus \{\emptyset\}$. Das Mengensystem*

$$\mathcal{A}\big|_A := \{A \cap B : B \in \mathcal{A}\} \subset 2^A \tag{1.6}$$

*heißt **Spur** von $\mathcal{A}$ auf $A$, oder **Einschränkung** von $\mathcal{A}$ auf $A$.*

**Satz 1.26.** *Ist $\mathcal{A}$ eine $\sigma$-Algebra, oder eines der Mengensysteme aus den Definitionen 1.6 – 1.10 auf $\Omega$, so ist $\mathcal{A}\big|_A$ ein Mengensystem vom selben Typ, allerdings auf $A$ statt $\Omega$.*

**Beweis.** Übung! □

**Übung 1.1.1.** Sei $\mathcal{A}$ ein Semiring. Man zeige: Jede abzählbare (beziehungsweise endliche) Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{A}$ lässt sich als abzählbare (beziehungsweise endliche), *disjunkte* Vereinigung von Mengen in $\mathcal{A}$ schreiben. ♣

**Übung 1.1.2.** Man zeige durch ein Gegenbeispiel, dass im die Allgemeinen die Vereinigung $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ zweier $\sigma$-Algebren keine $\sigma$-Algebra ist. ♣

**Übung 1.1.3.** Seien $(\Omega_1, d_1)$ und $(\Omega_2, d_2)$ metrische Räume, $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ eine beliebige Abbildung und $U_f = \big\{x \in \Omega_1 : f \text{ ist unstetig in } x\big\}$ die Menge der Unstetigkeitsstellen. Man zeige: $U_f \in \mathcal{B}(\Omega_1)$.

Hinweis: Man zeige zunächst, dass für $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$ die Menge

$$U_f^{\delta,\varepsilon} := \big\{x \in \Omega_1 : \quad \text{es gibt } y, z \in B_\varepsilon(x) \text{ mit } d_2(f(y), f(z)) > \delta\big\}$$

(wobei $B_\varepsilon(x) = \{y \in \Omega_1 : d_1(x, y) < \varepsilon\}$) offen ist und konstruiere dann $U_f$ aus solchen Mengen. ♣

**Übung 1.1.4.** Sei $\Omega$ eine überabzählbare Menge und $\mathcal{A} = \sigma(\{\omega\} : \omega \in \Omega)$. Zeige:

$$\mathcal{A} = \big\{A \subset \Omega : A \text{ ist abzählbar oder } A^c \text{ ist abzählbar}\big\}.$$ ♣

**Übung 1.1.5.** Sei $\mathcal{A}$ ein Ring auf der Menge $\Omega$. Man zeige: $\mathcal{A}$ erfüllt die Axiome eines kommutativen Rings (im Sinne der Algebra) mit „$\cap$“ als Multiplikation und „$\triangle$“ als Addition. ♣

## 1.2 Mengenfunktionen

**Definition 1.27.** *Sei $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$ und $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ eine Mengenfunktion. $\mu$ heißt*

*(i)* ***monoton**, falls für je zwei Mengen $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \subset B$ gilt, dass $\mu(A) \leq \mu(B)$,*

*(ii)* ***additiv**, falls für je endlich viele paarweise disjunkte Mengen $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ mit $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$ gilt, dass $\mu\left(\biguplus_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$,*

*(iii)* ***$\sigma$-additiv**, falls für je abzählbar viele paarweise disjunkte Mengen $A_1, A_2, \ldots$ aus $\mathcal{A}$ mit $\bigcup_{i=1}^\infty A_i \in \mathcal{A}$ gilt, dass $\mu\left(\biguplus_{i=1}^\infty A_i\right) = \sum_{i=1}^\infty \mu(A_i)$,*

*(iv)* ***subadditiv**, falls für je endlich viele Mengen $A, A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ mit $A \subset \bigcup_{i=1}^n A_i$ gilt, dass $\mu(A) \leq \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$,*

(v) *$\sigma$-**subadditiv**, falls für je abzählbar viele $A, A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ mit $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ gilt, dass $\mu(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$.*

**Definition 1.28.** *Sei $\mathcal{A}$ ein Semiring und $\mu : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ eine Mengenfunktion mit $\mu(\emptyset) = 0$. $\mu$ heißt*

– ***Inhalt**, falls $\mu$ additiv ist,*
– ***Prämaß**, falls $\mu$ $\sigma$-additiv ist,*
– ***Maß**, falls $\mu$ ein Prämaß ist und $\mathcal{A}$ eine $\sigma$-Algebra,*
– ***Wahrscheinlichkeitsmaß** (kurz **W-Maß**), falls $\mu$ ein Maß ist und $\mu(\Omega) = 1$.*

**Definition 1.29.** *Sei $\mathcal{A}$ ein Semiring. Ein Inhalt $\mu$ auf $\mathcal{A}$ heißt*

(i) ***endlich**, falls $\mu(A) < \infty$ für jedes $A \in \mathcal{A}$,*

(ii) *$\sigma$-**endlich**, falls es Mengen $\Omega_1, \Omega_2, \ldots \in \mathcal{A}$ gibt mit $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ und $\mu(\Omega_n) < \infty$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.*

**Beispiel 1.30 (Inhalte, Maße).** (i) Sei $\omega \in \Omega$ und $\delta_\omega(A) = \mathbb{1}_A(\omega)$ (siehe (1.2)). Dann ist $\delta_\omega$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf jeder $\sigma$-Algebra $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$ und heißt **Dirac-Maß** im Punkt $\omega$, oder **Einheitsmasse**.

(ii) Sei $\Omega$ eine endliche, nichtleere Menge. Durch

$$\mu(A) := \frac{\#A}{\#\Omega} \quad \text{für } A \subset \Omega,$$

wird ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{A} = 2^\Omega$ definiert. $\mu$ heißt **Gleichverteilung** oder **uniforme Verteilung** auf $\Omega$. Wir führen hierfür das Symbol $\mathcal{U}_\Omega := \mu$ ein. Der so definierte Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{U}_\Omega)$ wird auch **Laplace-Raum** genannt.

(iii) Sei $\Omega$ abzählbar unendlich und

$$\mathcal{A} := \{A \subset \Omega : \#A < \infty \text{ oder } \#A^c < \infty\}.$$

Dann ist $\mathcal{A}$ eine Algebra. Die durch

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{falls } A \text{ endlich,} \\ \infty, & \text{falls } A^c \text{ endlich,} \end{cases}$$

auf $\mathcal{A}$ definierte Mengenfunktion ist ein Inhalt, aber kein Prämaß, denn es gilt $\mu\left(\bigcup_{\omega\in\Omega}\{\omega\}\right) = \mu(\Omega) = \infty$, aber $\sum_{\omega\in\Omega} \mu(\{\omega\}) = 0$.

(iv) Sei $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Maßen (Prämaßen, Inhalten) und $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von nichtnegativen Zahlen. Dann ist auch $\mu := \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \mu_n$ ein Maß (Prämaß, Inhalt).

(v) Sei $\Omega$ eine (höchstens) abzählbare, nichtleere Menge und $\mathcal{A} = 2^{\Omega}$. Ferner seien $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ nichtnegative Zahlen. Dann wird durch $\mu(A) := \sum_{\omega\in A} p_\omega$ für jedes $A \subset \Omega$, ein $\sigma$-endliches Maß auf $2^{\Omega}$ definiert. Wir nennen $p = (p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ die **Gewichtsfunktion** von $\mu$.

(vi) Ist in (v) speziell $\sum_{\omega\in\Omega} p_\omega = 1$, so ist $\mu$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß. Wir interpretieren dann $p_\omega$ als Wahrscheinlichkeit des Elementarereignisses $\omega$ und nennen $p = (p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ auch einen **Wahrscheinlichkeitsvektor**.

(vii) Ist in (v) speziell $p_\omega = 1$ für jedes $\omega \in \Omega$, so heißt $\mu$ das **Zählmaß** auf $\Omega$. Ist $\Omega$ endlich, so ist auch $\mu$ endlich.

(viii) Sei $\mathcal{A}$ der Ring endlicher Vereinigungen von Intervallen $(a, b] \subset \mathbb{R}$. Für $a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \ldots < b_n$ und $A = \biguplus_{i=1}^{n} (a_i, b_i]$ setzen wir

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{n} |b_i - a_i|.$$

$\mu$ ist ein $\sigma$-endlicher Inhalt auf $\mathcal{A}$ (sogar ein Prämaß), denn es ist $\bigcup_{n=1}^{\infty}(-n, n] = \mathbb{R}$ und $\mu((-n, n]) = 2n < \infty$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

(ix) Sei $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ stetig. Analog zu (viii) setze

$$\mu_f(A) = \sum_{i=1}^{n} \int_{a_i}^{b_i} f(x)\, dx.$$

$\mu_f$ ist ein $\sigma$-endlicher Inhalt auf $\mathcal{A}$ (sogar ein Prämaß). Die Funktion $f$ heißt **Dichte** und spielt hier eine ähnliche Rolle wie die Gewichtsfunktion $p$ in (v). ◇

**Lemma 1.31 (Eigenschaften von Inhalten).** *Sei $\mathcal{A}$ ein Semiring und $\mu$ ein Inhalt auf $\mathcal{A}$. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

*(i) Ist $\mathcal{A}$ ein Ring, so ist $\mu(A\cup B)+\mu(A\cap B) = \mu(A)+\mu(B)$ für je zwei Mengen $A, B \in \mathcal{A}$.*

*(ii) $\mu$ ist monoton. Ist $\mathcal{A}$ ein Ring, so gilt genauer $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$ für je zwei Mengen $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \subset B$.*

*(iii) $\mu$ ist subadditiv. Ist $\mu$ sogar $\sigma$-additiv, so ist $\mu$ auch $\sigma$-subadditiv.*

*(iv) Ist $\mathcal{A}$ ein Ring, so gilt für je abzählbar viele, paarweise disjunkte Mengen $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ mit $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ stets $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \le \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big)$.*

**Beweis. (i)** Es ist $A \cup B = A \uplus (B \setminus A)$ und $B = (A \cap B) \uplus (B \setminus A)$. Da $\mu$ additiv ist, folgt

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \quad \text{und} \quad \mu(B) = \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A).$$

Hieraus folgt sofort (i).

**(ii)** Sei $A \subset B$. Wegen $A \cap B = A$ folgt $\mu(B) = \mu(A \uplus (B \setminus A)) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$, falls $B \setminus A \in \mathcal{A}$ ist, insbesondere also, falls $\mathcal{A}$ ein Ring ist. Ist nun $\mathcal{A}$ nur ein Semiring, so ist $B \setminus A = \biguplus_{i=1}^{n} C_i$ für gewisses $n \in \mathbb{N}$ und paarweise disjunkte Mengen $C_1, \ldots, C_n \in \mathcal{A}$. In diesem Fall ist $\mu(B) = \mu(A) + \sum_{i=1}^{n} \mu(C_i) \geq \mu(A)$, also ist $\mu$ monoton.

**(iii)** Seien $n \in \mathbb{N}$ und $A, A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ mit $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Setze $B_1 = A_1$ und

$$B_k = A_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i = \bigcap_{i=1}^{k-1} (A_k \setminus (A_k \cap A_i)) \quad \text{für } \; k = 2, \ldots, n.$$

Per Definition des Semirings ist jedes $A_k \setminus (A_k \cap A_i)$ disjunkte Vereinigung endlich vieler Mengen in $\mathcal{A}$, also existiert ein $c_k \in \mathbb{N}$ und Mengen $C_{k,1}, \ldots, C_{k,c_k} \in \mathcal{A}$ mit $\biguplus_{i=1}^{c_k} C_{k,i} = B_k \subset A_k$. Analog existieren $d_k \in \mathbb{N}$ und $D_{k,1}, \ldots, D_{k,d_k} \in \mathcal{A}$ mit $A_k \setminus B_k = \biguplus_{i=1}^{d_k} D_{k,i}$. Da $\mu$ additiv ist, gilt

$$\mu(A_k) = \sum_{i=1}^{c_k} \mu(C_{k,i}) + \sum_{i=1}^{d_k} \mu(D_{k,i}) \geq \sum_{i=1}^{c_k} \mu(C_{k,i}).$$

Wiederum aufgrund von Additivität und Monotonie gilt

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \mu\left( \biguplus_{k=1}^{n} \biguplus_{i=1}^{c_k} (C_{k,i} \cap A) \right) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{c_k} \mu(C_{k,i} \cap A) \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{c_k} \mu(C_{k,i}) \leq \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k). \end{aligned}$$

Also ist $\mu$ subadditiv. Die $\sigma$-Subadditivität folgt aus der $\sigma$-Additivität in analoger Weise.

**(iv)** Sei $\mathcal{A}$ ein Ring und $A = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$. Da $\mu$ additiv (und damit monoton) ist, gilt nach (ii)

$$\sum_{n=1}^{m} \mu(A_n) = \mu\left( \biguplus_{n=1}^{m} A_n \right) \leq \mu(A) \quad \text{für jedes } \; m \in \mathbb{N}.$$

Also ist $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leq \mu(A)$. $\square$

**Bemerkung 1.32.** In (iv) kann strikte Ungleichheit herrschen (siehe etwa Beispiel 1.30(iii)). Mit anderen Worten: Es gibt Inhalte, die keine Prämaße sind. $\diamond$

**Satz 1.33 (Einschluss- Ausschlussformel).** *Sei $\mathcal{A}$ ein Ring und $\mu$ ein Inhalt. Dann gelten für $n \in \mathbb{N}$ und $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ die Einschluss- Ausschlussformeln*

$$\mu(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{\{i_1,\ldots,i_k\} \subset \{1,\ldots,n\}} \mu(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}),$$

$$\mu(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{\{i_1,\ldots,i_k\} \subset \{1,\ldots,n\}} \mu(A_{i_1} \cup \ldots \cup A_{i_k}),$$

*wobei sich die Summen über alle $k$-elementigen Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$ erstrecken.*

**Beweis.** Übung! Hinweis: Man verwende vollständige Induktion über $n$. $\square$

Wir wollen die $\sigma$-Subadditivität durch eine Stetigkeitseigenschaft charakterisieren (Satz 1.36). Hierzu verabreden wir die folgende Sprechweise und Notation.

**Definition 1.34.** *Sind $A, A_1, A_2, \ldots$ Mengen, so schreiben wir*

- $A_n \uparrow A$, *falls* $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ *und* $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$,
- $A_n \downarrow A$, *falls* $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$ *und* $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A$.

*Wir sagen dann, dass $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $A$ aufsteigt beziehungsweise absteigt.*

**Definition 1.35 (Stetigkeit von Inhalten).** *Sei $\mu$ ein Inhalt auf dem Ring $\mathcal{A}$.*

*(i) $\mu$ heißt* ***stetig von unten****, falls für jedes $A \in \mathcal{A}$ und jede Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{A}$ mit $A_n \uparrow A$ gilt: $\mu(A_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu(A)$.*

*(ii) $\mu$ heißt* ***stetig von oben****, falls für jedes $A \in \mathcal{A}$ und jede Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{A}$ mit $A_n \downarrow A$ sowie $\mu(A_n) < \infty$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\mu(A_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu(A)$.*

*(iii) $\mu$ heißt* ***$\emptyset$-stetig****, falls (ii) für $A = \emptyset$ gilt.*

Bei der Stetigkeit von oben wurde die Endlichkeitsbedingung eingeführt, weil sogar für das Zählmaß $\mu$ auf $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}})$ und $A_n := \{n, n+1, \ldots\} \downarrow \emptyset$ sonst keine Gleichheit gelten kann.

**Satz 1.36 (Stetigkeit und Prämaß).** *Sei $\mu$ ein Inhalt auf einem Ring $\mathcal{A}$. Betrachte die folgenden fünf Eigenschaften.*

*(i) $\mu$ ist $\sigma$-additiv (also ein Prämaß).*

*(ii) $\mu$ ist $\sigma$-subadditiv.*

*(iii) $\mu$ ist stetig von unten.*

*(iv) $\mu$ ist $\emptyset$-stetig.*

*(v) $\mu$ ist stetig von oben.*

*Dann gelten die Implikationen* $(i) \iff (ii) \iff (iii) \Longrightarrow (iv) \iff (v)$.

*Ist $\mu$ endlich, so gilt auch (iv) $\Longrightarrow$ (iii).*

**Beweis. „(i) $\Longrightarrow$ (ii)"** Seien $A, A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ mit $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Setze $B_1 = A_1$ und $B_n = A_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \in \mathcal{A}$ für $n = 2, 3, \ldots$ Dann ist $A = \biguplus_{n=1}^{\infty}(A \cap B_n)$, also wegen der Monotonie von $\mu$ und der $\sigma$-Additivität von $\mu$

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Damit ist $\mu$ als $\sigma$-subadditiv erkannt.

**„(ii) $\Longrightarrow$ (i)"** Dies folgt aus Lemma 1.31(iv).

**„(i) $\Longrightarrow$ (iii)"** Sei $\mu$ ein Prämaß und $A \in \mathcal{A}$ sowie $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{A}$ mit $A_n \uparrow A$ sowie $A_0 = \emptyset$. Dann gilt

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i \setminus A_{i-1}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i \setminus A_{i-1}) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

**„(iii) $\Longrightarrow$ (i)"** Gelte nun (iii). Seien $B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{A}$ paarweise disjunkt, und gelte $B = \biguplus\limits_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{A}$. Setze $A_n = \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Dann folgt aus (iii)

$$\mu(B) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i).$$

Also ist $\mu$ $\sigma$-additiv und damit ein Prämaß.

**„(iv) $\Longrightarrow$ (v)"** Seien $A, A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ mit $A_n \downarrow A$ und $\mu(A_1) < \infty$. Setze $B_n = A_n \setminus A \in \mathcal{A}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $B_n \downarrow \emptyset$. Es gilt also $\mu(A_n) - \mu(A) = \mu(B_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

**„(v) $\Longrightarrow$ (iv)"** Dies ist trivial.

**„(iii) $\Longrightarrow$ (iv)“** Seien $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ mit $A_n \downarrow \emptyset$ und $\mu(A_1) < \infty$. Dann gilt $A_1 \setminus A_n \in \mathcal{A}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $A_1 \setminus A_n \uparrow A_1$, also

$$\mu(A_1) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_1 \setminus A_n) = \mu(A_1) - \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Wegen $\mu(A_1) < \infty$ ist $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$.

**„(iv) $\Longrightarrow$ (iii)“** (für den Fall $\mu$ endlich) Es gelte nun $\mu(A) < \infty$ für jedes $A \in \mathcal{A}$, und $\mu$ sei $\emptyset$-stetig. Seien $A, A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ mit $A_n \uparrow A$. Dann gilt $A \setminus A_n \downarrow \emptyset$ und

$$\mu(A) - \mu(A_n) = \mu(A \setminus A_n) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Also gilt (iii). □

**Beispiel 1.37.** (Vergleiche Beispiel 1.30(iii).) Sei $\Omega$ abzählbar und

$$\mathcal{A} = \{A \subset \Omega : \#A < \infty \ \text{ oder } \ \#A^c < \infty\},$$

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{falls } A \text{ endlich}, \\ \infty, & \text{falls } A \text{ unendlich}. \end{cases}$$

Dann ist $\mu$ ein $\emptyset$-stetiger Inhalt, aber kein Prämaß. ◇

**Definition 1.38.** *(i) Ein Paar $(\Omega, \mathcal{A})$, bestehend aus einer nichtleeren Menge $\Omega$ und einer $\sigma$-Algebra $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$, heißt **Messraum**. Die Mengen $A \in \mathcal{A}$ heißen **messbare Mengen**. Ist $\Omega$ höchstens abzählbar und $\mathcal{A} = 2^\Omega$, so heißt der Messraum $(\Omega, 2^\Omega)$ **diskret**.*

*(ii) Ein Tripel $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ heißt **Maßraum**, wenn $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum ist und $\mu$ ein Maß auf $\mathcal{A}$.*

*(iii) Ist zudem $\mu(\Omega) = 1$, so heißt $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein **Wahrscheinlichkeitsraum**. In diesem Fall heißen die Mengen $A \in \mathcal{A}$ auch **Ereignisse**.*

*(iv) Den Raum aller endlichen Maße auf $(\Omega, \mathcal{A})$ bezeichnen wir mit $\mathcal{M}_f(\Omega) := \mathcal{M}_f(\Omega, \mathcal{A})$, den der W-Maße mit $\mathcal{M}_1(\Omega) := \mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{A})$, schließlich den der $\sigma$-endlichen Maße mit $\mathcal{M}_\sigma(\Omega, \mathcal{A})$.*

## 1.3 Fortsetzung von Maßen

In diesem Abschnitt wollen wir Maße konstruieren, indem wir zunächst auf einem einfachen Mengensystem, nämlich einem Semiring, plausible Werte für einen Inhalt angeben und dann, nach Möglichkeit, diesen Inhalt zu einem Maß auf der erzeugten $\sigma$-Algebra fortsetzen. Bevor wir zu den konkreten Bedingungen kommen, unter denen das machbar ist, bringen wir zwei Beispiele.