

T Schwingungsdauer = $1/f$, Dauer einer vollen Schwingung,
 J Trägheitsmoment des die Drehschwingung ausführenden Körpers,
 bezogen auf seine Drehachse,

dann gelten analog zu (M 13.11)

$$(M\ 13.13) \quad \omega = \sqrt{\frac{D}{J}}; \quad f = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{D}{J}}; \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{D}}$$

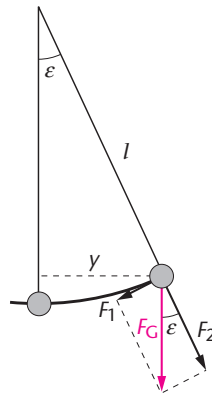
SI	$\frac{D}{\text{rad}}$	M	ε	ω	f	T	J
	$\frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{rad}}$	$\text{N} \cdot \text{m}$	rad	$\frac{1}{\text{s}}$	$\text{Hz} = \frac{1}{\text{s}}$	s	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$

13.2.4 Pendelschwingungen

Pendel führen Drehschwingungen aus. Das rückstellende Drehmoment wird von der Schwerkraft erzeugt.

Mathematisches Pendel

Das Fadenpendel mit punktförmiger Masse am masselosen Faden ist nicht realisierbar. Ist jedoch die Masse des Fadens vernachlässigbar klein gegenüber der Masse des Pendelkörpers und die Fadenlänge groß gegenüber den Abmessungen des Körpers, dann kann mit ausreichender Genauigkeit die Bewegung des mathematischen Pendels als lineare Schwingung angesehen werden, solange die Auslenkung nach jeder Seite klein bleibt ($\varepsilon < 8^\circ$).



Wenn

T Schwingungsdauer = $1/f$, Dauer eines vollen Hin- und Herganges (Periode),

l Pendellänge, Abstand Drehpunkt–Schwerpunkt,

g Fallbeschleunigung = $9,807 \text{ m/s}^2$ (auf der Erde),

dann gilt $F_1/F_G = y/l$ und, da y bei kleinem Winkel ε dem Weg auf dem Bogen gleichgesetzt werden kann, entsprechend (M 13.8)

$$k = \frac{F_1}{y} = \frac{F_G}{l} = \frac{mg}{l} \quad \text{und eingesetzt in (M 13.11)}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{mg}} \quad \text{oder}$$

$$(M\ 13.14) \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$\text{SI} \left| \begin{array}{ccc} T & l & g \\ \text{s} & \text{m} & \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{array} \right.$$

Beachte:

- Die Schwingungsdauer T hängt nicht von der Masse des Pendelkörpers ab.
- Die Schwingungsdauer hängt innerhalb der angegebenen Grenzen ($\varepsilon < 8^\circ$) nicht von der Amplitude ab.



Physisches Pendel

Pendel, bei denen die Bedingungen des mathematischen Pendels nicht erfüllt sind, heißen physische (d. h. körperliche) Pendel (leider manchmal physikalische Pendel genannt).

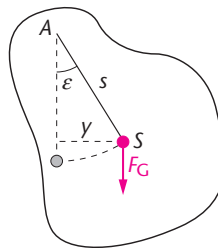
Wenn

T Schwingungsdauer = $1/f$,

J_A Trägheitsmoment des pendelnden Körpers, bezogen auf die durch den Drehpunkt A gehende Achse,

m Masse des pendelnden Körpers,

s Abstand Drehpunkt A – Schwerpunkt S ,



dann gilt

$$D = \frac{M}{\varepsilon} = \frac{F_G y}{\varepsilon} = \frac{F_G s \sin \varepsilon}{\varepsilon} \quad \text{oder, weil bei kleinen Winkeln } \frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon} \approx 1,$$

$$D = F_G s = mgs \quad \text{und entsprechend (M 13.13)}$$

$$(M\ 13.15) \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{J_A}{mgs}}$$

$$\text{SI} \left| \begin{array}{ccccc} T & J & m & g & s \\ \text{s} & \text{kg} \cdot \text{m}^2 & \text{kg} & \frac{\text{m}}{\text{s}^2} & \text{m} \end{array} \right.$$

Beachte:

- (M 13.15) gilt nur für Amplituden kleiner als $\approx 8^\circ$.
- J_A ist mit dem Satz von STEINER zu bestimmen.
- Mit $J_A = ms^2$ und $s = l$ ergibt sich die Schwingungsdauer des mathematischen Pendels (M 13.14).

Reduzierte Pendellänge

Unter der *reduzierten Pendellänge* eines physischen Pendels versteht man die Länge eines mathematischen Pendels gleicher Schwingungsdauer.

Wenn

l' reduzierte Pendellänge,

J_A Trägheitsmoment, bezogen auf die durch den Drehpunkt A gehende Achse,

m Masse des physischen Pendels,

s Abstand Schwerpunkt S –Drehpunkt A ,

dann gilt entsprechend (M 13.14) und (M 13.15)

$$2\pi\sqrt{\frac{l'}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{J_A}{mgs}} \quad \text{oder}$$

$$(M 13.16) \quad l' = \frac{J_A}{ms} \quad \text{SI} \quad \left| \begin{array}{cccc} l' & J_A & m & s \\ \text{m} & \text{kg} \cdot \text{m}^2 & \text{kg} & \text{m} \end{array} \right.$$

Beachte:

- Im Abstand l' senkrecht unter dem Aufhängepunkt eines drehbar gelagerten Körpers befindet sich der **Schwingungs-** oder **Stoßmittelpunkt**. Stöße, die den Körper zum Pendeln bringen sollen, müssen gegen diesen Punkt gerichtet sein, wenn im Aufhängepunkt keine „Rückstöße“ auftreten sollen.
- Die Schwingungsdauer eines physischen Pendels ändert sich nicht, wenn Aufhängepunkt und Schwingungsmittelpunkt vertauscht werden. Anwendung beim **Reversionspendel** z. B. zur Bestimmung der Fallbeschleunigung.

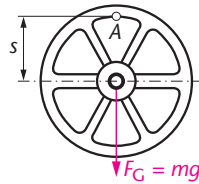
Bestimmung des Trägheitsmoments

Durch Messung von s , m und T kann das Trägheitsmoment eines beliebigen Körpers experimentell bestimmt werden.

Aus (M 13.15) und (M 7.57) folgt

$$J_S = \frac{mgsT^2}{4\pi^2} - ms^2 \quad \text{oder}$$

$$(M 13.17) \quad J_S = ms \left(\frac{gT^2}{4\pi^2} - s \right) \quad \text{SI} \quad \left| \begin{array}{cccc} J & m & g & s & T \\ \text{kg} \cdot \text{m}^2 & \text{kg} & \frac{\text{m}}{\text{s}^2} & \text{m} & \text{s} \end{array} \right.$$



Beachte:

- Zur Bestimmung von J_S ist der Körper an einem Punkt *außerhalb* S aufzuhängen und mit *kleiner* Amplitude anzustoßen.

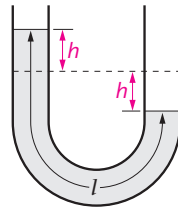
13.2.5 Flüssigkeitsschwingungen

Wird die Flüssigkeit in den Schenkeln eines U-Rohres aus dem Gleichgewicht gebracht, so führt sie harmonische Schwingungen aus.



Wenn

- T Schwingungsdauer = $1/f$,
- l Länge der Flüssigkeitssäule von Oberfläche bis Oberfläche,
- g Fallbeschleunigung = $9,807 \text{ m/s}^2$ (auf der Erde),



dann gilt, wenn der Höhenunterschied zwischen beiden Oberflächen $2h$ beträgt, für die Rückstellkraft $F_R = F_G = -2hA\rho g$. Die Richtgröße $k = -F_R/y = -F_R/h$ ergibt sich zu $k = 2A\rho g$. Mit der Masse $m = lA\rho$ folgt für die Schwingungsdauer entsprechend (M 13.11) $T = 2\pi\sqrt{m/k}$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{lA\rho}{2A\rho g}} \quad \text{und daraus}$$

(M 13.18) $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}}$ SI $\left[\begin{array}{c} T \quad l \quad g \\ \text{s} \quad \text{m} \quad \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{array} \right]$

Beachte:

- Die Schwingungsdauer hängt nur von l , nicht aber von ρ , A oder h ab.
- Die schwingende Flüssigkeitssäule besitzt die gleiche Schwingungsdauer wie ein mathematisches Pendel mit der halben Länge der Flüssigkeitssäule.

13.2.6 Schwingungsenergie

Die Energie eines ungedämpft schwingenden Systems ist konstant. Sie setzt sich aus potenzieller Energie E_p und kinetischer Energie E_k zusammen. Beide Energiearten ändern ihre Größe periodisch. Zu jedem

Zeitpunkt gilt $E = E_p + E_k$. Mit (M 7.21) und (M 7.19) ergibt sich

$$E = \frac{ky^2}{2} + \frac{mv^2}{2}.$$

Wenn

E Energie des Schwingers,

k Richtgröße,

y Amplitude, Auslenkungsmaximum,

φ Phasenwinkel $= \omega t + \varphi_0$,

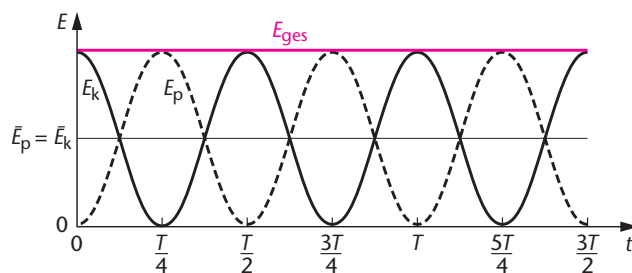
dann gilt mit (M 13.2) und (M 13.3)

$$E = \frac{k}{2}\dot{y}^2 \sin^2 \varphi + \frac{m}{2}\dot{y}^2 \omega^2 \cos^2 \varphi. \quad \text{Mit (M 13.8) } m\omega^2 = k \text{ folgt}$$

$$E = \frac{k}{2}\dot{y}^2 \sin^2 \varphi + \frac{k}{2}\dot{y}^2 \cos^2 \varphi, \quad \text{daraus}$$

$$E = \frac{k}{2}\dot{y}^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) \quad \text{und schließlich}$$

$$(M 13.19) \quad E = \frac{k\dot{y}^2}{2} = \frac{m\dot{v}^2}{2} \quad \text{SI} \left[\begin{array}{l} E \\ J = \text{N} \cdot \text{m} \\ \frac{\text{N}}{\text{m}} \\ \text{m} \\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ \text{kg} \\ \text{rad} = 1 \end{array} \right]$$



Beachte:

- Die Gesamtenergie ist konstant. Die *periodische* Umwandlung von kinetischer in potenzielle Energie (und umgekehrt) erfolgt mit der doppelten Frequenz des Schwingers.
- Beim Nulldurchgang ($t = 0$, $\varphi = 0$) besitzt der Schwinger nur kinetische Energie, die potenzielle Energie ist null. In den Umkehrpunkten ist es umgekehrt.

Übersicht:

	allgemein	Umkehrpunkt	Nulldurchgang
$E_p =$	$\frac{ky^2}{2} = \frac{k\hat{y}^2}{2} \sin^2 \varphi$	$\hat{E}_p = \frac{k\hat{y}^2}{2}$	0
$E_k =$	$\frac{mv^2}{2} = \frac{m\dot{y}^2}{2} \cos^2 \varphi$	0	$\hat{E}_k = \frac{m\dot{y}^2}{2}$



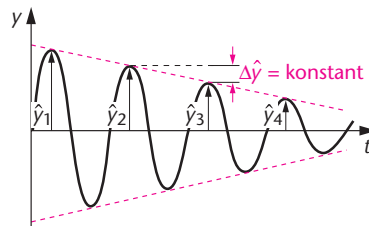
13.3 Freie gedämpfte Schwingung

Die Energie eines schwingenden Systems wird durch bremsende Kräfte wie innere und äußere Reibung, Luftwiderstand u. Ä. allmählich aufgezehrt. Da $E \sim \hat{y}^2$ (M 13.19), nimmt auch die Amplitude \hat{y} bis zu null ab.

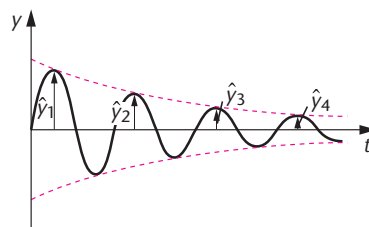
Als *Dämpfung* bezeichnet man das gesetzmäßige Abnehmen der Amplitude im Verlaufe einer Schwingung.

Dabei sind – unabhängig von der Art der dämpfenden Kraft – zwei Möglichkeiten zu unterscheiden:

- ▶ Die Kraft ist konstant, z. B. Reibung in der Lagerung des Schwingers. Dann sind die Amplituden Glieder einer fallenden *arithmetischen* Reihe, sie nehmen *linear* ab. Die *Differenz* zweier benachbarter Amplituden gleichen Vorzeichens ($\hat{y}_i - \hat{y}_{i+1}$) ist konstant.



- ▶ Die Kraft ist der Momentangeschwindigkeit proportional, z. B. innere Reibung bei elastischer Verformung. Dann sind die Amplituden Glieder einer fallenden *geometrischen* Reihe, sie nehmen *exponentiell* ab. Der *Quotient* zweier benachbarter Amplituden gleichen Vorzeichens (\hat{y}_i/\hat{y}_{i+1}) ist konstant.



■ Bei gedämpften Schwingungsvorgängen wird in der Technik die geschwindigkeitsabhängige Dämpfung angestrebt. Da sich aber auch bei guter Lagerung des Schwingers Reibung nie ganz vermeiden lässt, treten beide Dämpfungsarten meist gleichzeitig auf. Die Gesamthüllkurve der Amplituden ergibt sich dann aus einer Überlagerung beider Hüllkurven (algebraische Addition der momentanen Elongationen).

13.3.1 Schwingungsgleichung

Verursacht wird die Dämpfung durch eine Kraft (meist innere Reibung), die der Geschwindigkeit proportional und ihr entgegengerichtet ist: $F_D \sim -v$. Der Proportionalitätsfaktor wird als **Dämpfungskonstante** β bezeichnet, also $F_d = -\beta v = \beta \dot{y}$.

SI-Einheit der Dämpfungskonstanten: $[\beta] = \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}} = \frac{\text{kg}}{\text{s}}$.

Aus Zweckmäßigkeitsgründen führt man den **Abklingkoeffizienten** $\delta = \beta/(2m)$ ein.

SI-Einheit des Abklingkoeffizienten: $[\delta] = \frac{1}{\text{s}}$.

Wenn

y Elongation, Auslenkung,

\dot{y} Momentangeschwindigkeit,

\ddot{y} Momentanbeschleunigung,

β Dämpfungskonstante $= 2m\delta$,

δ Abklingkoeffizient $= \beta/(2m)$,

ω_0 Eigenkreisfrequenz (Kennkreisfrequenz) der gleichen Schwingung *ohne* Dämpfung $= 2\pi f_0$,

dann lautet die Grundgleichung der Dynamik (M 7.1) für diesen Fall: Rückstellkraft + Dämpfungskraft = Masse \times Beschleunigung, also

$-ky - \beta \dot{y} = m\ddot{y}$. Daraus folgt

$\ddot{y} + \frac{\beta}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y = 0$. Mit $\frac{\beta}{m} = 2\delta$ und $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ ergibt sich die

Gleichung der gedämpften Schwingung

(M 13.20) $\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 y = 0$

Beachte:

- Die Begriffe *Dämpfungskonstante*, *Abklingkoeffizient*, *Dämpfungs-koeffizient* u. a. sowie ihre Formelzeichen werden in der Literatur nicht einheitlich verwendet.

13.3.2 Elongation

Wenn

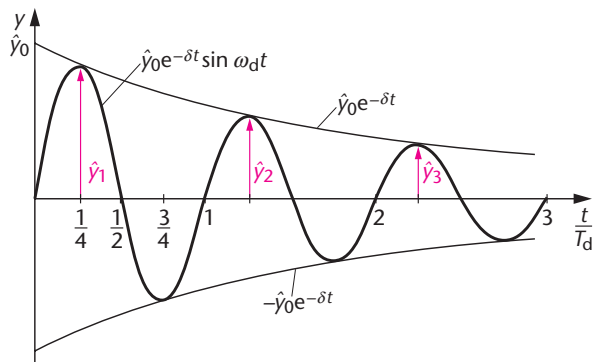
- y Elongation (Auslenkung) zur Zeit t ,
- \hat{y}_0 Anfangswert der Amplitudenhüllkurve (zur Zeit $t = 0$),
- \hat{y} Amplitude,
- e Basis des natürlichen Logarithmus = 2,718 28 . . . ,
- φ Phasenwinkel = $\omega_d t + \varphi_0$,
- ω_d Kreisfrequenz der gedämpften Schwingung \rightarrow (M 13.29),
- φ_0 Nullphasenwinkel,
- δ Abklingkoeffizient = $\beta / (2m)$,

dann gilt als eine Lösung der Differenzialgleichung (M 13.20)

(M 13.21) $y = \hat{y}_0 e^{-\delta t} \sin \varphi$ SI $\left| \begin{array}{cccc} y, \hat{y}_0 & t & \delta & \varphi \\ \text{m} & \text{s} & \frac{1}{\text{s}} & \text{rad} = 1 \end{array} \right.$



- Für Messungen und Rechnungen ist es günstig, die Zeit mit $t = 0$ von einem Augenblick an zu zählen, der eine bequeme (mathematische) Anwendung von (M 13.21) ermöglicht. Dies sind der Durchgang durch die Mittellage und der Umkehrpunkt.



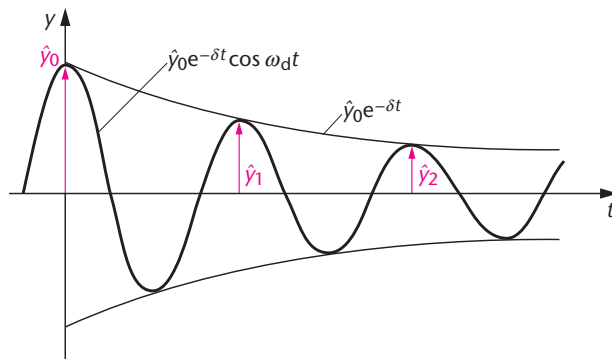
- Im Augenblick des *Nulldurchgangs* herrschen folgende Anfangsbedingungen: $t = 0, y_0 = 0, v_0 = \dot{v}, \varphi_0 = 0$. An Stelle des (nicht

messbaren) Anfangswertes der Amplitudenhüllkurve \hat{y}_0 wird wegen (M 13.4) $\hat{v} = \hat{y}\omega$ in (M 13.21) \hat{y}_0 durch \hat{v}/ω_d ersetzt.

$$(M 13.22) \quad y = \frac{\hat{v}}{\omega_d} e^{-\delta t} \sin \omega_d t$$

► Im *Umkehrpunkt* gelten die Anfangsbedingungen: $t = 0, v_0 = 0, y_0 = \hat{y}_0, \varphi_0 = 90^\circ = \pi/2$ rad. (M 13.21) nimmt die Form an

$$(M 13.23) \quad y = \hat{y}_0 e^{-\delta t} \sin \left(\omega_d t + \frac{\pi}{2} \right) = \hat{y}_0 e^{-\delta t} \cos \omega_d t$$



■ Der Quotient zweier aufeinander folgender Amplituden gleichen Vorzeichens ist konstant und wird als Amplitudenverhältnis q (manchmal Dämpfungsverhältnis \varkappa) bezeichnet.

Wenn

q Amplitudenverhältnis,

δ Abklingkoeffizient $= \beta/(2m)$,

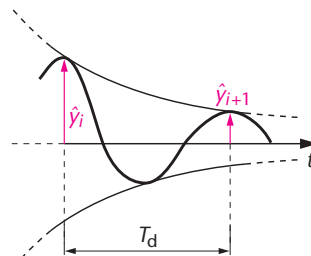
T_d Schwingungsdauer der gedämpften Schwingung,

Λ logarithmisches Dekrement,

n beliebige ganze Zahl,

dann gilt $\hat{y}_i/\hat{y}_{i+1} = q$. Daraus folgt für die n -te Amplitude

$$(M 13.24) \quad \hat{y}_{i+n} = \frac{\hat{y}_i}{q^n}$$



Da der zeitliche Abstand zweier benachbarter Amplituden eine Schwingungsdauer T_d beträgt, folgt aus (M 13.21)

$$(M 13.25) \quad e^{\delta T_d} = \frac{\hat{y}_i}{\hat{y}_{i+1}} = q \quad \text{und}$$

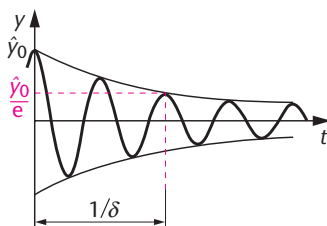
$$(M 13.26) \quad e^{n\delta T_d} = \frac{\hat{y}_i}{\hat{y}_{i+n}} = q^n \quad \text{SI} \left[\frac{\delta}{s} T \right]$$

Den Exponenten δT_d bezeichnet man als **logarithmisches Dekrement** Λ . Aus (M 13.25) erhält man durch Logarithmieren

$$(M 13.27) \quad \Lambda = \delta T_d = \ln \frac{\hat{y}_i}{\hat{y}_{i+1}} = \ln q \quad \text{Einheiten} \rightarrow (M 13.26)$$

■ Die Amplituden nehmen exponentiell mit der Zeit ab. Die für den Rückgang auf den e -ten Teil des Anfangswertes erforderliche Zeit heißt **Abklingzeit** τ . Aus (M 13.21) folgt mit $y = \hat{y}_0/e = \hat{y}_0 e^{-\delta\tau}$

$$(M 13.28) \quad \tau = \frac{1}{\delta}$$



Für die **Halbwertszeit** T_H , also die Zeit, in der die Amplitude auf die Hälfte ihres Anfangswertes sinkt, folgt aus (M 13.21)

$$\frac{\hat{y}_0}{2} = \hat{y}_0 e^{-\delta T_H}. \quad \text{Logarithmieren ergibt } \ln 2 = \delta T_H \quad \text{und daraus}$$

$$(M 13.28a) \quad T_H = \frac{\ln 2}{\delta}$$

13.3.3 Eigenfrequenz

Die Dämpfung bewirkt eine vom Abklingkoeffizienten δ abhängige Veränderung von Frequenz, Kreisfrequenz und Schwingungsdauer.

Wenn

$$\begin{aligned} \omega_d & \text{ Kreisfrequenz der gedämpften Schwingung} = 2\pi f_d = 2\pi/T_d, \\ \omega_0 & \text{ Kreisfrequenz der gleichen, jedoch ungedämpften Schwingung} \\ & = 2\pi f_0 = 2\pi/T_0 = \sqrt{k/m}, \end{aligned}$$