Die Newton'schen Axiome

4

Das erste Newton'sche Axiom setzt die Beschleunigung eines Körpers mit seiner Masse und den auf den Körper wirkenden Kräften in Beziehung. Hier beschleunigt ein Flugzeug auf der Startbahn beim Start.

? Wie könnten Sie als Passagier mit Hilfe der Newton'schen Axiome die Beschleunigung des Flugzeugs abschätzen? (Siehe Beispiel 4.8.)

Nachdem wir behandelt haben, wie sich Körper in einer, zwei oder drei Dimensionen bewegen, können wir die Frage aufwerfen: „Warum beginnen sich Körper eigentlich zu bewegen?" Warum wird ein bewegter Körper beschleunigt und warum ändert er seine Richtung?

Durch das Luftkissen unter dem Luftkissenboot wird dessen Reibung stark verringert.

Die klassische Mechanik untersucht die Kräfte, die Körper aufeinander ausüben, und erklärt auch Bewegungsänderungen über die Kräfte, die auf einen Körper wirken. Sie beschreibt die Erscheinungen mit den drei Newton'schen Axiomen der Bewegung. Natürlich hat jeder eine intuitive Vorstellung von einer Kraft als Ziehen oder Drücken, etwa bei Muskeln, Gummibändern oder Federn. Erst die Newton'schen Axiome erlauben aber, unsere Vorstellung über Kräfte zu präzisieren.

➢ **In diesem Kapitel beschreiben wir die drei Newton'schen Axiome der Bewegung. Außerdem sind verschiedene Beispiele enthalten, die zeigen, wie mit ihrer Hilfe Aufgaben mit unbewegten und bewegten Körpern gelöst werden können**.

Eine heute verwendete Formulierung der Newton'schen Axiome lautet:

> Ein Körper bleibt in Ruhe oder bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit weiter, wenn *keine* resultierende äußere Kraft auf ihn wirkt.

ERSTES NEWTON'SCHES AXIOM (TRÄGHEITSGESETZ)

> Ein Körper wird in Richtung der resultierenden äußeren Kraft beschleunigt, die auf ihn wirkt. Die Beschleunigung ist gemäß $\boldsymbol{F}_{\text{ges}} = m\,\boldsymbol{a}$ proportional zur resultierenden äußeren Kraft $\boldsymbol{F}_{\text{ges}}$, wobei m die Masse des Körpers ist. Die resultierende äußere Kraft auf einen Körper ist die Vektorsumme aller Kräfte, die auf ihn wirken, $\boldsymbol{F}_{\text{ges}} = \sum \boldsymbol{F}$. Somit gilt
>
> $$\sum \boldsymbol{F} = m\,\boldsymbol{a}. \tag{4.1}$$

ZWEITES NEWTON'SCHES AXIOM (AKTIONSPRINZIP)

> Kräfte treten immer paarweise auf. Wenn der Körper A eine Kraft $\boldsymbol{F}_{\mathrm{B}}^{(\mathrm{A})}$ auf den Körper B ausübt, wirkt eine gleich große, aber entgegengesetzt gerichtete Kraft $\boldsymbol{F}_{\mathrm{A}}^{(\mathrm{B})}$ von dem Körper B auf den Körper A. Somit gilt
>
> $$\boldsymbol{F}A(B) = -\boldsymbol{F}B(A). \tag{4.2}$$

DRITTES NEWTON'SCHES AXIOM (REAKTIONSPRINZIP)

4.1 Das erste Newton'sche Axiom: Das Trägheitsgesetz

Stoßen Sie einen Eiswürfel auf der Theke an. Er wird zunächst ein Stück gleiten und bleibt schließlich liegen. Wenn die Theke nass ist, wird er weiter gleiten, bevor er liegen bleibt. Ein Stückchen Trockeneis (gefrorenes Kohlendioxid), das quasi auf einem Kissen aus Kohlendioxiddampf schwebt, gleitet viel weiter, ohne dass sich seine Geschwindigkeit wesentlich ändert. Vor Galilei glaubte man, dass ständig eine Kraft, ein Zug oder Druck, vorhanden sein muss, damit sich ein Körper mit konstanter Geschwindigkeit weiterbewegen kann. Galilei und später Newton erkannten dagegen, dass das aus dem Alltag bekannte Abbremsen von Körpern auf die Reibungskraft zurückzuführen ist. Wird die Reibung verringert, nimmt gleichzeitig die Bremswirkung ab. Ein Wasserfilm oder ein Kissen aus Gas verringert die Reibung besonders wirksam und ermöglicht, dass Körper ohne große Geschwindigkeitsänderung über große Strecken gleiten können. Galilei folgerte daraus, dass sich die Geschwindigkeit eines Körpers nie ändern würde, wenn man ihn von allen äußeren Kräften einschließlich der Reibung befreien würde. Diese Eigenschaft der Materie beschrieb er als **Trägheit**. Deshalb wird diese Aussage, die Newton später als erstes Newton'sches Axiom umformulierte, auch das **Trägheitsgesetz** genannt.

Inertialsysteme

Das erste Newton'sche Axiom kennt keinen Unterschied zwischen einem ruhenden Körper und einem Körper, der sich mit konstanter, aber von null verschiedener Geschwindigkeit bewegt. Ob ein Körper in Ruhe bleibt oder sich mit unveränderlicher Geschwindigkeit weiterbewegt, hängt vom Bezugssystem ab, von dem aus der Körper betrachtet wird. Stellen Sie sich vor, Sie sind ein Passagier in einem Flugzeug, das in einer konstanten Höhe geradeaus fliegt. Sie legen vorsichtig eine kleine Kugel auf ihren (horizontalen) Klapptisch. Solange das Flugzeug gegenüber dem Boden mit konstanter Geschwindigkeit fliegt, bleibt die Kugel relativ zum Flugzeug in Ruhe. Relativ zum Boden bewegt sich die Kugel mit derselben Geschwindigkeit wie das Flugzeug.

Wir wollen nun annehmen, dass der Pilot den Schub verstärkt und das Flugzeug plötzlich (relativ zum Boden) beschleunigt. Sie werden dann beobachten, dass die Kugel nach hinten zu rollen beginnt, also relativ zum Flugzeug beschleunigt wird, obwohl keine horizontale Kraft auf sie wirkt.

Ein Bezugssystem, das mit dem gleichförmig bewegten Flugzeug verbunden ist, nennt man ein Inertialsystem. Ein Bezugssystem, das relativ zu einem solchen Inertialsystem beschleunigt wird, ist selbst kein Inertialsystem. *Das erste Newton'sche Axiom gibt uns also ein Kriterium in die Hand, mit dem wir bestimmen können, ob ein Bezugssystem ein Inertialsystem ist.* Ja, es ist durchaus sinnvoll, das erste Newton'sche Axiom als Definition von Inertialsystemen zu betrachten.

> Jedes Bezugssystem, in dem sich ein kräftefreier Körper geradlinig gleichförmig bewegt, ist ein **Inertialsystem**.

DEFINITION EINES INERTIALSYSTEMS

Sowohl das mit konstanter Geschwindigkeit fliegende Flugzeug als auch der Boden sind in guter Näherung Inertialsysteme. Auch jedes andere Bezugssystem, das sich mit konstanter Geschwindigkeit gegenüber einem Inertialsystem bewegt, ist selbst ein Inertialsystem.

Ein Bezugssystem, das auf der Erdoberfläche befestigt ist, ist genau genommen kein Inertialsystem, da hier zwei – wenn auch kleine – Beschleunigungen wirken: die Beschleunigung der Erdoberfläche durch die Erdrotation und die Beschleunigung der Erde selbst auf ihrem Umlauf um die Sonne. Allerdings liegen diese beiden Beschleunigungen in der Größenordnung von 0,01 m/s^2 oder darunter. Somit ist jedes an der Erdoberfläche befestigte Bezugssystem in guter Näherung ein Inertialsystem.

Das Konzept des Inertialsystems ist von zentraler Bedeutung, da *das erste, zweite und dritte Newton'sche Axiom ausschließlich in Inertialsystemen gelten*.

Durch die im Bild nicht sichtbare Rückstoßdüse bewegt sich der Astronaut nach rechts.

4.2 Kraft, Masse und das zweite Newton'sche Axiom

Das erste und das zweite Newton'sche Axiom können als Definition der Kraft betrachtet werden. Eine **Kraft** ist ein äußerer Einfluss auf einen Körper, der veranlasst, dass der Körper relativ zu einem Inertialsystem beschleunigt wird. (Dabei haben wir angenommen, dass keine weiteren Kräfte wirken.) Die Kraft und die durch sie hervorgerufene Beschleunigung haben dieselbe Richtung. Der Betrag der Kraft ist das Produkt aus der Masse des beschleunigten Körpers und dem Betrag der Beschleunigung. Diese Definition beruht auf Gleichung 4.1.

Kräfte können über die Dehnung gleicher Gummibänder verglichen werden. Werden etwa zwei gleiche Gummibänder um die gleiche Länge gedehnt, haben die auf sie wirkenden Kräfte den gleichen Betrag.

Körper besitzen einen inneren Widerstand gegen jegliche Art von Beschleunigung. Vergleichen Sie den Widerstand, wenn Sie mit dem Fuß einen Fußball oder eine Kegelkugel zu beschleunigen versuchen. Ihre blauen Fußspitzen werden Sie schnell lehren, dass die Kegelkugel wesentlich schwerer als der Fußball zu beschleunigen ist. Diese innere Eigenschaft des Körpers wird die **Masse** genannt. Sie ist ein Maß für die Trägheit des Körpers. Das Verhältnis zweier Massen lässt sich quantitativ dadurch definieren, dass man auf beide Körper die gleiche Kraft anwendet und ihre Beschleunigungen vergleicht. Erzeugt eine Kraft F bei Anwendung auf einen Körper der Masse m_1 eine Beschleunigung a_1, während die gleiche Kraft bei Anwendung auf einen Körper der Masse m_2 die Beschleunigung a_2 liefert, ist das Verhältnis ihrer Massen durch

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{a_1}{a_2} \tag{4.3}$$

DEFINITION DER MASSE

definiert. Diese Definition stimmt mit unserer intuitiven Vorstellung von der Masse überein. Wenn auf zwei verschiedene Körper eine Kraft angewendet wird, wird der Körper mit der größeren Masse weniger beschleunigt. Das Experiment zeigt: Das Verhältnis der Beschleunigungen a_1/a_2, das die beiden gleich großen Kräfte hervorrufen, die auf die zwei Körper wirken, ist unabhängig von Betrag, Richtung und Art der Kraft. Die Masse ist eine innere Eigenschaft eines Körpers, die unabhängig von seinem Ort ist – sie ist immer gleich, unabhängig davon, ob sich der Körper auf der Erde oder auf dem Mond befindet oder gar frei im Weltraum schwebt.

Wenn ein direkter Vergleich ergibt, dass $m_2/m_1 = 2$ und $m_3/m_1 = 4$ ist, besitzt m_3 die doppelte Masse von m_2. Damit lässt sich eine Massenskala definieren, indem man einen Standardkörper auswählt und ihm eine Masse von einer Einheit zuweist. Wie bereits in Kapitel 1 erwähnt wurde, ist der als internationaler Massestandard festgelegte Körper ein Zylinder aus einer Platin-Iridium-Legierung, der sorgsam behütet im Internationalen Büro für Maße und Gewichte in Sèvres in Frankreich aufbewahrt wird. Die Masse dieses Urkilogramms beträgt 1 **Kilogramm** (kg), die SI-Einheit der Masse. Die Kraft, die man aufwenden muss, um ihn mit 1 m/s^2 zu beschleunigen, ist als 1 **Newton** (N) definiert. Dementsprechend werden 2 N benötigt, um diesen Körper mit 2 m/s^2 zu beschleunigen usw. In den Beispielen 4.1 bis 4.3 werden die Kräfte und ihre Beziehungen zu Masse, Beschleunigung und Geschwindigkeit betrachtet.

Experimentell lässt sich zeigen, dass zwei oder mehr Kräfte, die auf einen Körper wirken, diesen so beschleunigen, als ob nur eine einzige Kraft auf ihn wirken würde, die gleich der Vektorsumme aller Teilkräfte ist. Kräfte werden also wie Vektoren addiert. Somit ergibt sich für das zweite Newton'sche Axiom

$$\sum \boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_{\text{ges}} = m\,\boldsymbol{a}.$$

BEISPIEL 4.1: Ein gleitender Eiscremekarton

Eine gegebene Kraft erzeugt bei Anwendung auf die Standardmasse $m_1 = 1$ kg eine Beschleunigung von 5 m/s². Wenn die gleiche Kraft auf einen Eiscremekarton mit der Masse m_2 angewendet wird, erfährt dieser eine Beschleunigung von 11 m/s². Beide sollen auf einer glatten Unterlage gleiten. a) Wie groß ist die Masse des Eiscremekartons? b) Wie groß ist die Kraft?

Problembeschreibung: Wenden Sie die Formel $\sum \boldsymbol{F} = m\,\boldsymbol{a}$ auf jeden der Körper an und berechnen Sie aus beiden Gleichungen die Masse des Eiscremekartons und den Betrag der Kraft.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Wenden Sie auf beide Körper $\sum \boldsymbol{F} = m\,\boldsymbol{a}$ an. In diesem Fall wirkt auf jeden Körper nur eine Kraft:

$$\boldsymbol{F}_1 = m_1\,\boldsymbol{a}_1 \quad \text{und} \quad \boldsymbol{F}_2 = m_2\,\boldsymbol{a}_2$$

2. Das Verhältnis der Massen ist bei Einwirkung gleich starker Kräfte umgekehrt proportional zum Verhältnis der Beschleunigungen:

$$\boldsymbol{F}_1 = \boldsymbol{F}_2 = \boldsymbol{F}, \quad \text{also} \quad m_1\,a_1 = m_2\,a_2$$

und

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{5\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}}{11\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}}$$

3. Stellen Sie nach m_2 um und setzen Sie für m_1 1 kg ein:

$$m_2 = \frac{5}{11}\,m_1 = \frac{5}{11}\,(1\,\mathrm{kg}) = \boxed{0{,}4\,\mathrm{kg}}$$

Teilaufgabe b

Der Betrag der Kraft $\boldsymbol{F}$ kann aus Masse und Beschleunigung eines der beiden Körper ermittelt werden:

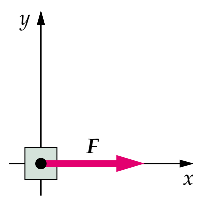
$$F = m_1\,a_1 = (1\ \mathrm{kg})\,(5\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}) = \boxed{5\,\mathrm{N}}$$

ÜBUNG: Eine Kraft von 3 N bewirkt bei Anwendung auf einen Körper unbekannter Masse eine Beschleunigung von 2 m/s². a) Wie groß ist die Masse des Körpers? b) Wie groß ist die Beschleunigung, wenn man die Kraft auf 4 N erhöht? (*Lösung:* a) 1,5 kg, b) 2,67 m/s².)

BEISPIEL 4.2: Weltraumspaziergang

Bei einem Weltraumspaziergang hat ein Astronaut den Halt am Raumschiff verloren und schwebt nun in einigem Abstand davon im Weltall. Glücklicherweise hat er eine Rückstoßdüse, die 3 s lang eine konstante Kraft $\boldsymbol{F}$ liefert. Nach den 3 s hat er sich 2,25 m auf das Raumschiff zu bewegt. Seine Masse ist 68 kg. Gesucht ist die Kraft $\boldsymbol{F}$.

Problembeschreibung: Die Kraft, die auf den Astronauten wirkt, ist konstant. Damit ist auch seine Beschleunigung $\boldsymbol{a}$ konstant, so dass wir die kinematischen Gleichungen aus Kapitel 2 heranziehen können, um $\boldsymbol{a}$ und daraus über $\sum \boldsymbol{F} = m\,\boldsymbol{a}$ die Kraft zu berechnen. Legen Sie $\boldsymbol{F}$ entlang der x-Achse, so dass $\boldsymbol{F} = F_x\,\hat{\boldsymbol{x}}$ ist (Abbildung 4.1). Die Komponente parallel zur x-Achse aus dem zweiten Newton'schen Axiom ist dann $F_x = m\,a_x$.



4.1

Lösung:

1. Wenden Sie $\sum \boldsymbol{F} = m\,\boldsymbol{a}$ als Beziehung zwischen der Gesamtkraft, der Masse und der Beschleunigung an:

$$F_x = m\,a_x$$

2. Berechnen Sie aus Gleichung 2.15 mit $v_0 = 0$ die Beschleunigung:

$$\Delta x = v_0\,t + \tfrac{1}{2}\,a_x\,t^2 = \tfrac{1}{2}\,a_x\,t^2$$

$$a_x = \frac{2\,\Delta x}{t^2} = \frac{2\cdot(2{,}25\,\mathrm{m})}{(3\,\mathrm{s})^2} = 0{,}500\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

3. Setzen Sie $a_x = 0{,}500\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$ und $m = 68$ kg ein, um die Kraft zu ermitteln:

$$F_x = m\,a_x = 68\,\mathrm{kg}\cdot 0{,}500\ \mathrm{m\cdot s^{-2}} = \boxed{34{,}0\,\mathrm{N}}$$

BEISPIEL 4.3: Ein Teilchen unter der Einwirkung zweier Kräfte

Ein Teilchen der Masse 0,4 kg ist gleichzeitig zwei Kräften $\boldsymbol{F}_1 = (-2\,\hat{\boldsymbol{x}} - 4\,\hat{\boldsymbol{y}})$ N und $\boldsymbol{F}_2 = (-2{,}6\,\hat{\boldsymbol{x}} + 5\,\hat{\boldsymbol{y}})$ N ausgesetzt. Das Teilchen soll zunächst am Koordinatenursprung ruhen und ab $t = 0$ beschleunigt werden. Gesucht sind a) sein Ortsvektor $\boldsymbol{r}$ und b) seine Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ zum Zeitpunkt $t = 1{,}6$ s.

ZUR ÜBUNG

Problembeschreibung: Da $\boldsymbol{F}_1$ und $\boldsymbol{F}_2$ konstant sind, ist auch die Beschleunigung des Teilchens konstant. Somit können wir die kinematischen Gleichungen aus Kapitel 2 verwenden, um den Ort des Teilchens und seine Geschwindigkeit als Funktionen der Zeit zu ermitteln.

Lösung:

Decken Sie zunächst die rechte Spalte ab und versuchen Sie jeweils, die Ergebnisse selbst zu ermitteln.

Schritte	Ergebnisse
Teilaufgabe a	
1. Schreiben Sie die allgemeine Gleichung für den Ortsvektor $\boldsymbol{r}$ als Funktion der Zeit t für eine konstante Beschleunigung $\boldsymbol{a}$ in Abhängigkeit von $\boldsymbol{r}_0$, $\boldsymbol{v}_0$ und $\boldsymbol{a}$ auf. Setzen Sie $\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{v}_0 = 0$.	$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{v}_0\,t + \frac{1}{2}\,\boldsymbol{a}\,t^2 = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{a}\,t^2$
2. Drücken Sie die Beschleunigung $\boldsymbol{a}$ über $\sum \boldsymbol{F} = m\,\boldsymbol{a}$ durch die resultierende Kraft $\sum \boldsymbol{F}$ und die Masse m aus.	$\boldsymbol{a} = \dfrac{\sum \boldsymbol{F}}{m}$
3. Berechnen Sie aus den gegebenen Kräften $\sum \boldsymbol{F}$.	$\sum \boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 = (-4{,}6\,\hat{\boldsymbol{x}} + 1{,}0\,\hat{\boldsymbol{y}})\,\mathrm{N}$
4. Ermitteln Sie den Beschleunigungsvektor $\boldsymbol{a}$.	$\boldsymbol{a} = \dfrac{\sum \boldsymbol{F}}{m} = (-11{,}5\,\hat{\boldsymbol{x}} + 2{,}5\,\hat{\boldsymbol{y}})\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$
5. Ermitteln Sie den Ortsvektor $\boldsymbol{r}$ in Abhängigkeit von t.	$\boldsymbol{r} = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{a}\,t^2 = \frac{1}{2}\,a_x\,t^2\,\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{1}{2}\,a_y\,t^2\,\hat{\boldsymbol{y}}$ $= (-5{,}75\,t^2\,\hat{\boldsymbol{x}} + 1{,}25\,t^2\,\hat{\boldsymbol{y}})\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$
6. Berechnen Sie $\boldsymbol{r}$ bei $t = 1{,}6$ s.	$\boldsymbol{r} = \boxed{(-14{,}7\,\hat{\boldsymbol{x}} + 3{,}20\,\hat{\boldsymbol{y}})\,\mathrm{m}}$
Teilaufgabe b	
Schreiben Sie den Geschwindigkeitsvektor $\boldsymbol{v}$ in Abhängigkeit von der Beschleunigung und von der Zeit auf und berechnen Sie seine Komponenten für den Zeitpunkt $t = 1{,}6$ s.	$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a}\,t = [(-11{,}5\,\hat{\boldsymbol{x}} + 2{,}5\,\hat{\boldsymbol{y}})\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}]\,t$ $= \boxed{(-18{,}4\,\hat{\boldsymbol{x}} + 4{,}00\,\hat{\boldsymbol{y}})\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}}$

4.3 Die Gewichtskraft

Lässt man einen Körper in der Nähe der Erdoberfläche fallen, wird er durch die Gravitationsbeschleunigung nach unten, zum Erdmittelpunkt hin beschleunigt. Vernachlässigt man dabei den Luftwiderstand, ist diese Beschleunigung für alle Körper und an jedem Ort gleich. Sein Betrag hat den durch die Fallbeschleunigungskonstante G gegebenen Wert. Die Kraft, die diese Gravitationsbeschleunigung erzeugt, ist die **Gewichtskraft**, umgangssprachlich auch **Gewicht** genannt. Allerdings ist die letztere Bezeichnung für die Gewichtskraft etwas unglücklich, verleitet sie doch zu der Annahme, dass das Gewicht wie die Masse eine Eigenschaft des Körpers sei und nicht eine Kraft, die auf ihn wirkt. Wenn der Begriff „Gewicht eines Körpers“ auftaucht, sollte man ihn also immer in Gedanken in „auf den Körper wirkende Gewichtskraft“ übersetzen.

Wenn diese Gewichtskraft $\boldsymbol{F}_G$ die *einzige* Kraft ist, die auf einen Körper wirkt, sagt man, dieser Körper sei im **freien Fall**. Nach dem zweiten Newton’schen Axiom $(\sum \boldsymbol{F} = m\,\boldsymbol{a})$ ist die Gewichtskraft $\boldsymbol{F}_G$ durch

$$\boldsymbol{F}G = m\,\boldsymbol{a}_G \tag{4.4}$$

Die Gewichtskraft

definiert, wobei m die Masse des Körpers und a_G die Gravitationsbeschleunigung ist. Da $\boldsymbol{a}_G$ für alle Körper gleich ist, ist die Gewichtskraft eines Körpers proportional zu seiner Masse. Der Vektor $\boldsymbol{a}_G$ ist deshalb gleich der Kraft, die die Erde pro Masseeinheit auf einen Körper ausübt und mithin gleich der Beschleunigung beim freien Fall.

In der Nähe der Erdoberfläche hat $\boldsymbol{a}_\mathrm{G}$ den Wert

$$|\boldsymbol{a}_\mathrm{G}| = g = 9{,}81\ \mathrm{N} \cdot \mathrm{kg}^{-1} = 9{,}81\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}.$$

Genaue Messungen haben gezeigt, dass sich der Wert von $\boldsymbol{a}_\mathrm{G}$ an verschiedenen Orten etwas unterscheidet. $\boldsymbol{a}_\mathrm{G}$ nimmt mit wachsendem Abstand zur Erdoberfläche ab – und zwar umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstands vom Erdmittelpunkt. Das heißt, ein und derselbe Körper wiegt in großer Höhe etwas weniger als in Höhe des Meeresspiegels. Da die Erde nicht genau eine Kugel, sondern zu den Polen hin abgeflacht ist, hängt a_G zudem etwas von der geografischen Breite ab. ! Somit ist das Gewicht bzw. die Gewichtskraft im Gegensatz zur Masse keine innere Eigenschaft eines Körpers. Obwohl sich die Gewichtskraft eines Körpers also aufgrund der Änderung von $\boldsymbol{a}_\mathrm{G}$ mit dem Ort ändern kann, ist diese Änderung so klein, dass sie bei den meisten praktischen Anwendungen auf der Erdoberfläche oder in deren Nähe nicht wahrgenommen wird.

Ein Beispiel soll den Unterschied zwischen Masse und Gewichtskraft verdeutlichen. Stellen Sie sich vor, Sie nehmen eine schwere Kegelkugel mit auf den Mond. Die Gewichtskraft der Kugel erreicht auf dem Mond nur ein Sechstel ihrer Gewichtskraft auf der Erde – die Kugel lässt sich auf dem Mond viel einfacher hochheben. Um die Kugel allerdings mit einer bestimmten Geschwindigkeit in horizontaler Richtung zu werfen, ist auf dem Mond dieselbe Kraft erforderlich wie auf der Erde, da ja die Masse der Kugel konstant ist. Dementsprechend wäre natürlich auch im Weltraum, weitab von der Gravitation der Erde oder des Monds, für dieselbe horizontale Beschleunigung dieselbe Kraft erforderlich.

Obwohl die Gewichtskraft auf einen Körper ortsabhängig ist, ist sie für jeden einzelnen Ort proportional zur Masse des Körpers. Damit können wir die Massen verschiedener Körper vergleichen, indem wir ihre Gewichtskräfte vergleichen.

Wenn wir unsere eigene Gewichtskraft wahrnehmen, beruht das meist auf Kräften, die mit der Gewichtskraft im Gleichgewicht sind. Wenn Sie auf einem Stuhl sitzen, spüren Sie die Kraft, die der Stuhl ausübt und die mit Ihrer Gewichtskraft im Gleichgewicht ist, so dass Sie nicht zu Boden fallen. Wenn Sie auf einer Personenwaage stehen, spüren Ihre Füße die Kraft, die die Waage auf Sie ausübt. Die Waage ist so geeicht, dass sie die Gegenkraft anzeigt, die sie aufbringen muss, Ihre Gewichtskraft zu kompensieren. Diese Kraft wird auch **scheinbare Gewichtskraft** genannt. Wenn wie etwa beim freien Fall keine Kraft vorhanden ist, die der Gewichtskraft entgegenwirkt ist, ist die scheinbare Gewichtskraft null. Diesen Zustand, die so genannte **Schwerelosigkeit**, erfahren Astronauten in ihren Raumschiffen. Stellen Sie sich ein Raumschiff vor, das sich auf einer kreisförmigen Erdumlaufbahn bewegt und somit ständig zur Erde beschleunigt wird. Die einzige Kraft, die auf das Raumschiff wirkt, ist die Erdanziehung (sein Gewicht), so dass es frei fällt. Auch die Astronauten in dem Raumschiff sind im freien Fall. Die einzige Kraft, die auf sie wirkt, ist ihre Gewichtskraft, die für die Beschleunigung $\boldsymbol{a}_\mathrm{G}$ verantwortlich ist. Da es unter diesen Bedingungen keine Kraft gibt, die den freien Fall in der Umlaufbahn aufhält, ist die scheinbare Gewichtskraft der Astronauten null.

Die Maßeinheiten von Kraft und Masse

Die SI-Einheit der Masse, das Kilogramm, ist neben der Sekunde und dem Meter die dritte SI-Grundeinheit. Die Einheit der Kraft, das Newton, und die Einheiten für weitere Größen wie den Impuls und die Energie, die wir später kennen lernen werden, sind von diesen drei Grundeinheiten abgeleitet.

Wie wir bereits in Abschnitt 4.2 festgestellt hatten, ist das Newton als die Kraft definiert, die eine Beschleunigung von 1 m/s² erzeugt, wenn sie auf einen 1 kg schweren Körper wirkt. Das zweite Newton'sche Axiom ergibt dann

$$1\ \mathrm{N} = (1\ \mathrm{kg}) \cdot (1\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}) = 1\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}. \tag{4.5}$$

In der Atom- und Kernphysik ist die **atomare Masseeinheit** (u) recht gebräuchlich. Sie ist als ein Zwölftel der Masse eines neutralen Kohlenstoff-12-Atoms (^{12}C) definiert und kann über

$$1\ \mathrm{u} = 1{,}660\,540 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg} \tag{4.6}$$

in die Einheit Kilogramm umgerechnet werden. Die Masse eines Wasserstoffatoms beträgt etwa 1 u.

4.4 Die Naturkräfte

Die volle Reichweite des zweiten Newton'schen Axioms zeigt sich erst, wenn es zusammen mit den Gesetzen für die Kräfte betrachtet wird, die die Wechselwirkungen von Körpern beschreiben.

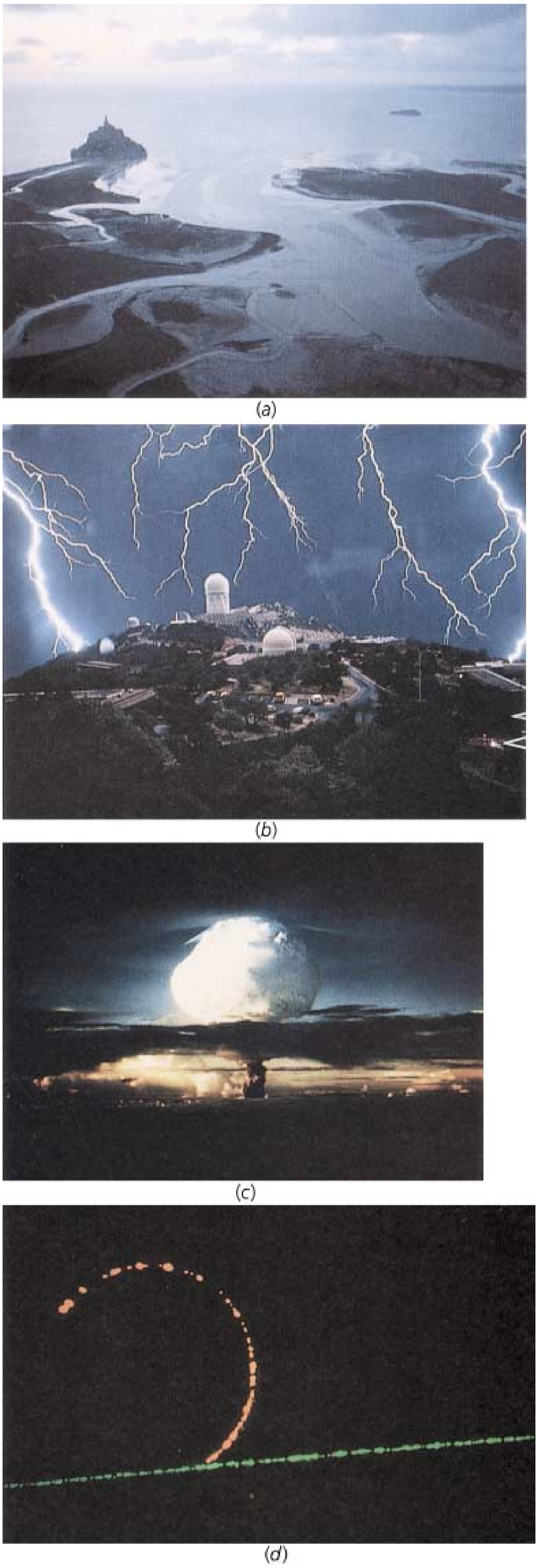
Dazu gehört beispielsweise das in Kapitel 11 zu besprechende Newton'sche Gravitationsgesetz, das die Gravitationskraft, die ein Körper auf einen anderen ausübt, durch den Abstand beider Körper und durch ihre Massen ausdrückt. Zusammen mit dem zweiten Newton'schen Axiom gestattet dieses Gesetz, die Umlaufbahnen der Planeten um die Sonne, die Bewegung des Monds wie auch die Höhenabhängigkeit von $\boldsymbol{a}_\mathrm{G}$, der Gravitationsbeschleunigung, zu berechnen.

Die Grundkräfte der Natur

Alle Kräfte, denen wir in der Natur begegnen, lassen sich auf vier fundamentale Wechselwirkungen zwischen Elementarteilchen zurückführen (Abbildung 4.2).

1. Die **Gravitationskraft** ist die Kraft der gegenseitigen Anziehung zwischen allen Körpern mit Masse.
2. Die **elektromagnetische Kraft** ist die Kraft zwischen allen Körpern mit elektrischer Ladung.
3. Die **starke Kernkraft** ist die Kraft zwischen bestimmten subatomaren Teilchen, den Hadronen.
4. Die **schwache Kraft** ist die Kraft zwischen subatomaren Teilchen während spezieller radioaktiver Zerfallsprozesse.

Die Kräfte, die wir im Alltag bei makroskopischen Körpern beobachten können, werden entweder durch die Gravitationskraft oder durch die elektromagnetische Kraft hervorgerufen.



(a)

(b)

(c)

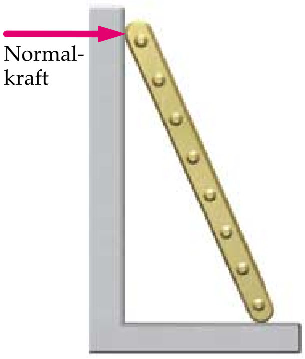
(d)

4.2 a) Die Gravitationskraft zwischen der Erde und einem Körper in der Nähe der Erdoberfläche entspricht der Gewichtskraft des Körpers. Die Gravitationskraft, die die Sonne auf die Erde und auf die anderen Planeten ausübt, ist dafür verantwortlich, dass die Planeten auf ihren Umlaufbahnen um die Sonne gehalten werden. Ähnlich hält die Gravitationskraft, die zwischen Erde und Mond wirkt, den Mond auf seiner nahezu kreisförmigen Bahn um die Erde. Die Gravitationskräfte, die sowohl vom Mond als auch von der Sonne auf die Ozeane der Erde wirken, führen zu den Gezeiten. Das Bild zeigt Mont-Saint-Michel in Frankreich, eine Stadt, die bei Flut zu einer Insel wird. b) Die elektromagnetische Kraft umfasst sowohl die elektrische als auch die magnetische Kraft. Ein vertrautes Beispiel für die elektrische Kraft ist die Anziehung zwischen kleinen Papierschnipseln und einem Kamm, der zuvor durch die Reibung an den Haaren aufgeladen wurde. Auch die abgebildeten Blitze über dem Kitt-Peak-Observatorium sind das Ergebnis elektromagnetischer Kräfte. c) Die starke Kernkraft tritt zwischen bestimmten Elementarteilchen, den Hadronen, auf; dazu zählen beispielsweise die Bestandteile der Atomkerne, die Neutronen und Protonen. Diese Kraft bewirkt, dass die Kerne zusammengehalten werden. Sie entsteht durch die Wechselwirkung von Quarks, aus denen die Hadronen aufgebaut sind. Die abgebildete Wasserstoffbombenexplosion illustriert diese starke Kernkraft. d) Die schwache Kraft tritt sowohl zwischen Leptonen (wie Elektronen und Myonen) als auch zwischen Hadronen (wie Protonen und Neutronen) auf. Die Falschfarben-Nebelkammeraufnahme zeigt die schwache Kraft zwischen einem Myon aus der kosmischen Strahlung (grün) und einem Elektron, das aus einem Atom herausgeschlagen wird (rot).

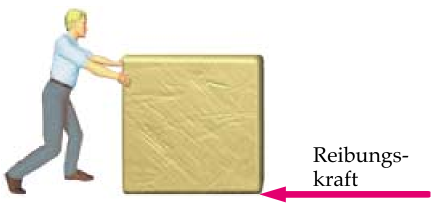
Fernwirkung

Die ersten beiden Grundkräfte, die Schwerkraft und die elektromagnetische Kraft, wirken zwischen Teilchen, die räumlich voneinander getrennt sind. Dies führt zu einem philosophischen Problem, nämlich dem der **Fernwirkung** oder Wirkung über eine Entfernung hinweg. Newton sah diese Fernwirkung als einen Mangel seiner Gravitationstheorie an, war aber außerstande, eine andere Hypothese über das Wesen der Kräfte zu formulieren.

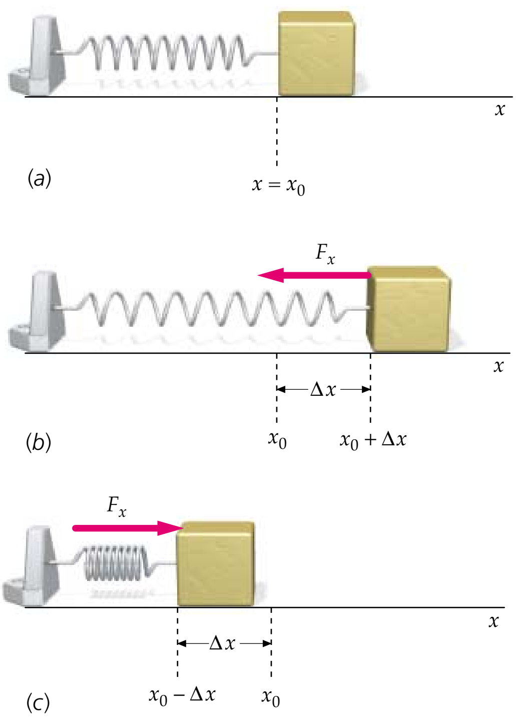
Heute wird das Problem der Fernwirkung vermieden, indem das Konzept des Felds eingeführt wird, das als Überträger wirkt. Dabei wird beispielsweise die Anziehung der Erde durch die Sonne in zwei Schritten betrachtet. Zunächst erzeugt die Sonne im Raum ein **Gravitationsfeld**, in dem die Gravitationsbeschleunigung a_G durch die Sonnenanziehung mit wachsendem Abstand zur Sonne abnimmt – wir kommen darauf in Kapitel 11 zurück. Dieses Feld übt dann eine Kraft auf die Erde aus. Das Feld spielt also die Rolle des Vermittlers. Auf ähnliche Weise erzeugt die Erde ein Gravitationsfeld, das eine Kraft auf die Sonne ausübt. Auch unser Eigengewicht ist eine Kraft, die das Gravitationsfeld auf uns ausübt. In den Kapiteln 21 bis 30 über Elektrizität und Magnetismus werden wir sowohl elektrische Felder, die durch alle elektrischen Ladungen entstehen, als auch magnetische Felder, die nur durch bewegte elektrische Ladungen hervorgerufen werden, kennen lernen.



4.3 Die Wand hält die Leiter, indem sie auf diese eine senkrecht zur Wand gerichtete Normalkraft ausübt.



4.4 Die Reibungskraft, die der Boden auf den Quader ausübt, erschwert oder verhindert, dass der Quader gleitet.



4.5 Eine horizontale Feder. a) Ist die Feder entspannt, erzeugt sie auch keine Kraft auf den Quader. b) Ist die Feder gedehnt, so dass Δx positiv ist, übt sie eine Kraft $F_x = -k\,\Delta x$ in negative x-Richtung aus. c) Ist die Feder zusammengedrückt und damit Δx negativ, übt sie eine Kraft $F_x = -k\,\Delta x$ in positive x-Richtung aus.

Kontaktkräfte

Viele uns bekannte Kräfte werden von Objekten aufeinander ausgeübt, die in direktem Kontakt miteinander sind – sich also berühren. Sie sind eine Folge von Kräften zwischen den Oberflächenmolekülen der Körper, die im Kontakt sind.

Festkörper Drückt man gegen eine Oberfläche, so drückt diese zurück. Betrachten Sie z. B. die Leiter in Abbildung 4.3. An der Kontaktstelle drückt die Leiter mit einer horizontalen Kraft auf die Wand, wobei sich die Moleküle in der Oberfläche der Wand verschieben. Wie die Federn einer Matratze drücken dadurch die verschobenen Moleküle der Wand horizontal zurück auf die Leiter. Kräfte, die wie diese senkrecht zur Kontaktfläche wirken, werden als **Normalkräfte** bezeichnet (wobei „Normal-" in diesem Fall „senkrecht dazu" bedeutet). Dass sich die Wand in Folge der Belastung etwas biegt, ist mit bloßem Auge kaum wahrnehmbar.

Normalkräfte treten in den verschiedensten Größenordnungen auf. So übt ein Tisch auf jeden darauf liegenden Gegenstand eine Normalkraft aus. Solange der Tisch dabei nicht zerbricht, ist diese Kraft mit der Gewichtskraft des darauf liegenden Körpers im Gleichgewicht. Drücken Sie zusätzlich noch auf den Körper, erhöht sich im Gegenzug die nach oben gerichtete Kraft und verhindert damit, dass der Körper nach unten beschleunigt wird.

Kontaktflächen können auch Kräfte aufeinander ausüben, die *parallel* zu den Kontaktflächen sind. Betrachten Sie z. B. den in Abbildung 4.4 gezeigten großen Quader auf dem Boden. Wenn man versucht, ihn mit einer kleinen horizontalen Kraft zur Seite zu bewegen, gleitet er überhaupt nicht. Die Bodenoberfläche übt eine Kraft auf den Quader auf, die sich dessen Bestreben, in Druckrichtung zu gleiten, vollständig entgegenstellt. Dagegen wird der Quader zu gleiten beginnen, wenn er mit einer hinreichend starken Kraft zur Seite gedrückt wird. Damit er weitergleitet, muss weiter Druck auf ihn ausgeübt werden. Ist das nicht der Fall, bremst die Reibungskraft die Bewegung des Quaders ab, so dass er schließlich ganz zur Ruhe kommt. Eine Komponente einer Kontaktkraft, die dem Gleiten oder der Tendenz zu gleiten entgegenwirkt, wird Reibungskraft genannt. Eine Reibungskraft wirkt stets parallel zur Kontaktfläche.

Auch wenn es in den Abbildungen scheinen könnte, als würden Normalkräfte und Reibungskräfte nur an einem Punkt angreifen, sind sie in der Realität über die ganze Kontaktfläche verteilt. Reibungskräfte werden ausführlicher in Kapitel 5 behandelt.

Federn Die Kraft, die eine um eine kleine Länge Δx zusammengedrückte oder gedehnte Feder ausübt, ergibt sich experimentell zu

$$F_x = -k\,\Delta x. \tag{4.7}$$

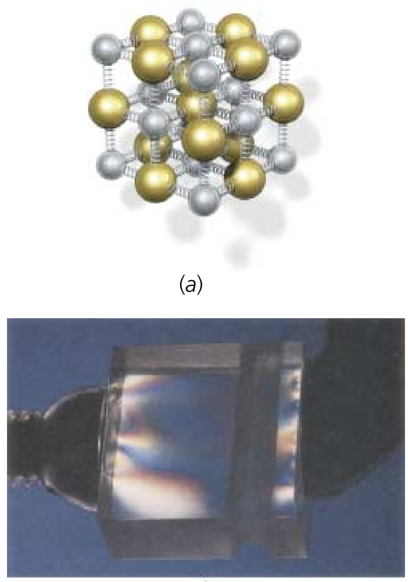
DAS HOOKE'SCHE GESETZ

Dabei ist k die so genannte Federkonstante, ein Maß für die Steifheit einer Feder (Abbildung 4.5). Das negative Vorzeichen in der Gleichung zeigt, dass diese Kraft in entgegengesetzter Richtung zu der wirkt, in der die Feder gedehnt bzw. zusammengedrückt wird. Diese Beziehung, die als das Hooke'sche Gesetz bekannt ist, ist recht bedeutsam: Von einem Körper, der unter dem Einfluss von Kräften, die sich ausgleichen, im Ruhezustand ist, sagt man, er sei in einem statischen Gleichgewicht. Wenn eine kleine Verschiebung dieses Körpers eine Gesamtkraft zur Folge hat, die wieder in Richtung des Gleichgewichtspunkts weist (eine so genannte **Rückstellkraft**), spricht man von einem stabilen Gleichgewicht. Betrachtet man lediglich kleine Ausschläge, gilt für fast alle derartigen Rückstellkräfte – darunter auch die in Beispiel 4.4 – das Hooke'sche Gesetz.

Die molekularen Anziehungskräfte zwischen den Atomen eines Moleküls oder Festkörpers ändern sich für kleine Verschiebungen annähernd linear mit der Abstandsänderung; die Kraft ähnelt also der einer Feder. Somit kann man ein zweiatomiges Molekül als zwei Massen beiderseits einer Feder modellieren. Ein Festkörper wäre dementsprechend eine Menge von Massen, die durch Federn miteinander verbunden sind (Abbildung 4.6).

Seile und Taue Seile und Taue werden zum Ziehen von Gegenständen verwendet. Man kann sich ein Seil als eine Feder vorstellen, deren Federkonstante so groß ist, dass ihre Längenänderung vernachlässigt werden kann. Allerdings sind Seile biegsam, so dass man mit ihnen keine Gegenstände schieben kann. Stattdessen biegen sie sich durch. Die Kraft, die ein Seilabschnitt auf einen angrenzenden Seilabschnitt ausübt, wird **Zugspannung** genannt. Wenn ein Seil an einem Körper zieht, ist diese Kraft gleich der Zugspannung. Das Konzept der Zugspannung in einem Seil oder Tau wird in Abschnitt 4.7 vertieft.

Zwangsbedingungen Ein Eisenbahnwagen kann sich nur entlang der Schienen bewegen. Ein Holzpony auf dem Karussell geht immer im Kreis. Ein Schlitten auf einem zugefrorenen See gleitet immer auf einer horizontalen Ebene. Derartige Bedingungen an die Bewegung von Körpern werden **Zwangsbedingungen** genannt.



(a)

(b)

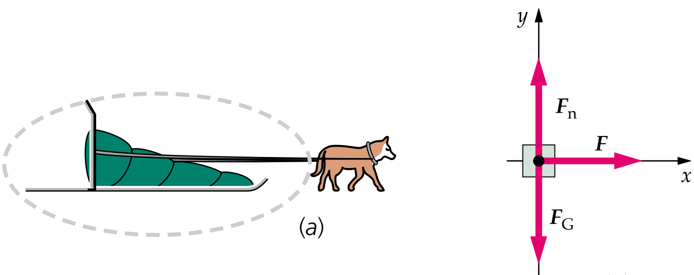
4.6 a) Modell eines Festkörpers, der aus Atomen (dargestellt durch Kugeln) besteht, die durch Federn miteinander verbunden sind. Offensichtlich müssen diese Federn sehr steif sein (eine große Federkonstante besitzen); selbst wenn man ein großes Gewicht auf den Festkörper legt, ist die Deformation nicht sichtbar. Allerdings führt das Zusammendrücken, etwa durch eine Klammer an dem Kunststoffblock in b) zu Belastungsmustern, die in polarisiertem Licht sichtbar sind.

4.5 Kräftediagramme und ihre Anwendung

Stellen Sie sich einen Hundeschlitten vor. Der Hund zieht den Schlitten an einer Leine über das Eis (Abbildung 4.7 a). Dabei zieht er mit solcher Kraft, dass dieser beschleunigt wird. Wir können uns Schlitten und Leine als eine Einheit vorstellen. Welche Kräfte wirken dann auf diesen aus Schlitten und Leine bestehenden Körper?

Sowohl der Hund als auch das Eis berühren den Körper, so dass sowohl der Hund als auch das Eis Kontaktkräfte auf ihn ausüben. Weiter wissen wir, dass die Erde eine Gewichtskraft auf den Schlitten und auf die Leine ausübt. Somit greifen insgesamt (wenn man die Reibung als vernachlässigbar ansieht) drei Kräfte an dem Körper an:

1. die Gewichtskraft des Schlittens und der Leine $\boldsymbol{F}_G$,
2. die Kontaktkraft $\boldsymbol{F}_n$ durch das Eis (ohne die Reibung wirkt diese senkrecht zum Eis),
3. die Kontaktkraft $\boldsymbol{F}$ durch den Hund.



(a)

(b)

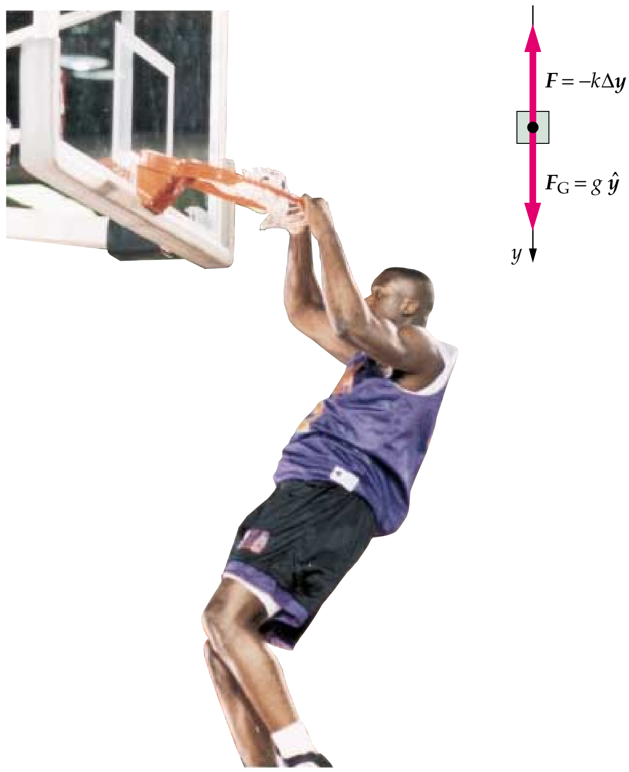
4.7 a) Ein Hund zieht einen Schlitten. Der erste Schritt zur Lösung der Aufgabe besteht darin, den zu analysierenden Körper zu isolieren. In diesem Fall zeigt die gestrichelte Ellipse die Grenze zwischen dem Körper aus Schlitten und Leine und seiner Umgebung an. b) Das Kräftediagramm der auf den Schlitten aus Abbildung 4.7 a wirkenden Kräfte.

Ein Diagramm wie das in Abbildung 4.7 b, das schematisch alle an einem System angreifenden Kräfte zeigt, heißt Kräftediagramm. Neben den Kräften ist darin nur der Körper, nicht aber dessen Umgebung dargestellt. Um alle Kräfte maßstabsgerecht in das Diagramm einzuzeichnen, muss zunächst mit Hilfe

BEISPIEL 4.4: Slam Dunk beim Basketball

Ein 110 kg schwerer Basketballspieler hängt nach einem Slam Dunk (Abbildung 4.8) am Rand des Basketballkorbs. Bevor er sich zu Boden fallen lässt, hängt er regungslos am Korbrand, wobei der Vorderrand des Korbs durch das Gewicht 15 cm nach unten gebogen ist. Wir wollen annehmen, dass der Rand durch eine Feder angenähert werden kann. Berechnen Sie die Federkonstante k.

Problembeschreibung: Da der Spieler nicht beschleunigt wird, muss die auf ihn wirkende Gesamtkraft ebenfalls null sein. Die nach oben gerichtete Kraft des Korbrands ist mit der Gewichtskraft des Spielers im Gleichgewicht. Wählen Sie $y=0$ als Ausgangsort des Korbrands und legen sie die positive y-Richtung nach unten. Dann ist Δy positiv, die y-Komponente der Gewichtskraft $F_y = m\,g$ positiv und die vom Korbrand ausgeübte Rückstellkraft $F_{\mathrm{H},y} - k\,\Delta y$ negativ.



4.8

Lösung:

Wenden Sie die Formel $\sum \boldsymbol{F} = m\,\boldsymbol{a}$ auf den Spieler an und stellen Sie nach k um:

$$\sum F_y = F_{\mathrm{G},y} + F_{\mathrm{H}}, y = m\,a_y$$

$$m\,g + (-k\,\Delta y) = m\,a_y = 0$$

$$k = \frac{m\,g}{\Delta y} = \frac{(110\,\mathrm{kg}) \cdot (9{,}81\,\mathrm{N} \cdot \mathrm{kg}^{-1})}{0{,}15\,\mathrm{m}}$$

$$= \boxed{7{,}19 \cdot 10^3\,\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^{-1}}$$

Kommentar: Obwohl der Rand eines Basketballkorbs kaum einer Feder ähnlich sieht, sind die meisten Körbe tatsächlich an einem Gelenk mit einer Feder aufgehängt, die nachgibt, wenn der Vorderrand des Korbs nach unten gezogen wird, d.h., die nach oben gerichtete Kraft, die der Rand auf die Hand des Spielers ausübt, ist proportional zur Verschiebung des Rands und dieser entgegengerichtet. Beachten Sie, dass wir N/kg als Einheit von g verwendet haben, so dass sich kg wegkürzt und N/m als Einheit für k übrig bleibt. Wegen 1 N/kg = 1 m/s² kann man für g entweder 9,81 N/kg oder 9,81 m/s² verwenden, je nachdem, was zweckmäßiger ist.

ÜBUNG: Ein 4-kg-Beutel Bananen hängt ruhig an einer Federwaage mit der Federkonstante $k = 300$ N/m. Wie weit ist die Feder gedehnt? (*Lösung:* 13,1 cm.)

ÜBUNG: Eine Feder mit der Federkonstante 400 N/m ist an einem 3-kg-Block befestigt, der auf einer horizontalen Druckluftunterlage liegt, so dass die Bodenreibung vernachlässigbar klein ist. Wie weit muss die Feder gedehnt werden, um den Block mit 4 m/s² zu beschleunigen? (*Lösung:* 3,0 cm.)

ÜBUNG: Ein Körper der Masse m schwingt am Ende einer idealen Feder mit der Federkonstante k. Die Zeit für eine volle Schwingung ist die Periode T. Wir nehmen an, dass T von m und k abhängt. Ermitteln Sie über eine Dimensionsanalyse die Form des Zusammenhangs $T = f(m, k)$. Zahlenkonstanten können dabei außer Acht gelassen werden. Am einfachsten löst man die Aufgabe, indem man die Einheiten betrachtet: k wird in N/m = (kg · m/s s)/m = kg/s² angegeben und die Masse m besitzt die Einheit kg. (*Lösung:* $T = C\sqrt{m/k}$, wobei C eine dimensionslose Konstante ist. Der genaue Ausdruck für die Periode lautet $T = 2\pi\sqrt{m/k}$ (vgl. Kapitel 14).)

der Kinematik die Richtung des Beschleunigungsvektors bestimmt werden. Wir wissen, dass sich der Körper mit zunehmender Geschwindigkeit nach rechts bewegt. Also zeigt der Beschleunigungsvektor in die Bewegungsrichtung, d. h. nach rechts. Weiter ist zu beachten, dass $\boldsymbol{F}_\mathrm{n}$ und $\boldsymbol{F}_\mathrm{G}$ in dem Diagramm die gleiche Länge besitzen. Ihre Beträge müssen gleich sein, da die Beschleunigung keine vertikale Komponente besitzt. Zur Prüfung unseres Kräftediagramms zeichnen wir ein Vektoradditionsdiagramm (Abbildung 4.9), das bestätigt, dass die Summe der Kräfte in Richtung des Beschleunigungsvektors wirkt.

Die x-Komponente des zweiten Newton'schen Axioms ergibt

$$\sum F_x = F_{\mathrm{n},x} + F_{\mathrm{G},x} + F_x = m\,a_x$$
$$0 + 0 + F = m\,a_x$$

oder

$$a_x = \frac{F}{m}.$$

Die y-Komponente des zweiten Newton'schen Axioms liefert

$$\sum F_y = F_{\mathrm{n},y} + F_{\mathrm{G},y} + F_y = m\,a_y$$
$$F_\mathrm{n} + F_\mathrm{G} + 0 = 0$$

oder

$$F_\mathrm{n} = -F_\mathrm{G}.$$

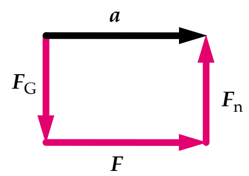
In diesem einfachen Beispiel haben wir zwei Größen ermittelt: die horizontale Beschleunigung ($a_x = F/m$) und die vertikale, durch das Eis erzeugte Kraft $\boldsymbol{F}_\mathrm{n}$ mit $F_\mathrm{n} = -F_\mathrm{G}$.

In Beispiel 4.5 wird ein etwas allgemeinerer Fall mit schräger Zugkraft betrachtet.

Beispiel 4.5 zeigt ein allgemeines Verfahren zum Lösen von Aufgaben mit Hilfe der Newton'schen Axiome, das auch in den nachfolgenden Beispielen 4.6 bis 4.9 Anwendung findet.

1. Zeichnen Sie eine Übersichtsskizze, die alle wichtigen Angaben der Aufgabe zeigt.
2. Isolieren Sie den zu betrachtenden Körper und zeichnen Sie ein Kräftediagrammm, das alle äußeren Kräfte zeigt, die an diesem Körper angreifen. Falls mehrere Körper betrachtet werden, zeichnen Sie für jeden Körper ein eigenes Kräftediagramm. Wählen Sie für jeden Körper ein zweckmäßiges Koordinatensystem und zeichnen Sie es in das Kräftediagramm ein. Ist Ihnen die Beschleunigungsrichtung bekannt, sollten Sie eine Koordinatenachse in diese Richtung legen. Für Körper, die auf einer Oberfläche gleiten, sollten Sie eine Koordinatenachse parallel zu dieser Oberfläche und die andere senkrecht zu ihr legen.
3. Wenden Sie das zweite Newton'sche Axiom $\sum \boldsymbol{F} = m\,\boldsymbol{a}$ (meist in Komponentenschreibweise) an.
4. Nutzen Sie bei Aufgaben, die zwei oder mehr Körper umfassen, außerdem das dritte Newton'sche Axiom $\boldsymbol{F}_\mathrm{B}^{(\mathrm{A})} = -\boldsymbol{F}_\mathrm{A}^{(\mathrm{B})}$ und alle Zwangsbedingungen, um die aus $\sum \boldsymbol{F} = m\,\boldsymbol{a}$ erhaltenen Gleichungen zu vereinfachen.
5. Lösen Sie die daraus resultierenden Gleichungen für die Unbekannten.
6. Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse auf korrekte Maßeinheiten und Plausibilität. Das probeweise Einsetzen von Grenzwerten in die Lösungen ist eine gute Möglichkeit, um Fehler zu erkennen.

ZUM LÖSEN VON AUFGABEN MIT DEN NEWTON'SCHEN AXIOMEN



4.9 Die Vektoraddition aller Kräfte ergibt die Richtung der Gesamtkraft, die mit der Richtung der Beschleunigung übereinstimmt.

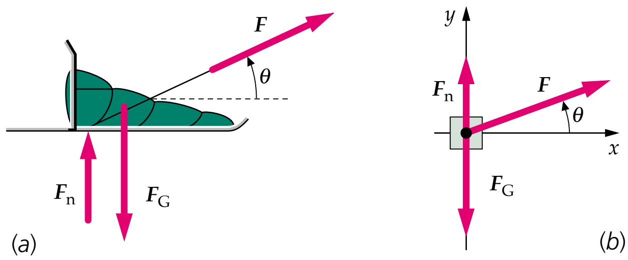
Unser nächstes Beispiel zeigt die Anwendung des zweiten Newton'schen Axioms auf Körper in Fällen, in denen nicht aufgrund bekannter Kräfte die Beschleunigung gesucht wird, sondern in denen bei bekannter Beschleunigung nach der Kraft gefragt ist.

BEISPIEL 4.5: Schlittenrennen

Bei einem Schlittenrennen sollen Studenten die Schlitten ziehen. Dabei tragen sie Schuhe mit Spikes, die besser am Boden haften. Beim Start des Rennens zieht ein Student den Schlitten mit einer Kraft von 150 N unter einem Winkel von 25° gegen die Horizontale an der Leine. Die Masse des aus Schlitten und Leine bestehenden Körpers beträgt 80 kg. Seine Reibung am Boden kann vernachlässigt werden. Gesucht sind a) die Beschleunigung des Schlittens und b) die Normalkraft $\boldsymbol{F}_n$, die der Boden auf den Schlitten ausübt.

Problembeschreibung:

Auf den Körper wirken drei Kräfte: seine nach unten gerichtete Gewichtskraft $\boldsymbol{F}_G$, die nach oben gerichtete Normalkraft $\boldsymbol{F}_n$ sowie die unter einem Winkel von 25° nach oben gerichtete Kraft $\boldsymbol{F}$, mit der der Student am Seil zieht. Da diese Kräfte nicht alle gleich gerichtet sind, wenden wir das zweite Newton'sche Axiom getrennt auf die x- und auf die y-Richtung an.

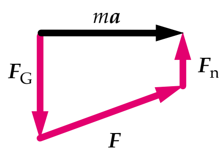


4.10

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Zeichnen Sie ein Kräftediagramm für den Schlitten und die Leine (Abbildung 4.10 b). Vergessen Sie dabei nicht, ein Koordinatensystem einzuzeichnen, dessen eine Achse in Richtung der Beschleunigung des Schlittens zeigt. Da sich der Schlitten mit zunehmender Geschwindigkeit nach rechts bewegt, muss auch die Beschleunigung in dieser Richtung wirken.



4.11

2. *Anmerkung:* Addieren Sie die Vektoren in einem Kräftediagramm (Abbildung 4.11), um zu sehen, ob ihre Summe in Richtung der Beschleunigung zeigt.

3. Wenden Sie das zweite Newton'sche Axiom auf den Schlitten und die Leine an. Schreiben Sie dazu die Formel sowohl in Vektor- als auch in Komponentenschreibweise auf:

$\boldsymbol{F}_n + \boldsymbol{F}_G + \boldsymbol{F} = m\,\boldsymbol{a}$

oder

$F_{n,x} + F_{G,x} + F_x = m\,a_x$

$F_{n,y} + F_{G,y} + F_y = m\,a_y$

4. Schreiben Sie die x-Komponenten von $\boldsymbol{F}_n$, $\boldsymbol{F}_G$ und $\boldsymbol{F}$ auf:

$F_{n,x} = 0, \quad F_{G,x} = 0 \quad \text{und} \quad F_x = |\boldsymbol{F}|\,\cos\theta$

5. Setzen Sie die Ergebnisse aus Schritt 4 in die Gleichung für die x-Komponente aus Schritt 3 ein. Stellen Sie anschließend nach der Beschleunigung a_x um:

$0 + 0 + |\boldsymbol{F}|\cos\theta = m\,a_x$

$$a_x = \frac{|\boldsymbol{F}|\cos\theta}{m} = \frac{(150\,\mathrm{N})\cdot\cos 25°}{80\ \mathrm{kg}} = \boxed{1{,}70\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}}$$

Teilaufgabe b

1. Schreiben Sie die y-Komponente von $\boldsymbol{a}$ auf:

$a_y = 0$

2. Schreiben Sie die y-Komponenten von $\boldsymbol{F}_n$, $\boldsymbol{F}_G$ und $\boldsymbol{F}$ auf:

$F_{n,y} = F_n, \quad F_{G,y} = -m\,g \quad \text{und} \quad F_y = |\boldsymbol{F}|\,\sin\theta$

3. Setzen Sie die Ergebnisse aus den Schritten 1 und 2 der Teilaufgabe b in die Gleichung für die y-Komponente aus Schritt 3 der Teilaufgabe a ein. Stellen Sie anschließend nach der Beschleunigung F_n um:

$$\sum F_y = F_n - m\,g + |\boldsymbol{F}|\,\sin\theta = 0$$

$$\begin{aligned} F_n &= m\,g - |\boldsymbol{F}|\,\sin\theta \\ &= (80\,\mathrm{kg})\cdot(9{,}81\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{kg}^{-1}) - (150\,\mathrm{N})\cdot\sin 25° \\ &= \boxed{721\,\mathrm{N}} \end{aligned}$$

Kommentar: Beachten Sie, dass nur die horizontale Komponente von $\boldsymbol{F}$, d.h. $|\boldsymbol{F}|\cos\theta$, zur Beschleunigung des Körpers beiträgt. Außerdem trägt das Eis in diesem Beispiel nicht das gesamte Gewicht des Körpers, da ein Teil davon ($|\boldsymbol{F}|\sin\theta$) bereits von der Leine gehalten wird.

! Plausibilitätsprüfung: Wenn $\theta=0$ ist, wird der Körper durch die gesamte Kraft $\boldsymbol{F}$ beschleunigt. Dann sollte das Eis auch das gesamte Gewicht des Körpers tragen. Dies stimmt mit unseren Ergebnissen überein, die in diesem Fall $a_x = F/m$ und $F_n = m\,g$ ergeben.

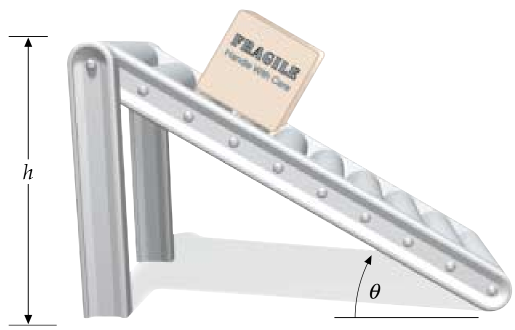
ÜBUNG: Welche maximale Kraft kann bei $\theta=25°$ an der Leine ziehen, ohne dass sich der Schlitten vom Boden ablöst? (*Lösung:* $F=1{,}86$ kN.)

BEISPIEL 4.6: Entladen eines LKW

Stellen Sie sich vor, Sie arbeiten bei einer Speditionsfirma und müssen mit einer Entladerampe (Abbildung 4.12) ein großes Paket mit zerbrechlichen Gütern aus Ihrem LKW ausladen. Die Rampe ist 1 m hoch und besitzt Rollen, so dass sie nahezu reibungsfrei ist. Sie ist mit einem Winkel θ gegen die Horizontale aufgestellt. Wenn die senkrechte Geschwindigkeitskomponente des Pakets beim Auftreffen auf den Boden am Ende der Rampe größer als 2,5 m/s ist (was einem Fall aus 30 cm Höhe entspricht), zerbricht die empfindliche Fracht. Wie groß darf der Winkel θ maximal sein, um eine Beschädigung des Pakets auszuschließen?

IM KONTEXT

Problembeschreibung: Auf das Paket wirken zwei Kräfte, seine Gewichtskraft $\boldsymbol{F}_G$ und die Normalkraft $\boldsymbol{F}_n$. Da die beiden Kräfte nicht in eine Richtung zeigen, kann ihre Summe nicht null sein. Somit gibt es eine resultierende Kraft, die das Paket die Rampe hinab beschleunigt. Die Rampe stellt eine Zwangsbedingung dar, aufgrund derer sich das Paket nur auf ihrer Oberfläche bewegen kann. Aus diesem Grund legen wir die x-Richtung auf der Rampenoberfläche so, dass sie nach unten zeigt. Zur Bestimmung der Beschleunigung wenden wir das zweite Newton'sche Axiom auf das Paket an. Ist die Beschleunigung bekannt, kann mit Hilfe der Kinematik der maximale gefahrlose Winkel bestimmt werden.



4.12

Lösung:

1. Schreiben Sie den Zusammenhang zwischen der nach unten gerichteten, senkrechten Geschwindigkeitskomponente v_s des Pakets und dessen Geschwindigkeit v entlang der Rampe auf:

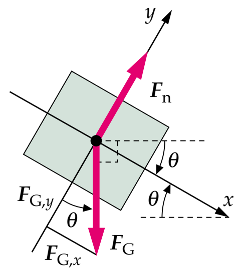
$$v_s = v\sin\theta$$

2. Die Geschwindigkeit v hängt mit der Verschiebung Δx entlang der Rampe über folgende kinematische Gleichung zusammen:

$$v^2 = v_0^2 + 2\,a_x\,\Delta x$$

3. Um a_x zu ermitteln, wenden wir das zweite Newton'sche Axiom ($\sum F_x = m\,a_x$) auf das Paket an. Dazu zeichnen wir zuerst ein Kräftediagramm (Abbildung 4.13). Auf das Paket wirken zwei Kräfte: die Gewichtskraft und die Normalkraft. Wir wählen die Beschleunigungsrichtung, die entlang der Rampe nach unten zeigt, als positive x-Richtung.

Anmerkung: Wie das Kräftediagramm zeigt, ist der Winkel zwischen der Gewichtskraft $\boldsymbol{F}_\mathrm{G}$ und der negativen y-Achse gleich dem Winkel θ zwischen der Rampenebene und dem Boden. Man sieht außerdem, dass $F_{\mathrm{G},x} = |\boldsymbol{F}_\mathrm{G}|\,\sin\theta$ ist.



4.13

4. Anwendung des zweiten Newton'schen Axioms ergibt:

Anmerkung: $\boldsymbol{F}^\mathrm{n}$ ist senkrecht zur x-Achse und $|\boldsymbol{F}^\mathrm{G}| = m\,g$.

$F_{\mathrm{n},x} + F_{\mathrm{G},x} = m\,a_\mathrm{x}$

wobei

$F_{\mathrm{n},x} = 0 \quad$ und $\quad F_{\mathrm{G},x} = |\boldsymbol{F}_\mathrm{G}|\,\sin\theta = m\,g\,\sin\theta$

5. Einsetzen und Umstellen nach der Beschleunigung ergibt:

$0 + m\,g\,\sin\theta = m\,a_\mathrm{x}$

und somit

$a_\mathrm{x} = g\,\sin\theta$

6. Nach dem Einsetzen von a_x in die kinematische Gleichung (Schritt 2) und dem Nullsetzen von v_0 ergibt sich:

$v^2 = 2g\,\sin\theta\,\Delta x$

7. Aus Abbildung 4.12 ist ersichtlich, dass $\Delta x\,\sin\theta = h$ gilt, wobei Δx die Länge der Rampe und h ihre Höhe ist:

$v^2 = 2g\,h$

8. Setzen Sie dies in die Gleichung für die senkrechte Geschwindigkeitskomponente $v_\mathrm{s} = v\,\sin\theta$ ein:

$v_s = \sqrt{2g\,h}\cdot\sin\theta$

9. Berechnen Sie nun aus der höchsten zulässigen Geschwindigkeit den maximalen Winkel:

$2{,}5\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} = \sqrt{2\cdot(9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}})\cdot(1{,}0\,\mathrm{m})}\cdot\sin\theta_\mathrm{max}$

$\theta_\mathrm{max} = \boxed{34{,}4°}$

Kommentar: Die Beschleunigung auf der geneigten Ebene ist konstant und gleich $g\,\sin\theta$. Dagegen hängt die Geschwindigkeit v am Ende der Rampe wegen $v = \sqrt{2g\,h}$ nicht vom Winkel θ ab.

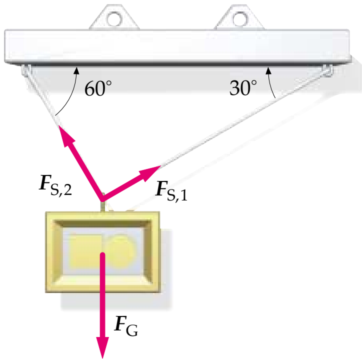
ÜBUNG: Zeigen Sie durch Anwendung von $\sum F_y = m\,a_y$ auf das Paket, dass $F_\mathrm{n} = m\,g\,\cos\theta$ ist.

BEISPIEL 4.7: Zur Aufhängung eines Bilds

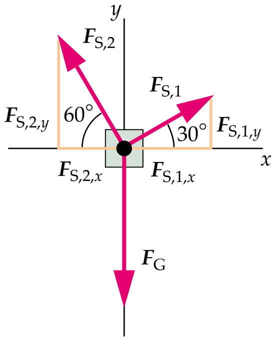
Ein Bild mit einem Gewicht von 8 N wird von zwei Drähten gehalten, in denen die Zugspannungen $\boldsymbol{F}_{S,1}$ bzw. $\boldsymbol{F}_{S,2}$ wirken (Abbildung 4.14). Ermitteln Sie diese beiden Zugspannungen.

ZUR ÜBUNG

Problembeschreibung: Da das Bild nicht beschleunigt wird, muss die resultierende Gesamtkraft null sein. Die drei Kräfte, die auf das Bild wirken, sind seine Gewichtskraft $\boldsymbol{F}_G$ und die beiden Zugspannungen $\boldsymbol{F}_{S,1}$ und $\boldsymbol{F}_{S,2}$ der Drähte.



4.14



4.15

Lösung:

Decken Sie zunächst die rechte Spalte ab und versuchen Sie jeweils, die Ergebnisse selbst zu ermitteln.

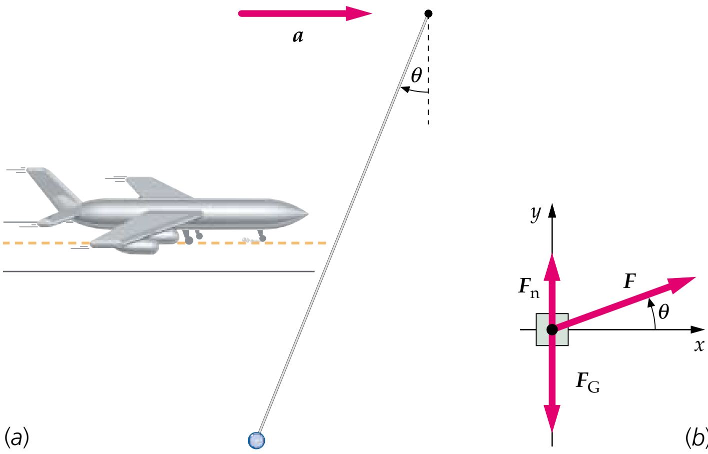
Schritte	Ergebnisse
1. Fertigen Sie ein Kräftediagramm für das Bild an (Abbildung 4.15). Zeichnen Sie auch die x- und y-Komponenten der beiden Zugspannungen ein.	
2. Wenden Sie $\sum \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ in Vektorform auf das Bild an.	$\boldsymbol{F}_{S,1} + \boldsymbol{F}_{S,2} + \boldsymbol{F}_G = m\boldsymbol{a}$
3. Zerlegen Sie beide Kräfte in ihre x- und y-Komponenten. Sie erhalten so zwei Gleichungen für die beiden Unbekannten $\lvert\boldsymbol{F}_{S,1}\rvert$ und $\lvert\boldsymbol{F}_{S,2}\rvert$, wobei $F_{G,x} = 0$ und $F_{G,y} = F_G = -8$ N sind.	$F_{S,1,x} + F_{S,2,x} + F_{G,x} = 0$ $F_{S,1,y} + F_{S,2,y} + F_{G,y} = 0$ $\lvert\boldsymbol{F}_{S,1}\rvert \cos 30° - \lvert\boldsymbol{F}_{S,2}\rvert \cos 60° + 0 = 0$ $\lvert\boldsymbol{F}_{S,1}\rvert \sin 30° + \lvert\boldsymbol{F}_{S,2}\rvert \sin 60° + F_G = 0$
4. Stellen Sie die Gleichung für die x-Komponenten nach $\lvert\boldsymbol{F}_{S,2}\rvert$ in Abhängigkeit von $\lvert\boldsymbol{F}_{S,1}\rvert$ um.	$\lvert\boldsymbol{F}_{S,2}\rvert = \lvert\boldsymbol{F}_{S,1}\rvert \dfrac{\cos 30°}{\cos 60°} = \lvert\boldsymbol{F}_{S,1}\rvert \cdot \sqrt{3}$
5. Setzen Sie die resultierende Formel für $\lvert\boldsymbol{F}_{S,2}\rvert$ aus Schritt 4 in die Gleichung für die y-Komponenten ein und stellen Sie sie nach $\lvert\boldsymbol{F}_{S,1}\rvert$ um.	$\lvert\boldsymbol{F}_{S,1}\rvert \sin 30° + \left(\lvert\boldsymbol{F}_{S,1}\rvert \cdot \sqrt{3}\right) \sin 60° + F_G = 0$ $\lvert\boldsymbol{F}_{S,1}\rvert = -\frac{1}{2} F_G = \boxed{4\,\text{N}}$
6. Berechnen Sie aus $\lvert\boldsymbol{F}_{S,1}\rvert$ nun noch $\lvert\boldsymbol{F}_{S,2}\rvert$.	$\lvert\boldsymbol{F}_{S,2}\rvert = \lvert\boldsymbol{F}_{S,1}\rvert \cdot \sqrt{3} = \boxed{6{,}93\,\text{N}}$

Kommentar: Wie zu erwarten, trägt der steilere der beiden Drähte den größeren Anteil der Last des Bilds. Außerdem ist $\lvert\boldsymbol{F}_{S,1}\rvert + \lvert\boldsymbol{F}_{S,2}\rvert > 8$ N. Der zusätzliche Kraftanteil entsteht dadurch, dass die Drähte nach links und nach rechts ziehen.

BEISPIEL 4.8: Ein Düsenflugzeug beim Start

Während Ihr Düsenflugzeug die Startbahn entlang rollt, um für den Start zu beschleunigen, wollen Sie seine Beschleunigung messen. Dazu packen Sie Ihr Yo-Yo aus, lassen es nach unten hängen und messen, dass es einen Winkel von 22° gegen die Vertikale bildet (Abbildung 4.16a). a) Wie stark beschleunigt das Flugzeug? b) Wie groß ist die Zugspannung im Faden, wenn das Yo-Yo eine Masse von 40 g hat?

Problembeschreibung: Yo-Yo und Flugzeug besitzen in der Abbildung die gleiche Beschleunigung nach rechts. Die resultierende Kraft auf das Yo-Yo zeigt in Richtung seiner Beschleunigung. Diese Kraft wird von der horizontalen Komponente der Zugspannung $\boldsymbol{F}_S$ geliefert. Die vertikale Komponente von $\boldsymbol{F}_S$ ist mit der Gewichtskraft des Yo-Yos im Gleichgewicht. Wir wählen ein Koordinatensystem, in welchem die x-Richtung parallel zum Beschleunigungsvektor $\boldsymbol{a}$ ist und die y-Richtung vertikal liegt. Wenn man das zweite Newton'sche Axiom für die x- und für die y-Richtung aufschreibt, erhält man zwei Gleichungen zur Bestimmung der beiden Unbekannten a und F_S.



(a) (b)

4.16

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Zeichnen Sie ein Kräftediagramm für das Yo-Yo (Abbildung 4.16b). Wählen Sie als positive x-Richtung die Beschleunigungsrichtung.

2. Wenden Sie $\sum F_x = m\,a_x$ auf das Yo-Yo an und drücken Sie $F_{S,x}$ mit Hilfe der Trigonometrie durch $|\boldsymbol{F}_S|$ aus:

$F_{S,x} + F_{G,x} = m\,a_x$

$|\boldsymbol{F}_S|\,\sin\theta + 0 = m\,a_x$

oder

$|\boldsymbol{F}_S|\,\sin\theta = m\,a_x$

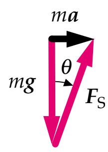
3. Wenden Sie $\sum F_y = m\,a_y$ auf das Yo-Yo an. Vereinfachen Sie die Formel wieder mit Hilfe der Trigonometrie (Abbildung 4.16c) und $F_G = -m\,g$. Da die Beschleunigung in die positive x-Richtung wirkt, ist $a_y = 0$:

$F_{S,y} + F_{G,y} = m\,a_y$

$|\boldsymbol{F}_S|\,\cos\theta - m\,g = 0$

oder

$|\boldsymbol{F}_S|\,\cos\theta = m\,g$



(c)

4. Dividieren Sie das Ergebnis aus Schritt 2 durch das aus Schritt 3 und stellen Sie die entstehende Gleichung nach der Beschleunigung um. Da der Beschleunigungsvektor in die positive x-Richtung zeigt, ist $a = a_x$:

$$\frac{|\boldsymbol{F}_S|\,\sin\theta}{|\boldsymbol{F}_S|\,\cos\theta} = \frac{m\,a_x}{m\,g}$$

und damit

$$\tan\theta = \frac{a_x}{g}$$

und

$$a = g\,\tan\theta = (9{,}81\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})\cdot\tan 22^\circ = \boxed{3{,}96\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}}$$

Teilaufgabe b

Da $\theta < 90^\circ$ ist, ergibt sich aus Schritt 3 die Zugspannung F_S:

$$FS = \frac{m\,g}{\cos\theta} = \frac{(0{,}04\ \mathrm{kg})\cdot(9{,}81\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})}{\cos 22^\circ} = \boxed{0{,}423\ \mathrm{N}}$$

Kommentar: Offenbar ist F_S größer als die Gewichtskraft des Yo-Yos ($m\,g = 0{,}392$ N), da der Faden das Yo-Yo nicht nur vor dem Herunterfallen bewahren muss, sondern es zusätzlich auch noch horizontal beschleunigt. Im obigen Fall haben wir die Einheit m/s² für g verwendet, da wir eine Beschleunigung berechnen wollten.

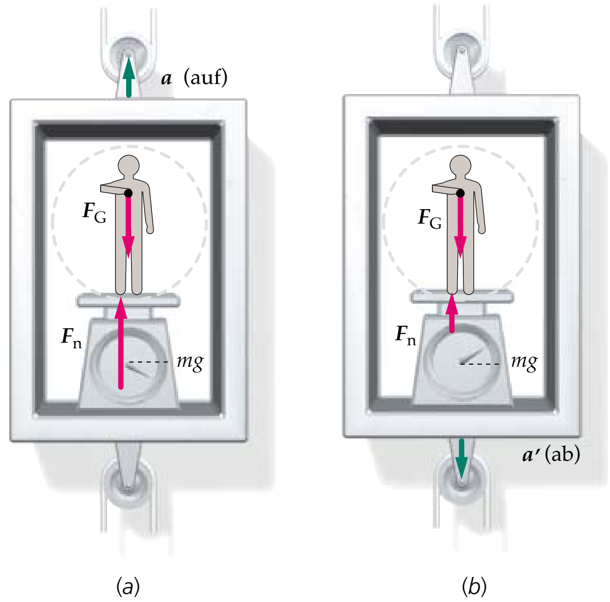
! Plausibilitätsprüfung: Bei $\theta = 0$ ergibt sich $F_S = m\,g$ und damit $a = 0$.

ÜBUNG: Bei welcher Beschleunigung a wäre die Zugspannung im Faden $3\,m\,g$? Wie groß wäre θ in diesem Fall? (*Lösung:* $a = 27{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$, $\theta = 70{,}5^\circ$.)

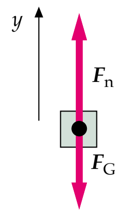
BEISPIEL 4.9: Das Körpergewicht im Fahrstuhl

Eine Person mit einem Gewicht von 80 kg steht auf einer am Boden angebrachten Waage in einem Fahrstuhl. Die Waage misst Kräfte und ist in Newton geeicht. Was zeigt die Waage an, wenn der Fahrstuhl a) mit der Beschleunigung a nach oben beschleunigt wird, b) mit der Beschleunigung $-a'$ nach unten beschleunigt wird und c) mit 20 m/s steigt, dabei aber mit 8 m/s^2 abgebremst wird?

Problembeschreibung: Die Waage zeigt stets die Normalkraft $\boldsymbol{F}_\mathrm{n}$ an, die die Waage auf die Person ausübt (Abbildung 4.17). Da die Person dem Fahrstuhl gegenüber in Ruhe ist, besitzt sie dieselbe Beschleunigung wie er. Auf die Person wirken also zwei Kräfte: ihre Gewichtskraft mg und die nach oben gerichtete Normalkraft der Waage $\boldsymbol{F}_\mathrm{n}$. Die Summe dieser beiden Kräfte bewirkt die beobachtete Beschleunigung. Wir legen die positive y-Richtung so, dass sie nach oben weist.



4.17



4.18

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Zeichnen Sie das Kräftediagramm für die Person (Abbildung 4.18).

2. Wenden Sie $\sum \boldsymbol{F} = m\,\boldsymbol{a}$ auf die y-Richtung an:

$$F_{\mathrm{n},y} + F_{\mathrm{G},y} = m\,a_y$$
$$F_\mathrm{n} - m\,g = m\,a$$

3. Stellen Sie nach F_n um. Diese Kraft wird an der Waage angezeigt und ist das scheinbare Gewicht der Person:

$$F_\mathrm{n} = m\,g + m\,a = \boxed{m\,(g+a)}$$

Teilaufgabe b

1. Wenden Sie $\sum \boldsymbol{F} = m\,\boldsymbol{a}$ auf die y-Richtung an. In diesem Fall wird der Fahrstuhl mit $-a'$ nach unten beschleunigt:

$$F_{\mathrm{n},y} + F_{\mathrm{G},y} = m\,a_y$$
$$F_\mathrm{n} - m\,g = m\,(-a')$$

2. Stellen Sie nach F_n um:

$$F_\mathrm{n} = m\,g - m\,a' = \boxed{m\,(g-a')}$$

Teilaufgabe c

1. Wenden Sie $\sum \boldsymbol{F} = m\,\boldsymbol{a}$ auf die y-Richtung an. Beachten Sie, dass die Beschleunigung nach unten wirkt. (Warum?) Folglich ist a_y negativ:

$$F_{n,y} + F_{G,y} = m\,a_y$$

2. Stellen Sie nach F_n um:

$$F_n - m\,g = m\,a_y$$
$$F_n = m\,(g + a_y)$$
$$= (80\,\text{kg}) \cdot (9{,}81\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2} - 8{,}00\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2})$$
$$= \boxed{145\,\text{N}}$$

Kommentar: Unabhängig davon, ob sich der Fahrstuhl gerade nach oben oder nach unten bewegt, ist das scheinbare Gewicht der Person um $m\,a$ größer als $m\,g$, wenn er nach oben beschleunigt wird. Die Person hat den Eindruck, dass die Gravitation von g auf $g+a$ gestiegen ist. Beschleunigt der Fahrstuhl hingegen nach unten, ist ihr scheinbares Gewicht um $-m\,a'$ kleiner als $m\,g$. Die Person hat das Gefühl, leichter zu sein, so, wie wenn die Gravitation nur noch $g - a'$ betrüge. Bei $a' = g$ würde der Fahrstuhl frei fallen und die Person wäre schwerelos (d.h. gewichtslos).

ÜBUNG: Ein nach unten fahrender Fahrstuhl hält mit einer Beschleunigung von 4 m/s² an. Diesmal steht eine Person mit einem Gewicht von 70 kg auf einer Waage im Fahrstuhl. Was zeigt die Waage an, während der Fahrstuhl anhält? (*Lösung:* 967 N.)

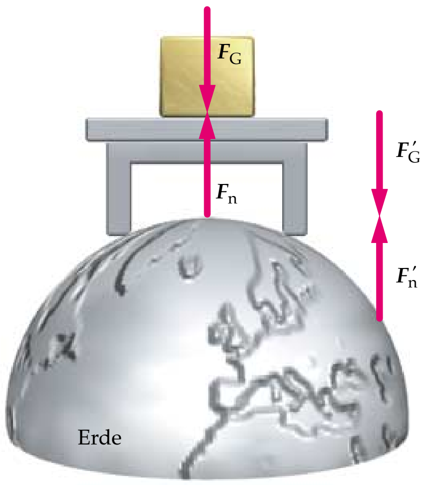
ÜBUNG: Ein Mann steht auf einer Waage in einem Fahrstuhl, der mit der Beschleunigung a nach oben beschleunigt wird. Die Waage zeigt 960 N an. Nachdem er einen 20 kg schweren Kasten in die Hand genommen hat, zeigt die Waage 1200 N an. Gesucht sind die Masse des Manns, sein Gewicht sowie die Beschleunigung a. (*Lösung:* 80,0 kg, 785 N, 2,19 m/s².)

4.6 Das dritte Newton'sche Axiom

Wenn zwei Körper wechselwirken, üben sie Kräfte aufeinander aus. Das dritte Newton'sche Axiom besagt, dass diese Kräfte den gleichen Betrag, aber die entgegengesetzte Richtung haben. Wenn also der Körper A eine Kraft auf den Körper B ausübt, übt der Körper B gleichzeitig eine Kraft auf den Körper A aus, die den gleichen Betrag, aber die entgegengesetzte Richtung hat. Kräfte treten also stets paarweise auf. Häufig spricht man in diesem Fall bei der einen Kraft von der „Aktion" und bei der anderen von der „Reaktion" Dies ist allerdings etwas unglücklich formuliert, da es sich so anhört, als würde die zweite Kraft auf die erste reagieren, was nicht der Fall ist. Beide Kräfte treten gleichzeitig auf.

! Jede der beiden Kräfte kann als Aktionskraft und die jeweils andere dann als Reaktionskraft bezeichnet werden. Wenn wir eine äußere Kraft, die auf einen Körper wirkt, als eine Aktionskraft bezeichnen, muss die zugehörige Reaktionskraft stets auf einen anderen Körper wirken. Zwei äußere Kräfte, die auf ein und denselben Körper wirken, können also nie ein „Aktions-Reaktions-Paar" bilden.

In Abbildung 4.19 liegt ein Block auf einem Tisch. Die Kraft, die den Block nach unten zieht, ist seine Gewichtskraft $\boldsymbol{F}_G$, die durch die Gravitation der Erde hervorgerufen wird. Der Tisch übt, indem er den Block hält, seinerseits eine gleich große, aber entgegengesetzt wirkende Kraft $\boldsymbol{F}_n = -\boldsymbol{F}_G$ auf den Block aus. Diese Kräfte bilden ein Aktions-Reaktions-Paar. Wären sie die einzigen vorhandenen Kräfte, würden Block und Tisch nach unten beschleunigt, da in diesem Fall die Gravitationskraft $\boldsymbol{F}'_G$ der Erde auf Block und Tisch wirkt. $\boldsymbol{F}'_G$ wird aber durch die Kraft $\boldsymbol{F}'_n = -\boldsymbol{F}'_G$ kompensiert, die Erde auf Tisch und Block ausübt. Die Kräfte $\boldsymbol{F}'_G$ und $\boldsymbol{F}'n$, bilden also ebenfalls ein Aktions-Reaktions-Paar.



4.19 Aktions- und Reaktionskräfte bei einem Block auf einem Tisch, der seinerseits auf der Erde steht.

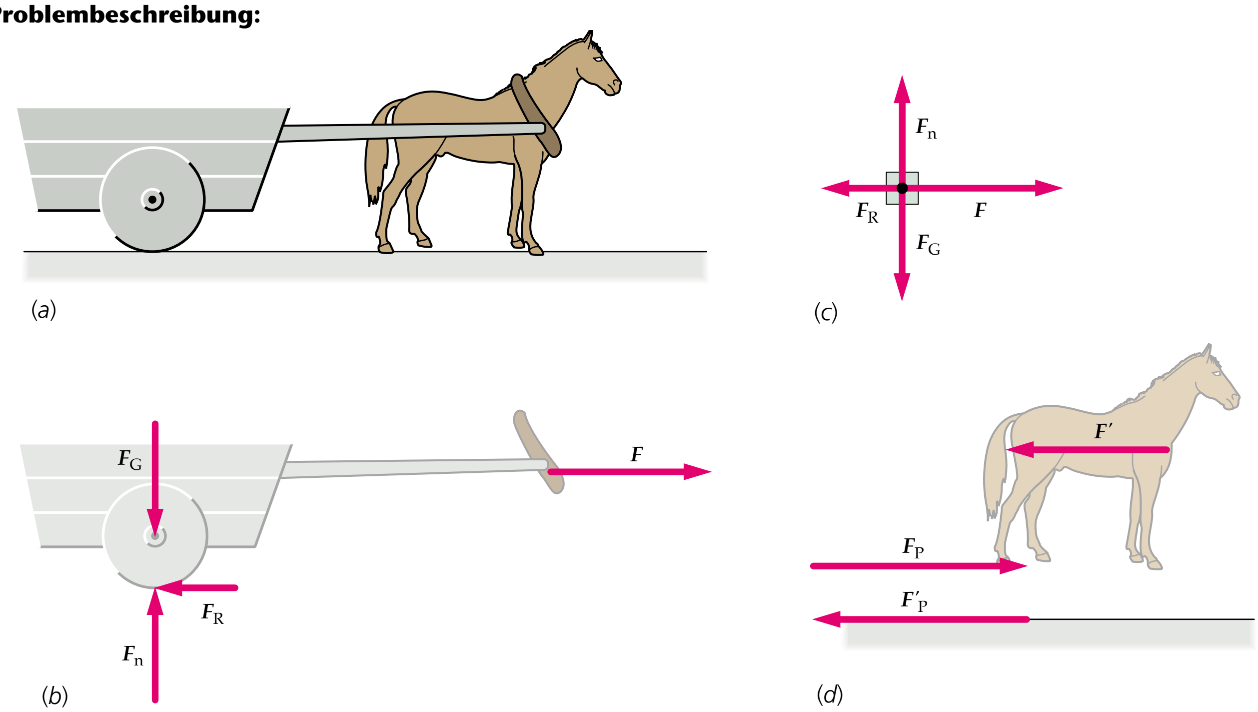
ÜBUNG: Bilden die Kräfte $\boldsymbol{F}_G$ und $\boldsymbol{F}_n$ aus Abbildung 4.19 ebenfalls ein Aktions-Reaktions-Paar? (*Lösung:* Nein, denn beide Kräfte sind äußere Kräfte, die auf denselben Körper, nämlich den Block, wirken. Somit können sie kein Aktions-Reaktions-Paar bilden.)

Beispiel 4.10 verdeutlicht verschiedene Aktions-Reaktions-Paare beim Ziehen eines Pferdewagens.

BEISPIEL 4.10: Das Pferd vor dem Wagen

Ein Pferd weigert sich, seinen Wagen zu ziehen (Abbildung 4.20a). Dabei überlegt es sich: „Aus dem dritten Newton'schen Axiom folgt, dass für jede Kraft, die ich auf den Wagen ausübe, dieser Wagen auch eine gleich große, aber entgegengesetzt gerichtete Kraft auf mich ausübt. Damit ist die Gesamtkraft gleich null und ich werde den Wagen niemals beschleunigen können." Welchen Denkfehler hat das Pferd gemacht?

Problembeschreibung:



4.20

Da uns die Bewegung des Wagens interessiert, fertigen wir eine Skizze von ihm an (Abbildung 4.20b). Die Kraft, die das Pferd am Geschirr erzeugt, sei $\boldsymbol{F}$. (Das Geschirr ist fest mit dem Wagen verbunden, so dass es als Teil von ihm betrachtet werden kann.) Weitere auf den Wagen wirkende Kräfte sind sein Gewicht $\boldsymbol{F}_G$, die vertikale Tragkraft des Bodens $\boldsymbol{F}_n$ und die horizontal wirkende Reibungskraft durch das Pflaster $\boldsymbol{F}_R$.

Lösung:

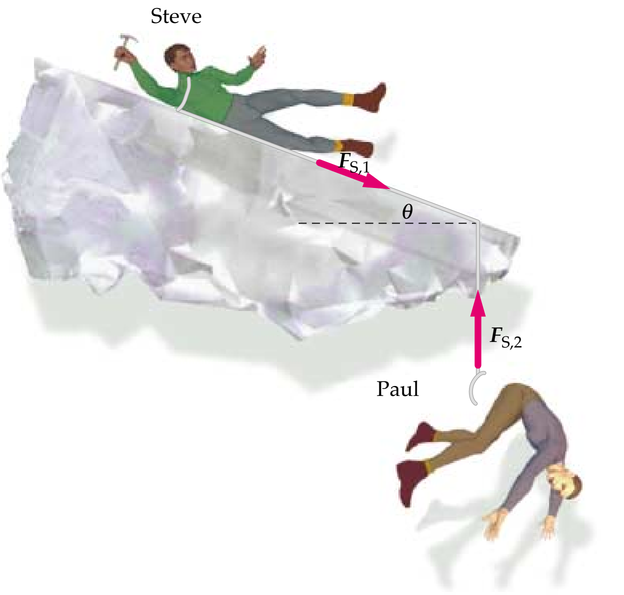
1. Zeichnen Sie ein Kräftediagramm für den Wagen (siehe Abbildung 4.20c). Da der Wagen vertikal nicht beschleunigt wird, müssen die vertikalen Kräfte insgesamt null ergeben. Von den horizontalen Kräften wirkt $\boldsymbol{F}$ nach rechts und $\boldsymbol{F}_R$ nach links. Wenn $|\boldsymbol{F}|$ größer als $|\boldsymbol{F}_R|$ ist, wird der Wagen nach rechts beschleunigt.

2. Die Reaktionskraft zur Kraft $\boldsymbol{F}$, die wir $\boldsymbol{F}'$ nennen wollen, wirkt auf das Pferd und nicht auf den Wagen (Abbildung 4.20d). Sie hat keinen Einfluss auf den Wagen, wohl aber auf das Pferd: Soll das Pferd nach rechts beschleunigen, muss das Pflaster auf die Hufe eine Kraft $|\boldsymbol{F}_P|$ nach rechts ausüben, die größer ist als $|\boldsymbol{F}'|$.

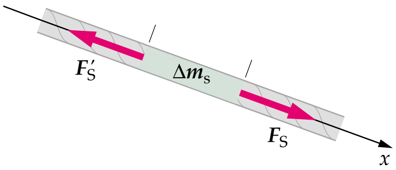
Kommentar: Dieses Beispiel zeigt, wie wichtig eine Skizze für die Lösung der Aufgabe sein kann. Hätte das Pferd sich eine solche gezeichnet, hätte es gesehen, dass es nur stark gegen das Pflaster zu drücken braucht, um vorwärts zu kommen.

ÜBUNG: Sie stehen einem Freund gegenüber. Legen Sie Ihre Handflächen gegen die Handflächen Ihres Freunds und drücken Sie dagegen. Kann Ihr Freund auf Sie eine Kraft ausüben, ohne dass Sie auf ihn eine Gegenkraft zu ihr ausüben? Versuchen Sie es!

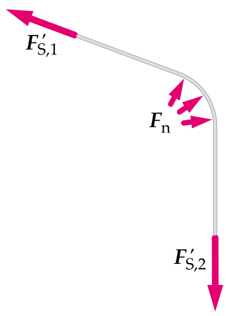
ÜBUNG: Richtig oder falsch? Die Kraft, die ein Wagen auf das Pferd ausübt, ist nur dann gleich und entgegengerichtet der Kraft, die das Pferd auf den Wagen ausübt, wenn Pferd und Wagen nicht beschleunigen oder bremsen. (*Lösung:* Falsch! Das Aktions-Reaktions-Paar der Kräfte beschreibt die Wechselwirkung zweier Körper. Eine Kraft kann nicht ohne die andere existieren. Beide sind *stets* gleich groß und entgegengesetzt gerichtet.)



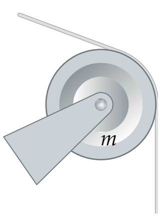
4.21 Die beiden Bergsteiger sind durch ein gespanntes, nicht dehnbares Seil miteinander verbunden. Dadurch verlaufen ihre Bewegungen parallel zu ihren Seilenden gleich.



4.22 Ein theoretisches masseloses Seil könnte ohne Kraft beliebig beschleunigt werden.



4.23 Unter Vernachlässigung der Reibung wirkt die Kraft der Gletscherkante senkrecht auf das Seil und ist demnach eine Normalkraft.



4.24 Das Seil läuft nun über eine reibungsfrei gelagerte Rolle. Ist die Zugspannung auch hier im ganzen Seil gleich?

4.7 Aufgabenstellungen mit zwei und mehr Körpern

In einigen Aufgaben kommen mehrere Körper vor, die miteinander in Kontakt stehen oder durch ein Seil oder durch eine Feder miteinander verbunden sind. Solche Aufgaben können gelöst werden, indem man für jeden Körper ein eigenes Kräftediagramm zeichnet und daraufhin auf jeden Körper das zweite Newton'sche Axiom anwendet. Aus den auf diese Weise erhaltenen Gleichungen zusammen mit den Gleichungen, die die Wechselwirkungen und Zwangsbedingungen beschreiben, werden dann die Unbekannten berechnet. Sind die Körper in direktem Kontakt miteinander, sind die Kräfte, die sie aufeinander ausüben, nach dem dritten Newton'schen Axiom gleich groß und entgegengesetzt gerichtet. Bei zwei Körpern, die sich entlang einer Geraden bewegen und durch ein straffes, nicht dehnbares Seil verbunden sind, sind die Beschleunigungskomponenten parallel zum Seil für beide Körper gleich groß, da ihre Bewegungen parallel zum Seil völlig gleich sind. Verläuft das Seil über eine Rolle oder über einen Pflock, bedeutet „parallel zum Seil" in diesem Fall „parallel zu dem am jeweiligen Körper befestigten Seilstück".

Betrachten Sie die Bewegung von Steve und Paul aus Abbildung 4.21. Die Geschwindigkeit, mit der sich Paul nach unten bewegt, ist genauso groß wie die, mit der Steve über den Gletscher rutscht. Damit ist Pauls Geschwindigkeitskomponente parallel zu dem an ihm befestigten Seilstück genauso groß wie die Geschwindigkeitskomponente von Steve parallel zu dem an ihm angebrachten Seilstück. Diese beiden Geschwindigkeitskomponenten bleiben immer zueinander gleich. Wenn sich die Geschwindigkeit von Steve und Paul ändert, dann für beide gleich. Folglich sind auch ihre Beschleunigungskomponenten parallel zum Seil gleich.

Die Zugspannung in einem Seil oder Tau ist die Kraft, die ein Seilstück auf das nächste ausübt. Diese Zugspannung kann innerhalb des Seils verschieden sein. So ist bei einem Kletterseil, das lose von der Decke einer Sporthalle herabhängt, die Zugspannung oben am größten, da der obere Abschnitt das Gewicht des gesamten darunter hängenden Seils tragen muss. Allerdings wird bei den Aufgaben in diesem Buch normalerweise angenommen, dass das Eigengewicht des Seils so klein ist, dass Zugspannungsänderungen durch dieses Eigengewicht des Seils oder Taus vernachlässigt werden können, d. h. dass wir Zugspannungsänderungen im Seil, die durch Beschleunigungen des Seils auftreten, ebenfalls vernachlässigen können. Um uns davon zu überzeugen, dass dies tatsächlich so ist, betrachten wird das Kräftediagramm eines Seilstücks, das mit Steve verbunden ist. Dabei sei Δm_s die Masse dieses Seilstücks (Abbildung 4.22).

Wendet man das zweite Newton'sche Axiom auf das Seilstück an, ergibt sich $\boldsymbol{F}S + \boldsymbol{F}S' = \Delta m_s \, a_x \, \hat{\boldsymbol{x}}$. Wenn die Masse des Seilstücks vernachlässigbar ist, gilt $F_S = -F_S'$. Damit kann das Seilstück beschleunigt werden, ohne dass eine resultierende Kraft darauf wirkt. Genauer gesagt reicht ein winziger Unterschied der Zugspannung im Seil bereits aus, um es beliebig stark zu beschleunigen.

Als Nächstes betrachten wir das Seil, mit dem Steve und Paul verbunden sind, als Ganzes. Vernachlässigt man die Gravitation, wirken drei Kräfte auf das Seil: Steve und Paul erzeugen jeweils eine Kraft, aber auch das Eis an der Gletscherkante erzeugt eine solche. Bei Vernachlässigung der Reibung zwischen Eis und Seil ist die Kraft, die das Eis auf das Seil ausübt, immer eine Normalkraft (Abbildung 4.23). Eine Normalkraft hat aber keine Komponente parallel zum Seil, kann also auch keine Zugspannungsänderung hervorrufen. Demnach ist die Zugspannung über die gesamte Länge des Seils gleich. Zusammenfassend gilt: In einem Seil mit vernachlässigbarer Masse, dessen Richtung dadurch geändert wird, dass es über eine reibungsfreie Oberfläche gleitet, ist die Zugkraft im ganzen Seil gleich.

Die letzten Beispiele 4.11 und 4.12 verdeutlichen die Überlagerung von äußeren Kräften und Aktions-Reaktions-Paaren.

ÜBUNG: Wir nehmen nun an, das Seil sei nicht über die Gletscherkante, sondern über eine reibungsfrei gelagerte Rolle geleitet (Abbildung 4.24). Wäre die Zugspannung auch dann im ganzen Seil gleich?
(*Lösung:* Nein. Die Reibung durch die Rollenlagerung ist zwar ein wichtiger Punkt. Ein anderer ist aber, dass die Rolle selbst eine Masse und damit eine Trägheit besitzt. Eine Änderung der Drehgeschwindigkeit der Rolle erfordert deshalb stets eine Differenz der Zugspannungen zwischen den beiden Seilstücken.)

BEISPIEL 4.11: Bergsteiger

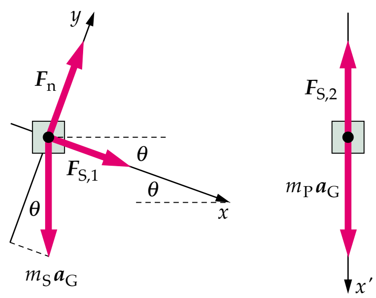
Paul (mit der Masse m_P) fällt wie in Abbildung 4.21 gezeigt von der Kante eines Gletschers. Glücklicherweise ist er mit einer Sicherungsleine an Steve (mit der Masse m_S) befestigt, der eine Bergsteigeraxt mit sich führt. Bevor Steve seine Axt einschlagen kann, damit beide anhalten, gleitet er ohne Reibung über das Eis. Dabei ist er über das Seil mit Paul verbunden. Berechnen Sie Pauls und Steves Beschleunigung sowie die Zugspannung im Seil unter der Annahme, dass keine Reibung zwischen Eis und Seil auftritt.

Problembeschreibung: Da das Seil als masselos und das Gletschereis als reibungsfrei angesehen wird, besitzen die Zugspannungen $\boldsymbol{F}_{S,1}$ und $\boldsymbol{F}_{S,2}$ den gleichen Betrag. Das Seil dehnt sich nicht, ist aber immer straff gespannt. Somit haben Paul und Steve stets dieselbe Geschwindigkeit. Damit haben auch ihre Beschleunigungen $\boldsymbol{a}_S$ und $\boldsymbol{a}_P$ stets den gleichen Betrag, während deren Richtungen verschieden sind: Steve wird parallel zur Gletscheroberfläche beschleunigt, Paul hingegen vertikal nach unten.

Das zweite Newton'sche Axiom beschreibt den Zusammenhang zwischen Pauls und Steves Beschleunigung und den auf sie wirkenden Kräften. Wenden Sie auf beide $\sum \boldsymbol{F} = m\,\boldsymbol{a}$ an und stellen Sie nach den Beschleunigungen bzw. nach den Zugspannungen um.

Lösung:

1. Zeichnen Sie für Steve und Paul zwei getrennte Kräftediagramme (Abbildung 4.25). Zeichnen Sie in Steves Kräftediagramm eine x- und eine y-Achse ein, wobei sie Steves Beschleunigungsrichtung als positive x-Achse wählen. Wählen Sie Pauls Beschleunigungsrichtung als positive x'-Achse.



4.25

2. Wenden Sie auf Steve $\sum \boldsymbol{F} = m\,\boldsymbol{a}$ in x-Richtung an:

$$F_{n,x} + F_{S,1,x} + m_S\, a_{G,x} = m_S\, a_{S,x}$$

3. Wenden Sie auf Paul $\sum \boldsymbol{F} = m\,\boldsymbol{a}$ in x'-Richtung an:

$$F_{S,2,x'} + m_P\, a_{G,x'} = m_P\, a_{P,x'}$$

4. Da sich beide jeweils entlang einer Geraden bewegen und dabei durch ein straffes, nicht dehnbares Seilstück verbunden sind, hängen ihre Beschleunigungen voneinander ab. Drücken Sie diese Abhängigkeit aus:

$$a_{P,x'} = a_{S,x} = a_x$$

5. Da die Seilmasse vernachlässigt werden kann und das Eis eine vernachlässigbare Reibung auf das Seil ausübt, hängen $\boldsymbol{F}_{S,1}$ und $\boldsymbol{F}_{S,2}$ voneinander ab. Drücken Sie diese Abhängigkeit aus:

$$F_{S,1,x} = -F_{S,2,x'} = F_S$$

6. Setzen Sie die Ergebnisse der Schritte 4 und 5 in die Gleichung aus den Schritten 2 und 3 ein:

$$F_S + m_S\, g\, \sin\theta = m_S\, a_x$$
$$-F_S + m_P\, g = m_P\, a_x$$

7. Lösen Sie die Gleichung für die Beschleunigung aus Schritt 6, indem Sie F_S ersetzen und nach a_x umstellen:

$$a_x = \boxed{\frac{m_S \sin\theta + m_P}{m_S + m_P}\,g}$$

8. Setzen Sie das Ergebnis aus Schritt 7 in eine Gleichung aus Schritt 6 ein und stellen Sie nach F_S um:

$$F_S = \boxed{\frac{m_S\, m_P}{m_S + m_P}\,g\,(1 - \sin\theta)}$$

Kommentar: Um die Lösung so einfach wie möglich zu halten, haben wir die positive x-Achse in Schritt 3 senkrecht nach unten gelegt. Durch diese Wahl haben wir erreicht, dass sich Paul in die positive x'-Richtung (nach unten) bewegt, wenn sich Steve in die positive x-Richtung (die Gletscheroberfläche entlang) bewegt.

! Plausibilitätsprüfung: Wenn m_P groß gegen m_S ist, sollte die Beschleunigung ungefähr g sein und die Zugspannung im Seil gegen null gehen. Setzt man $m_S = 0$, ergibt sich tatsächlich $a_x = g$ und $F_S = 0$. Wenn m_P klein gegen m_S ist, sollte die Beschleunigung etwa $g \sin\theta$ betragen (siehe Beispiel 4.7) und die Zugspannung auch in diesem Fall null sein. Tatsächlich erhält man $a_x = g \sin\theta$ und $F_S = 0$, wenn man in den Schritten 7 und 8 $m_P = 0$ einsetzt. Wir überprüfen außerdem die Ergebnisse für die maximale Neigung ($\theta = 90°$): Verwendet man in den Schritten 7 und 8 den Winkel $\theta = 90°$, ergibt sich $a_x = g$ und $F_S = 0$. Dies scheint richtig zu sein, da Steve und Paul dann frei fallen.

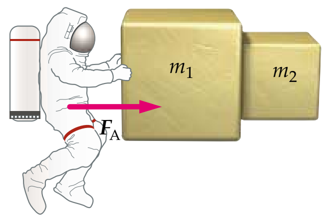
ÜBUNG: a) Ermitteln Sie die Beschleunigung, wenn $\theta = 15°$ ist und die Massen $m_S = 78$ kg und $m_P = 92$ kg betragen. b) Ermitteln Sie die Beschleunigung, wenn die genannten Massen vertauscht sind. (*Lösung:* a) $a_x = 0{,}660\,g$, b) $a_x = 0{,}599\,g$.)

BEISPIEL 4.12: Wir bauen eine Raumstation

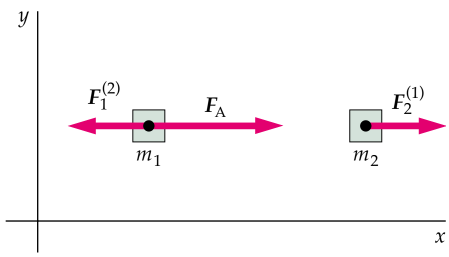
Stellen Sie sich vor, Sie sind ein Astronaut, der am Aufbau einer Raumstation mitarbeitet. Sie „schieben" mit der Kraft $\boldsymbol{F}_A$ einen Kasten mit der Masse m_1. Der Kasten steht in direktem Kontakt mit einem zweiten Kasten der Masse m_2 (Abbildung 4.26). a) Wie groß ist die Beschleunigung der Kästen? b) Welche Kraft übt ein Kasten auf den anderen Kasten aus?

ZUR ÜBUNG

Problembeschreibung: $\boldsymbol{F}_1^{(2)}$ sei die Kraft, die Kasten 2 auf Kasten 1 ausübt, $\boldsymbol{F}_2^{(1)}$ die Kraft, die Kasten 1 auf Kasten 2 ausübt. Nach dem dritten Newton'schen Axiom sind diese Kräfte gleich und entgegengesetzt gerichtet ($\boldsymbol{F}_1^{(2)} = -\boldsymbol{F}_2^{(1)}$), so dass $F_1^{(2)} = -F_2^{(1)}$ ist. Wenden Sie das zweite Newton'sche Axiom auf jeden Kasten einzeln an. Die Bewegungen der beiden Kästen sind gleich, so dass $\boldsymbol{a}_1$ und $\boldsymbol{a}_2$ gleich sind.



4.26



4.27

Lösung:

Decken Sie zunächst die rechte Spalte ab und versuchen Sie jeweils, die Ergebnisse selbst zu ermitteln.

Schritte	Ergebnisse
Teilaufgabe a	
1. Zeichnen Sie für die beiden Kästen Kräftediagramme (Abbildung 4.27).	
2. Wenden Sie $\sum \boldsymbol{F} = m\,\boldsymbol{a}$ auf den Kasten 1 an.	$F_A + F_1^{(2)} = m_1\, a_{1,x}$
3. Wenden Sie $\sum \boldsymbol{F} = m\,\boldsymbol{a}$ auf den Kasten 2 an.	$F_2^{(1)} = m_2\, a_{2,x}$

4. Schreiben Sie die Beziehung zwischen den beiden Beschleunigungen sowie die Beziehung zwischen den Beträgen der Kräfte, die die beiden Kästen aufeinander ausüben, auf.

$a_{2,x} = a_{1,x} = a_x$

$F_1^{(2)} = -F_2^{(1)} = F$

5. Setzen Sie dies in die Ergebnisse der Schritte 2 und 3 ein und stellen sie nach a_x um.

$a_x = \boxed{\dfrac{F_A}{m_1 + m_2}}$

Teilaufgabe b
Setzen Sie Ihr Ergebnis für a_x in Schritt 2 oder Schritt 3 ein und stellen Sie nach F um.

$F = \boxed{-\dfrac{m_2}{m_1 + m_2} F_A}$

Kommentar: Vielleicht ist Ihnen bereits aufgefallen, dass das Ergebnis aus Schritt 5 das gleiche ist, das Sie erhalten würden, wenn $\boldsymbol{F}_A$ an nur einem Kasten mit dem Gesamtgewicht beider Kästen angreifen würde. Da beide Kästen die gleiche Beschleunigung erfahren, kann man sie in diesem Fall als einen gemeinsamen Körper mit der Masse $m_1 + m_2$ betrachten.

ÜBUNG: a) Berechnen Sie die Beschleunigung und die Kontaktkraft, wenn $m_1 = 2$ kg, $m_2 = 3$ kg und $F_A = 12$ N ist. b) Ermitteln Sie die Kontaktkraft, wenn beide Kästen vertauscht sind, so dass der erste Block eine Masse von 3 kg und der zweite eine Masse von 2 kg hat. (*Lösung:* a) $a_x = 2{,}4$ m/s2, $F = -7{,}2$ N, b) $F = -4{,}8$ N.)

Zusammenfassung

1. Die Newton'schen Axiome sind grundlegende Naturgesetze, die die Grundlage für unser Verständnis der Mechanik bilden.
2. Die Masse ist eine *innere* Eigenschaft eines Körpers.
3. Die Kraft ist eine wichtige *abgeleitete* dynamische Größe.

Thema	Wichtige Gleichungen und Anmerkungen
1. Newton'sche Axiome	
Erstes Axiom	Ein Körper bleibt in Ruhe oder bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit weiter, wenn keine resultierende äußere Kraft auf ihn wirkt. (Bezugssysteme, auf die diese Aussage zutrifft, werden Inertialsysteme genannt.)
Zweites Axiom	Ein Körper wird in Richtung der resultierenden äußeren Kraft beschleunigt, die auf ihn wirkt. Die Beschleunigung ist gemäß $\boldsymbol{F}_{ges} = m\,\boldsymbol{a}$ proportional zur resultierenden äußeren Kraft $\boldsymbol{F}_{ges}$, wobei m die Masse des Körpers ist. Die resultierende äußere Kraft auf einen Körper ist die Vektorsumme aller Kräfte, die auf ihn wirken: $\boldsymbol{F}_{ges} = \sum \boldsymbol{F}$. Somit gilt $\sum \boldsymbol{F} = m\,\boldsymbol{a}$. (4.1)
Drittes Axiom	Kräfte treten immer paarweise auf. Wenn der Körper A eine Kraft $\boldsymbol{F}_B^{(A)}$ auf den Körper B ausübt, wirkt eine gleich große, aber entgegengesetzt gerichtete Kraft $\boldsymbol{F}_A^{(B)}$ von dem Körper B auf den Körper A. Somit gilt $\boldsymbol{F}A(B) = -\boldsymbol{F}B(A)$. (4.2)
2. Inertialsysteme	Die Newton'schen Axiome gelten nur in Inertialsystemen, d. h. in denjenigen Bezugssystemen, in denen ein Körper in Ruhe bleibt, wenn keine Kraft auf ihn wirkt. Jedes Bezugssystem, das sich mit konstanter Geschwindigkeit gegenüber einem Inertialsystem bewegt, ist selbst ein Inertialsystem. Jedes Bezugssystem, das gegenüber einem Inertialsystem beschleunigt wird, ist selbst kein Inertialsystem. Die Erdoberfläche ist in guter Näherung ein Inertialsystem.
3. Kraft, Masse und Gewicht	
Kraft	Die Kraft ist über die Beschleunigung definiert, die sie an einem gegebenen Körper bewirkt. Eine Kraft von 1 Newton (N) ist die Kraft, die einen Körper mit einer Masse von 1 kg mit 1 m/s² zu beschleunigen vermag.

	Masse	Die Masse ist eine innere Eigenschaft jedes Körpers. Sie ist ein Maß für seinen Trägheitswiderstand gegenüber einer Beschleunigung. Die Masse eines Körpers hängt nicht von seinem Ort ab. Die Massen zweier Körper lassen sich vergleichen, indem man die gleiche Kraft auf zwei Körper ausübt und ihre jeweiligen Beschleunigungen misst. Das Verhältnis der beiden Massen steht im umgekehrten Verhältnis der auf sie angewendeten Beschleunigungen: $$\frac{m_2}{m_1} = \frac{a_1}{a_2}. \qquad (4.3)$$
	Gewicht	Das Gewicht bzw. die Gewichtskraft $\boldsymbol{F}_{\mathrm{G}}$ eines Körpers ist die Gravitationskraft, die die Erde auf diesen Körper ausübt. Sie ist proportional zur Masse m des Körpers und zum Gravitationsfeld $\boldsymbol{a}_{\mathrm{G}}$, das gleich der Fallbeschleunigung ist: $$\boldsymbol{F}G = m\,\boldsymbol{a}_{\mathrm{G}}. \qquad (4.4)$$ Die Gewichtskraft ist keine innere Eigenschaft eines Körpers; sie ist ortsabhängig.
4.	**Die Grundkräfte der Natur**	Alle in der Natur beobachtbaren Kräfte lassen sich durch vier fundamentale Wechselwirkungen erklären: 1. die Gravitationskraft, 2. die elektromagnetische Kraft, 3. die starke Kernkraft, 4. die schwache Kraft.
5.	**Kontaktkräfte**	Kontaktkräfte, die beim Abstützen und bei der Reibung, aber auch durch Federn und Seile erzeugt werden, entstehen durch Molekülkräfte, die ihren Ursprung in der elektromagnetischen Kraft haben.
	Hooke'sches Gesetz	Wird eine entspannte Feder um einen kleinen Betrag Δx zusammengedrückt oder gedehnt, ist die Kraft, die sie ausübt, proportional zu Δx: $$F_x = -k\,\Delta x. \qquad (4.9)$$

Aufgaben

Gelegentlich enthalten die Aufgaben mehr Angaben, als für die Lösung erforderlich sind. Bei einigen anderen dagegen werden Daten aus dem Allgemeinwissen, aus anderen Quellen oder sinnvolle Schätzungen benötigt.

- • Einfache Aufgaben mit nur einem Rechenschritt.
- •• Mittelschwere Aufgaben, können die Kombination verschiedener Konzepte erfordern.
- ••• Anspruchsvolle Aufgaben.

Bei allen Aufgaben sei die Fallbeschleunigung $|\boldsymbol{a}_{\mathrm{G}}| = g =$ 9,81 m/s^2. Falls nichts anderes angegeben ist, sind Reibung und Luftwiderstand zu vernachlässigen.

Verständnisaufgaben

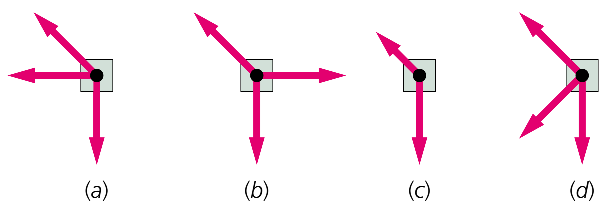
1 •• Woran erkennt man, ob ein Bezugssystem ein Inertialsystem ist?

2 • Auf einen Körper wirkt eine einzelne nicht verschwindende Kraft. Muss dieser Körper eine Beschleunigung relativ zu einem Inertialsystem besitzen? Kann er irgendwann die Geschwindigkeit null besitzen?

3 • Ein Körper werde an einen Ort des Weltraums gebracht, an dem er weit weg von Galaxien, Sternen und anderen Körpern ist. Wie ändert sich seine Masse bzw. sein Gewicht?

4 •• Es wird oft gesagt, dass aus dem ersten und zweiten Newton'schen Axiom folgt, dass man mit den Gesetzen der Mechanik nicht feststellen kann, ob man still steht oder sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegt. Erläutern Sie diese Aussage.

5 • Welches der Kräftediagramme in Abbildung 4.28 stellt einen Körper dar, der eine reibungsfreie geneigte Ebene hinuntergleitet?



4.28 Zu Aufgabe 5.

6 • Eine Wäscheleine wird straff zwischen zwei Pfählen aufgehängt. Anschließend wird ein nasses Handtuch in der Mitte der Leine aufgehängt. Kann die Wäscheleine horizontal hängen bleiben? Begründen Sie Ihre Aussage.

7 • Welche Auswirkung hat die Geschwindigkeit eines Fahrstuhls auf das scheinbare Gewicht einer Person im Fahrstuhl?

Schätzungs- und Näherungsaufgaben

8 •• Ein 90 km/h schnelles Auto fährt auf ein unbesetztes Fahrzeug auf, das einen Motorschaden hatte und auf der Straße liegen geblieben ist. Glücklicherweise trägt der Fahrer des auffahrenden Fahrzeugs einen Sicherheitsgurt. Schätzen Sie unter Annahme sinnvoller Werte für die Masse des Fahrers und für den Bremsweg die (als konstant angenommene) Kraft, die der Sicherheitsgurt auf den Fahrer ausübt.

Das erste und das zweite Newton'sche Axiom: Masse, Trägheit und Kraft

9 • Ein Körper besitzt eine Beschleunigung von 3 m/s^2, wobei nur die Kraft $\boldsymbol{F}_0$ auf ihn wirkt. a) Wie groß ist seine Beschleunigung, wenn die Kraft verdoppelt wird? b) Ein zweiter Körper erhält unter dem Einfluss der Kraft $\boldsymbol{F}_0$ die Beschleunigung 9 m/s^2. Wie groß ist das Verhältnis der Massen der beiden Körper? c) Welche Beschleunigung würde die Kraft $\boldsymbol{F}_0$ auf den Gesamtkörper erzeugen, der entsteht, wenn man beide Körper zusammenklebt?

10 •• Eine Kugel mit der Masse $1{,}8 \cdot 10^{-3}$ kg, die mit 500 m/s fliegt, trifft einen großen, fest stehenden Holzblock und bohrt sich 6 cm weit in ihn hinein, bevor sie zum Stillstand kommt. Berechnen Sie unter der Annahme, dass die Beschleunigung der Kugel konstant ist, die Kraft, die das Holz auf die Kugel ausübt.

11 • Auf einen Körper der Masse 1,5 kg wirkt eine Kraft $\boldsymbol{F} = (6\hat{\boldsymbol{x}} - 3\,\hat{\boldsymbol{y}})$ N. Berechnen Sie die Beschleunigung $\boldsymbol{a}$. Wie groß ist ihr Betrag $|\boldsymbol{a}|$?

Masse und Gewicht

12 • Auf dem Mond beträgt die Beschleunigung durch die Gravitation nur ein Sechstel der Erdbeschleunigung. Ein Astronaut, dessen Gewicht auf der Erde 600 N beträgt, reist zur Mondoberfläche. Dort wird seine Masse gemessen. Beträgt seine dort gemessene Masse a) 600 kg, b) 100 kg, c) 61,2 kg, d) 9,81 kg oder e) 360 kg?

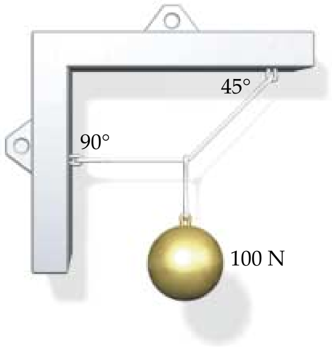
Kontaktkräfte

13 • Ein Ende einer vertikalen Feder mit der Federkonstante 600 N/m ist an der Decke und das andere an einem 12-kg-Block befestigt, der auf einer horizontalen Fläche liegt. Die Feder ist um 10 cm gedehnt und übt auf den Block eine nach oben gerichtete Kraft aus. a) Wie groß ist die Kraft, die die Feder auf den Block ausübt? b) Welche Kraft übt die Fläche auf den Block aus?

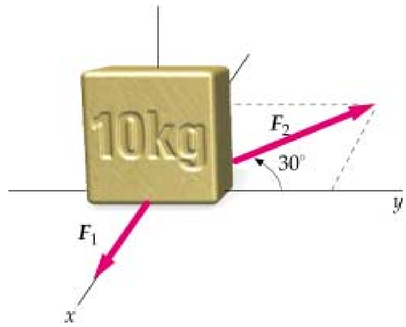
Kräftediagramme: Statisches Gleichgewicht

14 • Ein 100-N-Körper ist wie abgebildet an einem System aus Seilen aufgehängt. Wie groß ist die Zugspannung in dem horizontalen Seil?

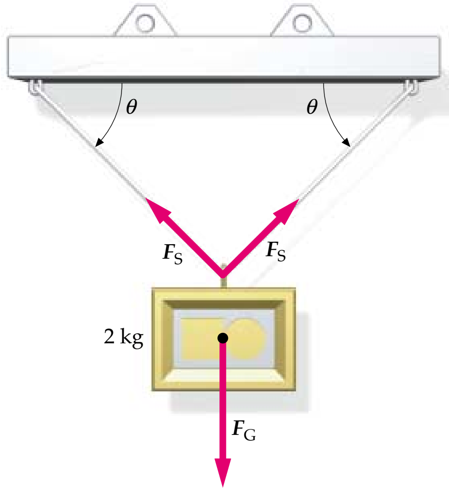
15 • Auf einen Körper mit einer Masse von 5 kg an der Erdoberfläche wirkt wie in Abbildung 4.30 eine vertikale Kraft $\boldsymbol{F}_\mathrm{S}$. Berechnen Sie die Beschleunigung des Körpers, wenn a) $|\boldsymbol{F}_\mathrm{S}| = 5$ N, b) $|\boldsymbol{F}_\mathrm{S}| = 10$ N und c) $|\boldsymbol{F}_\mathrm{S}| = 100$ N ist.



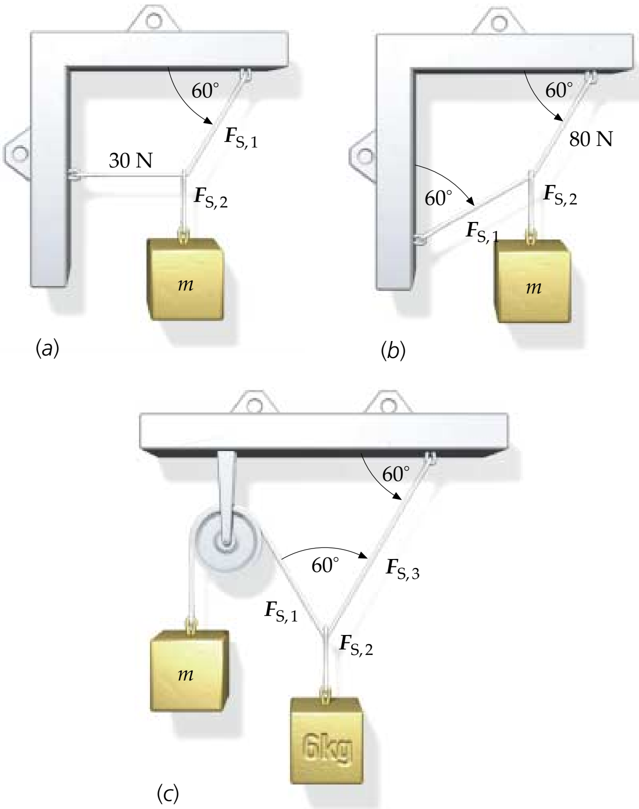
4.29 Zu Aufgabe 14.



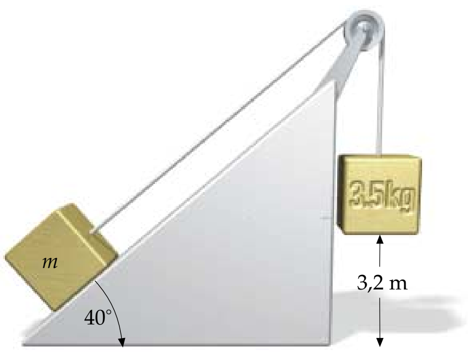
4.30 Zu Aufgabe 15.



4.31 Zu Aufgabe 16.



4.32 Zu Aufgabe 18.



4.33 Zu Aufgabe 19.

16 •• Ein Bild mit einer Masse von 2 kg ist an zwei gleich langen Drähten aufgehängt. Jeder Draht bildet mit der Horizontalen einen Winkel θ (Abbildung 4.31). a) Ermitteln Sie eine allgemeine Gleichung für den Betrag der Zugspannung $|\boldsymbol{F}_S|$ in Abhängigkeit von θ und dem Betrag des Gewichts $|\boldsymbol{F}_G|$ des Bilds. Bei welchem Winkel θ ist $|\boldsymbol{F}_S|$ am kleinsten? Bei welchem Winkel θ ist $|\boldsymbol{F}_S|$ am größten? b) Wie groß ist die Zugspannung in den Drähten für $\theta = 30°$?

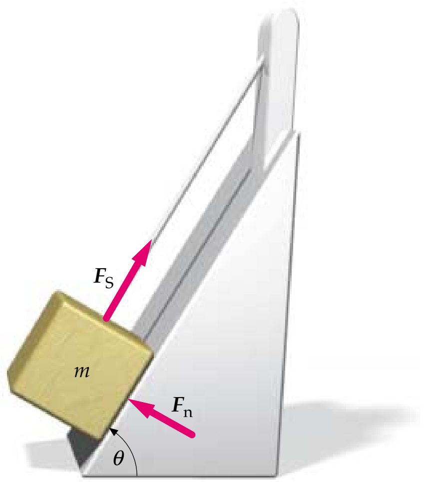
17 •• Eine 1000-kg-Last wird von einem Kran umgesetzt. Wie groß ist die Zugspannung im Kranseil, wenn die Last a) nach oben bewegt wird, wobei ihre Geschwindigkeit um 2 m/s pro Sekunde wächst, b) mit konstanter Geschwindigkeit angehoben wird und c) herabgelassen wird, wobei ihre Geschwindigkeit um 2 m/s pro Sekunde sinkt?

18 •• Ermitteln Sie für die Systeme aus den Abbildungen 4.32 a, b und c, die im Gleichgewicht sind, die unbekannten Zugspannungen und Massen.

Kräftediagramme: Geneigte Ebenen und Normalkräfte

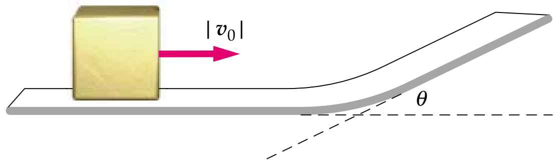
19 • Das System in Abbildung 4.33 ist im Gleichgewicht. Beträgt demnach die Masse m a) 3,5 kg, b) 3,5 kg sin 40°, c) 3,5 kg tan 40° oder d) keinen der genannten Werte?

20 •• Ein Block auf einer reibungsfreien Neigung wird durch ein Kabel gehalten (Abbildung 4.34). a) Wie groß sind die Zugspannung im Kabel und die von der Neigung ausgeübte Normalkraft, wenn $\theta = 60°$ und $m = 50$ kg sind? b) Ermitteln Sie die Zugspannung als Funktion von θ und m und überprüfen Sie ihr Ergebnis für $\theta = 0°$ und $\theta = 90°$.



4.34 Zu Aufgabe 20.

21 •• Ein Block der Masse m gleitet auf einem reibungsfreien Boden und anschließend eine reibungsfreie Rampe hinauf (Abbildung 4.35). Der Winkel der Rampe sei θ und die Geschwindigkeit des Blocks vor dem Hinaufgleiten auf die Rampe v_0. Der Block gleitet bis zu einer bestimmten maximalen Höhe h über dem Boden hinauf, bevor er wieder zurückzurutschen beginnt. Zeigen sie, dass h unabhängig von θ ist.

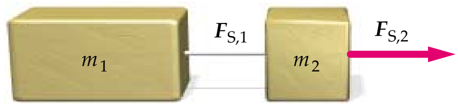


4.35 Zu Aufgabe 21.

Kräftediagramme: Fahrstühle

22 • Eine Person in einem Fahrstuhl hält ein 10-kg-Gewicht an einer Schnur, die eine Nennbelastung bis 150 N aushält. Als der Fahrstuhl losfährt, reißt diese Schnur. Wie groß war die Beschleunigung des Fahrstuhls mindestens?

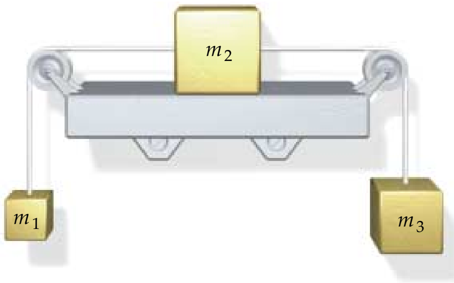
Kräftediagramme: Seile, Zugspannung und das dritte Newton'sche Axiom



4.36 Zu Aufgabe 23.

23 • Zwei Blöcke der Massen m_1 und m_2 sind durch ein masseloses Seil miteinander verbunden. Sie werden, wie in Abbildung 4.36 gezeigt, beide gleichmäßig auf einer reibungsfreien Fläche beschleunigt. Ist das Verhältnis der beiden Zugspannungen $|\boldsymbol{F}_{S,1}|/|\boldsymbol{F}_{S,2}|$ gleich a) m_1/m_2, b) m_2/m_1, c) $(m_1+m_2)/m_2$, d) $m_1/(m_1+m_2)$ oder e) $m_2/(m_1+m_2)$?

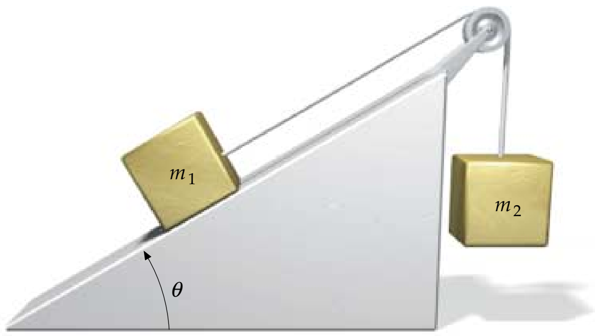
24 •• Ein Block der Masse $m_2 = 3{,}5$ kg liegt auf einem reibungsfreien, horizontalen Brett und ist über zwei Seile mit zwei frei hängenden Blöcken der Massen $m_1 = 1{,}5$ kg und $m_3 = 2{,}5$ kg verbunden (Abbildung 4.37). Beide Rollen seien reibungsfrei und masselos. Das System ist ursprünglich in Ruhe. Ermitteln Sie a) die Beschleunigung der beiden Blöcke und b) die Zugspannung in den beiden Seilen, nachdem das System freigegeben worden ist.



4.37 Zu Aufgabe 24.

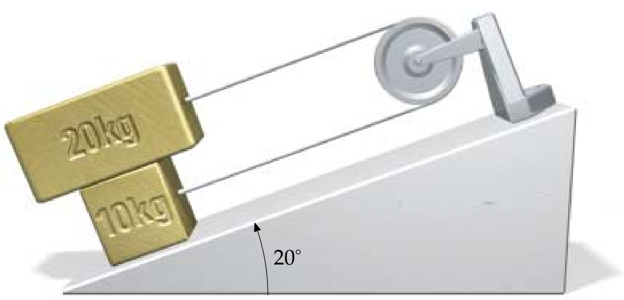
25 •• Ein Block der Masse m wird durch ein Seil der Masse M und der Länge L vertikal angehoben. Das Seil wird dabei an seinem oberen Ende gehalten, während das Seil und der Block zusammen mit a nach oben beschleunigt werden. Die Masse sei im Seil gleichmäßig verteilt. Zeigen Sie, dass der Betrag der Zugspannung im Seil in einer Höhe x $(<L)$ über dem Block gleich $(a+g)[m+(x/L)M]$ ist.

26 •• Zwei Körper sind wie in Abbildung 4.38 gezeigt über ein masseloses Seil miteinander verbunden. Die geneigte Ebene und die Rolle seien reibungsfrei. Ermitteln Sie die Beschleunigung der Körper und die Zugspannung im Seil a) allgemein für beliebige θ, m_1 und m_2 und b) für $\theta = 30^\circ$ und $m_1 = m_2 = 5$ kg.



4.38 Zu Aufgabe 26.

27 ••• Abbildung 4.39 zeigt einen 20-kg-Block, der auf einem 10-kg-Block gleitet. Alle Oberflächen seien reibungsfrei. Gesucht sind die Beschleunigungen beider Blöcke sowie die Zugspannung in dem Seil, das die Blöcke verbindet.



4.39 Zu Aufgabe 27.

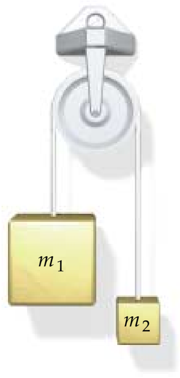
Kräftediagramme: Die Atwood'sche Fallmaschine

28 •• Der Apparat in Abbildung 4.40 wird *Atwood'sche Fallmaschine* genannt und dient zur Ermittlung der Erdbeschleunigung g. Dazu wird die Beschleunigung der beiden Gewichte gemessen. Dabei geht man von einer masselosen, reibungsfreien Rolle sowie von einem masselosen Seil aus. Zeigen Sie, dass sich unter diesen Annahmen die Beträge der Beschleunigung der Körper und der Zugspannung im Seil wie folgt berechnen:

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\, g \quad \text{und} \quad F_S = \frac{2\, m_1 m_2\, g}{m_1 + m_2}$$

29 •• Berechnen Sie die Kraft, die die Atwood'sche Fallmaschine während der Beschleunigung der Gewichte auf den Aufhänger ausübt, mit der sie an der Decke befestigt ist (Abbildung 4.40). Die Masse der Rolle sei vernachlässigbar. Überprüfen Sie Ihre Antwort, indem Sie Grenzwerte für m_1 und/oder m_2 einsetzen, bei denen sich die Antwort bereits durch einfaches Nachdenken ergibt.

30 ••• Eine Atwood'sche Fallmaschine besitzt eine feste Masse m_1 und eine variable Masse m_2 ($> m_1$) auf der anderen Seite. a) Zeigen Sie, dass die größtmögliche Zugspannung im Seil $2\,m_1 g$ beträgt. b) Interpretieren Sie dieses Ergebnis physikalisch, ohne die Differential- und Integralrechnung zu Hilfe zu nehmen.



4.40 Zu Aufgaben 28 bis 31.

4.41 Zu Aufgabe 32.

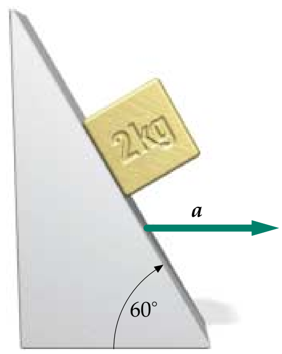
Allgemeine Aufgaben

31 •• An einer langen, gleichförmigen Kette, die an der Decke befestigt ist, hängt ein Block mit einer Masse von 50 kg. Die Eigenmasse der Kette beträgt 20 kg und ihre Länge 1,5 m. Bestimmen Sie die Zugspannung in der Kette a) an dem Ende, an dem der Block befestigt ist, b) in der Mitte der Kette und c) am Befestigungspunkt an der Decke.

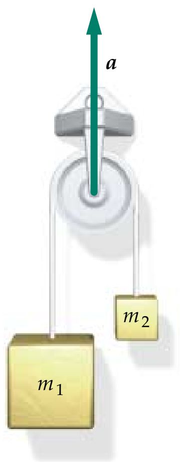
32 •• Eine reibungsfreie Fläche ist unter einem Winkel von 30° gegen die Horizontale geneigt. Ein 270-kg-Block ist über ein Seil und eine Rolle mit einem frei hängenden Gewicht mit einer Masse von 75 kg verbunden (Abbildung 4.41). a) Zeichnen sie je ein Kräftediagramm für den Block und für das Gewicht. b) Berechnen Sie die Zugspannung im Seil und die Beschleunigung des Blocks. c) Der Block, der anfangs ruht, wird plötzlich losgelassen. Wie lange dauert es, bis er eine Strecke von 1 m hinabgerutscht ist?

33 •• Ein 2-kg-Block ruht auf einem reibungsfreien Keil mit einer Neigung von 60°. Der Keil wird mit der Beschleunigung $\boldsymbol{a}$ nach rechts beschleunigt, deren Betrag so groß ist, dass der Block seine Lage relativ zum Keil beibehält (Abbildung 4.42). a) Gesucht ist die Beschleunigung a. b) Was würde passieren, wenn der Keil stärker beschleunigt würde?

34 ••• Die Rolle einer Atwood'schen Fallmaschine wird mit der Beschleunigung $\boldsymbol{a}$ nach oben beschleunigt (Abbildung 4.43). Berechnen Sie die Beschleunigung der Gewichte und die Zugspannung in dem Verbindungsseil. *Hinweis: Eine konstante nach oben gerichtete Beschleunigung hat die gleiche Wirkung wie eine Verstärkung der Beschleunigung durch die Gravitation.*



4.42 Zu Aufgabe 33.



4.43 Zu Aufgabe 34.