

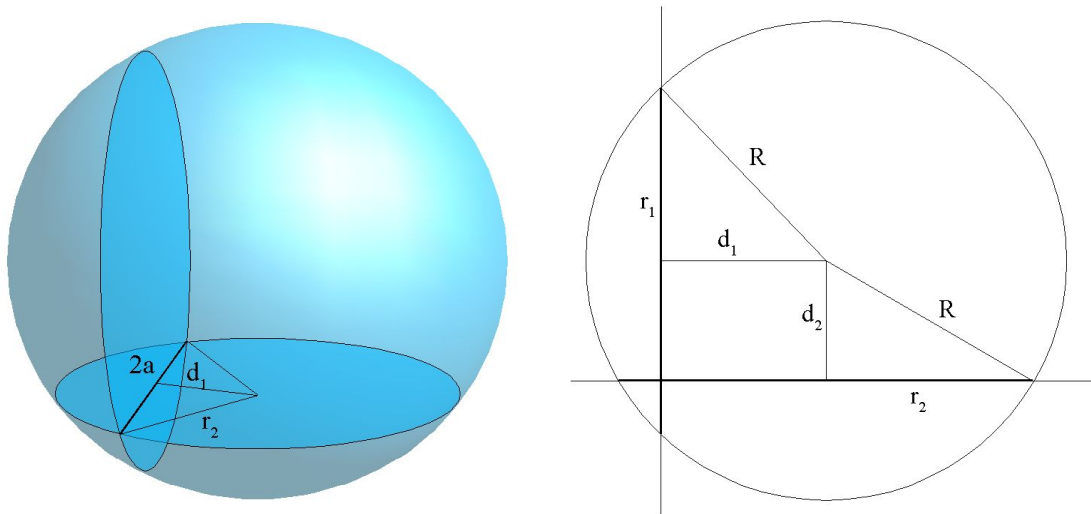
1 Mathematische Knochelei des Monats Mai: „Pulsierende Schwerkraft“

1.1 Lösung

Das schwarze Loch ist während seiner größten Ausdehnung eine Kugel mit Radius $R = 30$ nm.

1.2 Herleitung

Hier zwei Skizzen des Versuchsaufbaus:



In der perspektivischen Ansicht sieht man das schwarze Loch zum Zeitpunkt seiner größten Ausdehnung, und man erkennt die beiden Kreise, die als Schnittflächen der Kugel mit den beiden Ebenen der planaren Felder entstehen. Den Abstand der Schnittpunkte der beiden Kreise habe ich $2a$ genannt.

Die rechte Figur stellt eine Seitenansicht der Versuchsgometrie dar, in einer Ebene, die genau senkrecht auf den beiden Feldebeneen steht. Hier erscheinen die Kreise als Strecken mit den Längen $2r_{1/2}$. Außerdem erkennt man gut die Abstände $d_{1/2}$ der Ebenen vom Mittelpunkt des schwarzen Lochs.

In welchen Beziehungen stehen all diese Längen zueinander? In der Seitenansicht erkennt man zwei rechtwinklige Dreiecke, und der Satz des Pythagoras angewendet auf das obere Dreieck besagt:

$$r_1^2 + d_1^2 = R^2 \quad (1)$$

In der perspektivischen Ansicht sieht man, wie aus dem Abstand der Kreisschnittpunkte eine wechselseitige Beziehung zwischen dem einen Kreisradius und dem anderen Abstand hergeleitet werden kann:

$$a^2 + d_1^2 = r_2^2 \quad (2)$$

Damit kann ich d_1^2 in Gleichung (1) eliminieren und erhalte

$$R^2 = r_1^2 + r_2^2 - a^2 = (18^2 + 25^2 - 7^2) \text{ nm}^2 = 900 \text{ nm}^2 \quad (3)$$

Folglich beträgt der Radius R des schwarzen Lochs zum Zeitpunkt seiner größten Ausdehnung 30 nm.